
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01038009 5



Die

Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit.

Bericht

erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

von

Dr. A. Brill,
Professor an der Universität
Tübingen.

und

Dr. M. Noether,
Professor an der Universität
Erlangen.

Vorrede.

Die Theorie der algebraischen Functionen hat in ihrer äusseren Gestalt bei verschiedenen Vertretern dieses Wissenszweiges zur Zeit ein so verschiedenartiges Aussehen, dass man beim Uebergang von einer Darstellung zur anderen in ein neues Gebiet einzutreten glaubt. Sieht man jedoch näher zu, so zeigt sich, dass der Unterschied nicht so sehr im Wesen und in den Ergebnissen, als in der Ausdrucksform und der Anordnung des Stoffes liegt, je nachdem der Urheber seine Theorie an diejenige der Abel'schen Integrale oder an die Lehre von den Potenzreihen oder an identische Umformungen von rationalen Functionen zweier Veränderlichen oder an den zahlentheoretischen Begriff des Ideals u. s. w. anschliesst.

Als im Jahr 1891 die Vereinigung deutscher Mathematiker in Halle den Wunsch aussprach, es möchte über die Theorie der algebraischen Functionen ein Referat erstattet werden, lag wohl der Gedanke zu Grunde, dass es sich um eine kritisch-vergleichende Besprechung jener verschiedenen Auffassungen handele, welche die Vorzüge und die Tragweite jeder Einzeltheorie feststellen und den bequemen Uebergang von einem System zum anderen ermöglichen solle. Auch wir fassten dieses Ziel ins Auge, als wir die Aufforderung des Vorstandes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung auf Erstattung eines solchen Referates annahmen. Wir hatten uns jedoch zuvor zu der voraussichtlich ausgedehnten Arbeit einer wertvollen Beihülfe zu versichern gesucht, welche eine uns weniger geläufige Richtung vertrat, die in dem Referat zum gewichtigen Ausdruck kommen musste. Auf eine Anfrage hatte sich nämlich Kronecker bereit erklärt, durch Vermittlung einer jüngeren ihm nahestehenden Kraft bei dem Unternehmen mitzuwirken. Von dem Zusammenarbeiten so verschiedener wissenschaftlicher Interessen an dem gleichen Werke war für dieses nur ein Gewinn zu erwarten.

Leider hat Kronecker's rasches Ende diesem Plan ein Ziel gesetzt. Denn da zu befürchten stand, dass auch der geschätzte Mitarbeiter, dessen Beistand wir in Aussicht nahmen, durch das Ordnen von Kronecker's Hinterlassenschaft der stetigen Mitwirkung an unserer Arbeit entzogen werden würde, so mussten wir uns mit dem Gedanken vertraut machen, das begonnene Werk allein zu Ende zu führen.

Wollten wir jedoch nicht auf Jahre hinaus unsere Thätigkeit auf einem Gebiete festlegen, das wir überhaupt nicht ohne Selbstverläugnung betreten haben, so mussten wir uns entschliessen, die eingetretene Lücke unausgefüllt und die auf den Begriffsbildungen der neueren Zahlentheorie beruhenden Theorien von Kronecker und von Dedekind-Weber, sowie die anschliessenden Arbeiten unberücksichtigt zu lassen. Wenn wir unsere Arbeit mit dieser Lücke der Oeffentlichkeit übergeben, so mag uns der Umstand rechtfertigen, dass der ursprüngliche Plan, einen kritisch-vergleichenden Bericht vorzugsweise über den Stand nur der heutigen Theorien zu erstatten, im Verlauf unserer Studien und unabhängig von den erwähnten äusseren Umständen eine wesentliche Modification erfahren hat.

Bei näherem Zusehen fanden wir nämlich, dass eine Vergleichung der verschiedenen Systeme ohne den Rückhalt einer vorausgehenden knappen Darstellung ihres Inhaltes und ihrer Hülfsmittel, ihrer Grundlagen und Ziele gegenstandlos und jedenfalls für einen grösseren Leserkreis nicht verständlich gewesen wäre. Wegen der Ausdehnung des Stoffes rückte so die objective Berichterstattung mehr und mehr in den Vordergrund. Zugleich erwies sich eine Vergleichung nur hinsichtlich der Hauptmarksteine der Einzeltheorien als durchführbar; sie konnte gelegentlich eingeflochten oder in Uebersichten am Schlusse der Capitel untergebracht werden. Und was die Kritik angeht, so erwogen wir, dass die stichhaltigste Probe auf den Wert einer Theorie, ihre Fruchtbarkeit, für manche von den hier zu behandelnden Systemen noch aussteht. Von mehr als ephemerem Interesse konnte ein über sie gefälltes Urteil nicht sein. So haben wir an Stelle des kritischen Vergleichens eine objective Darstellung der Einzeltheorien treten lassen und hinsichtlich der Beurteilung uns darauf beschränkt, gelegentliche Bemerkungen einzustreuen über die Vorzüge, die wir, wenn es sich um das Verfolgen eines bestimmten Zieles handelt, dieser oder jener Theorie zuerkennen.

Dagegen legten wir Gewicht darauf, den Zuwachs an neuen Ideen, den die Einzeltheorien beibrachten, und ihren Anschluss an die vorhandenen genauer zu untersuchen und insbesondere den Zeitpunkt festzustellen,

in dem eine Theorie an die Oeffentlichkeit getreten ist oder wesentliche Veränderungen erfahren hat. Im Verlaufe solcher historischen Studien gelangten wir zu einer neuen Auffassung unserer Aufgabe, die je länger je mehr für unsere Thätigkeit bestimmend wurde.

Grundlagen und Hülfsmittel einer Theorie sind erst dann ganz verständlich, wenn man den Kreis von Anschauungen kennt, aus welchem die Urheber geschöpft haben. Das Wissen der Vorgänger und die wissenschaftliche Atmosphäre, die den Erfinder umgab, zu erkennen, ihren Einfluss auf die Ausgestaltung seiner Theorie abzuschätzen musste unsere nächste Aufgabe sein. Mancher grosse Fortschritt in der Wissenschaft ist nur das glückliche Ergebnis der gegenseitigen Befruchtung heterogener Wissensgebiete. Indem wir einer Untersuchung solcher Beziehungen und einer Erforschung der Quellen, aus denen die Autoren geschöpft haben, nicht auswichen, sahen wir uns zu rückwärts greifenden geschichtlichen Studien genötigt, die um so mehr Bedürfnis und andererseits um so zeitraubender waren, als ein Werk über Geschichte der Mathematik, in welchem die Functionentheorie — etwa von dem Zeitpunkt der Erfindung der Differentialrechnung an — in einem für unsere Zwecke ausreichenden Umfange berücksichtigt wird, nicht existirt. Bei dem Versuche, diese Lücke auszufüllen, mussten wir, um uns nicht ins Unbegrenzte zu verlieren, uns zeitlich auf die beiden letzten Jahrhunderte und inhaltlich auf die Behandlung solcher Wissenszweige beschränken, die, wie die algebraische Geometrie, die Lehre von den Functionen, von den Potenzreihen, die Elimination u. s. w., die Wurzeln bilden, aus denen später die Theorie der algebraischen Functionen erwachsen ist.

Dabei haben wir uns hinsichtlich der älteren Zeit damit begnügt, einzelne für die Entfaltung der Theorie wesentliche Punkte hervorzuheben. Eingehender verfolgen wir, wie sich die Theorie der Functionen in diesem Jahrhundert, sowohl im allgemeinen, wie namentlich nach der algebraischen Seite hin, entwickelt hat; so besprechen wir Riemann's Theorie auch hinsichtlich ihrer transcendenten Hülfsmittel. Von den heutigen Theorien der algebraischen Functionen werden alle diejenigen, die auf nicht-transcendenter Grundlage beruhen, mit Ausnahme der oben erwähnten arithmetischen, in die Erörterung einbezogen, auch diejenige nicht ausgenommen, die Weierstrass bisher nur in akademischen Vorlesungen mündlich mitgeteilt hat. — Zwar ist es sonst nicht üblich, Universitätsvorträge als eine Publicationsform anzusehen, und wir wünschen, indem wir von dieser Regel eine Ausnahme machen, damit keineswegs eine abweichende Ansicht auszusprechen. Bei der allgemeinen Verbreitung jedoch, welche die von Weierstrass über

Abel'sche Functionen seit Decennien gehaltenen Vorlesungen in teilweise vortrefflichen Nachschriften weit über den Kreis seiner Schüler hinaus gefunden haben, und nachdem zahlreiche Einzelheiten bereits in die Litteratur übergegangen sind, gebot es die Bedeutung der in diesen Vorlesungen niedergelegten Theorie, ihren Inhalt, und zwar aus verschiedenen Zeitperioden — wenigstens soweit uns das Material hierfür zur Verfügung stand —, in den Kreis unserer Betrachtung mit hereinzuziehen. Wir sprechen auch an dieser Stelle unseren Dank aus, dass uns der hochverehrte Gelehrte seine Zustimmung zu der Benutzung der später anzuführenden Hefte, namentlich eines solchen von Hölder, dem wir für dessen Ueberlassung verpflichtet sind, in freundlichster Weise erteilt hat.

Bei der Fülle des Stoffes war indessen eine zeitliche Begrenzung nicht bloss nach rückwärts sondern auch hinsichtlich der jüngsten Production, namentlich auf angrenzenden Gebieten, notwendig. Wir mussten uns versagen, auf die neuere Theorie der Elimination und der symmetrischen Functionen, auf die allgemeine Functionentheorie, wie sie seit Weierstrass sich entwickelt hat, auf ihre Anwendung in der Theorie der Differentialgleichungen und umgekehrt der letzteren in der Theorie der algebraischen Functionen, auf die Bestimmung einer Riemann'schen Fläche von gegebener Blätterzahl durch ihre Verzweigungsstellen, auf die von den Italienern ausgebildete Lehre von involutorischen Systemen von Punktgruppen einer Curve, auf das weite Feld der Anwendungen, welche die Theorie der algebraischen Functionen — also die Geometrie der Punktgruppen auf der Curve — auf die Geometrie der rationalen Transformationen der ganzen Ebene und der höheren Räume gefunden hat, einzugehen, wenn wir nicht Gebiete bloss streifen wollten, die gesondert eine ausführliche Behandlung verdienen.

Eben im Begriff abzuschliessen, erhalten wir zwei neue Bearbeitungen der Theorie der algebraischen Functionen, deren eine von E. Bertini (Annali di Mat. ser. 2. XXII. 1894) im wesentlichen die algebraische Theorie von Brill-Noether nach demjenigen Gange wiedergiebt, der auch in unserem Bericht eingeschlagen wird, während die andere von C. Segre (ibid.) sich das Ziel steckt, die Sätze über die Punktgruppen einer algebraischen Curve mit den Beweismitteln der Geometrie der höheren Räume und, für den Fundamentalsatz, mit denen der abzählenden Geometrie zu begründen. Insbesondere die letztere Arbeit, welche auf Grund von Untersuchungen von Segre und Castelnuovo (seit etwa 1887) die Theorie in neuer Weise entwickelt, hätte eine eingehende Besprechung

verlangt, die uns jedoch in dem vorgerückten Stadium unseres Berichtes nicht möglich gewesen ist. Wir bemerken nur, dass man in den beiden Arbeiten zerstreut die von uns nicht besprochene Litteratur über die neuesten Fortschritte der italienischen Geometer auf dem Gebiete der Curventheorie zum grösseren Teile angeführt findet.

Der Bericht über die zeitgenössische Production war erschwert durch den Umstand, dass wir, als Mitvertreter einer der besprochenen Richtungen, in gewissem Sinne Partei sind. So sehr wir uns auch einer objectiven Darstellung befleissigt haben, so werden wir doch dem Vorwurfe der Einseitigkeit kaum entgehen. Indessen ist zu bedenken, dass der Mitarbeiter mit den treibenden Ideen und den Zielen eines Wissenszweiges länger und genauer vertraut ist, als derjenige, der sich einem Gebiete zum Zwecke der Berichterstattung erst von aussen naht. Und wenn mehr oder weniger ein Jeder je nach Neigung und Anlage Partei ist, so fordert gerade die Theorie der algebraischen Functionen, die seit Descartes sich in stetem Wechsel der Förderung bald von Seiten der algebraischen bald der transcendenten Functionenlehre zu erfreuen hatte, mehr wie andere zur Parteinahme heraus. Auch in dieser Hinsicht bilden die vor kurzem in lithographirten Heften herausgegebenen Vorlesungen von Klein über Riemann'sche Flächen (math. Seminar der Univers. Göttingen, 1892) eine willkommene Ergänzung zu unserer Arbeit, auf die hinzuweisen wir nicht unterlassen wollen. Klein skizzirt in diesen Vorlesungen eine Theorie der algebraischen Functionen auf Grundlage seiner Auffassung der transcendenten Riemann'schen Theorie und nimmt Gelegenheit, in historischen Excursen die modernen Theorien kritisch zu besprechen und auf Vorschläge zu neuen Fragestellungen einzugehen. Haben diese Vorlesungen in den Zielen manches mit unserer Arbeit gemeinsam, so unterscheiden sie sich doch von ihr einerseits hinsichtlich der Behandlung, indem Klein die fremden Gedankengänge im Sinne seiner eigenen Auffassung bearbeitet, andererseits in Bezug auf den Stoff, da Klein sich darauf beschränkt, Einzelnes herauszuheben. Unter anderem enthält die Vorlesung ein eingehendes Referat über die arithmetischen Theorien von Kronecker und Dedekind-Weber — ein Grund mehr für uns, diese Richtung nicht gleichfalls zu bearbeiten.

Uebrigens bietet auch in unserer Darstellung der historische Teil, wie umfangreich er auch erscheint, nur das Mittel, um die Eigentümlichkeiten der Einzeltheorien, ihre wechselseitige Einwirkung und ihre Bedeutung als Glieder eines Ganzen richtig erfassen und bezeichnen zu können. Nur suchten wir zu vermeiden, da einen Zusammenhang zu

construiren, wo ein solcher nicht von selbst sich darbot. Denn wir glaubten, dass unser Ziel nur durch objectives Erfassen und Darstellen der Quellen zu erreichen ist. Wir wollen durch unsere Arbeit nur vorerst ein Programm ausgeben und einen Rahmen herstellen für spätere genauere Ausführungen hinsichtlich der einzelnen Wissenszweige oder Zeiträume, indem wir zugleich einen ersten Schritt in einer Richtung versuchen, in der sich auch auf anderen Gebieten bis jetzt erst Wenige bewegt haben. Zwar besitzt die mathematische Litteratur über Teilgebiete und Einzelfragen eine Anzahl von hervorragenden und selbst klassischen historischen Essays, die, meist an eine neue Auffassung eines Wissenszweiges anschliessend, in Vorreden oder Excursen über dessen Entwicklung berichten. Sie besitzt Lehrbücher, die in Noten wertvolle historische Nachweise erbringen. Aber es giebt nur wenige Schriften, für welche, wie für die vorliegende, die Berichterstattung über einen weit zurückreichenden Wissenszweig Selbstzweck ist, und welche die Beziehungen des älteren zu dem heutigen Stande, die Entwicklung im Ganzen zu untersuchen sich vornehmen. Zusammenfassende Berichte dieser Art werden dazu dienen, den Boden zu ebnen nicht nur für eine allgemeine Geschichte der Mathematik, wie sie für die ältere Zeit das vorzügliche Cantor'sche Werk darstellt; sie müssen auch die Grundlage abgeben für jene Referate über die moderne Production, denen sich Zeitschriften, wie die Jahrbücher über die Fortschritte der Mathematik u. A. in so dankenswerter Weise widmen.

Hinsichtlich der Anordnung des Stoffes haben wir die zeitliche Reihenfolge und im wesentlichen die Gruppirung nach Autoren festgehalten, wenn sich auch manche Gründe für die Anordnung nach dem Gegenstande geltend machten. Indessen ist in dem von uns behandelten Gebiet, zumal für die ältere Periode, die stoffliche Verschiedenheit nicht so gross, dass eine Zerlegung nach Wissensgebieten, die wiederholt auf dieselben Zeiträume und ihre eigentümlichen Anschauungen zurückzugreifen gezwungen hätte, zweckmässiger gewesen wäre. Die Anordnung nach Autoren gewährt auch den Vorteil, dass sich die mit gleichen Mitteln arbeitenden oder dieselben Ziele verfolgenden Verfasser zu bestimmten Richtungen der Forschung gruppiren und zusammenfassend besprechen lassen. Durch wechselseitige Hinweise haben wir die Verbindung zwischen den einzelnen Wissenszweigen herzustellen gesucht.

Nur einige wenige Gegenstände, die mit dem Hauptzuge der Theorie in entfernterem Zusammenhang stehen, wie die Lehren von den singulären Stellen eines algebraischen Gebildes, von den Wurzelfunctionen und von den algebraischen Correspondenzen, werden, um nicht durch ihre ausgedehnte

Besprechung den Faden zu unterbrechen, in besonderen Abschnitten behandelt.

Dem folgenden Inhaltsverzeichnis mögen einige orientirende Bemerkungen vorangeschickt werden.

Das Referat zerfällt in zehn Abschnitte, von denen vier die Zeit bis Riemann einschliesslich, drei die Zeit nach Riemann und drei besondere Gebiete behandeln.

Um den Ueberblick zu erleichtern, haben wir den Inhalt der einzelnen Nummern auf beigefügten Randtiteln angezeigt. Durch diese Anordnung hat die Verlagshandlung, die auch sonst sich stets sehr entgegenkommend erwiesen, in dankenswerter Weise unseren Wünschen entsprochen.

Aus der älteren Zeit werden, wie schon gesagt, in Betracht gezogen nur die Entwicklung des Functionsbegriffs, die Theorie der Elimination und die der Potenzreihen; Algebra im engeren Sinne haben wir ausgeschlossen.

Der Begriff der algebraischen Function findet sich — wenigstens inhaltlich — zuerst bei Newton entwickelt, dessen Begründungsweise der Infinitesimalrechnung überhaupt wesentlich an seine Darstellung impliciter algebraischer Functionen durch Reihen anknüpft. Von seinen Nachfolgern auf dem Gebiete der Geometrie haben wir u. A. De Gua ausführlicher gewürdigt, dessen „Usage de l'Analyse" den Inhalt von Cramer's „Introduction à l'Analyse" zum grossen Teile vorweg nimmt.

Um die Wende des vorigen Jahrhunderts machte sich, namentlich in den Arbeiten von Lagrange und Gauss, eine Reaction gegen die laxe Schlussweise geltend, die im Drange der grossen Productionslust aufgekommen war. Indem dann Cauchy die grundlegenden Begriffe der Grössenlehre einer scharfen Prüfung unterzog und zugleich dem Imaginären eine legitime Grundlage gab, begründete er die Functionentheorie in ihrer heutigen Gestalt. Wir besprechen den Einfluss, welchen die Aufgabe, den Convergenzbereich für die Lagrange'sche Reihe zu bestimmen, auf Cauchy's Untersuchungen über Potenzreihen hatte, und erörtern das Verhältnis seiner Arbeiten über Doppelintegrale zu dem dritten Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra von Gauss. Auch die Umstände, die Cauchy verhindert haben, auf die ihm so nahe liegenden Untersuchungen über algebraische Functionen einzugehen, welche später Puiseux aufnahm, besprechen wir näher, als Cauchy's Biograph dies gethan hat.

Von der expliciten Darstellung losgelöst definirt die algebraische

Function zum ersten Mal Abel. Die Wurzeln des Abel'schen Theorems gehen nicht, wie man aus den Citaten Abel's schliessen könnte, auf Legendre, sondern direct auf Euler zurück, wie dies eine Vergleichung der Gedankengänge beider Autoren fast zur Evidenz zeigt. Die Untersuchungen Abel's über elliptische Functionen, diejenigen von Jacobi über elliptische und Abel'sche Transcendenten, sowie die von Goepel, Rosenhain u. A. bewegen sich nur mit Vorsicht auf imaginärem Gebiet; erst Weierstrass lässt die Beschränkung auf das reelle Gebiet fallen. Dennoch sind die Arbeiten dieser Forscher für die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen nicht minder wichtig gewesen, wie die Untersuchungen von Lagrange und Cauchy zur allgemeinen Functionentheorie. Die Fäden beider Gruppen schiessen bei Riemann zu dem kühnen und grossartigen Entwurf seiner Theorie der Abel'schen Functionen zusammen, wo sie sich mit dem vereinigen, was Riemann aus der Potentialtheorie herübernimmt.

Die Riemann'sche Theorie der „Wurzelfunctionen", die den Inhalt einer Vorlesung im Sommersemester 1862 bildet, steht bereits unter dem Einflusse der von Plücker, Jacobi und Hesse eingeleiteten Richtung, die mit Clebsch's Eingreifen in die Theorie der Abel'schen Functionen seit 1863 die geometrisch-algebraische Behandlung veranlasste. Von dem ursprünglich projectiven Standpunkt erhebt sie sich bei Clebsch bis zu dem des gemeinsamen Werkes Clebsch-Gordan. Ueber unsere auf diesem Boden erwachsene gemeinsame Arbeit (Math. Ann. VII), welche die erste explicite Theorie der algebraischen Functionen enthält, haben wir in demselben Sinne wie über die anderen objectiv zu berichten versucht, indem wir sie nach Entstehung und Inhalt mit Riemann und Clebsch-Gordan, sowie hinsichtlich der bei eindeutiger Transformation invarianten Begriffsbildungen mit späteren Autoren vergleichen.

Eingehend besprechen wir die algebraischen Teile der Vorlesungen von Weierstrass und ihre historischen und methodischen Beziehungen zu Kronecker's Theorie der „ganzen" algebraischen Functionen, über die wir vorher bei Gelegenheit der „singulären Punkte" nach dessen Discriminanten-Aufsatz referirt haben.

Es ergaben sich dabei bemerkenswerte innere Zusammenhänge zwischen der Theorie von Weierstrass und den übrigen Theorien und zwischen diesen letzteren selbst. Der Umstand, dass in dem Weierstrass'schen Ausdruck $H(xy: x'y')$ die beiden Variabelnpaare eine wesentlich verschiedene Rolle spielen, liess sich zurückführen auf den invariantentheoretischen Unter-

schied der Begriffe „Function“ und „Form“. Das gemeinsame Band, welches alle Theorien umschlingt, erkennen wir — wie verschieden auch die Form ist, die er annimmt — in dem Cauchy'schen „Residuensatz“.

Eine nähere Besprechung widmen wir ferner den mannigfach verschiedenen Theorien der singulären Stellen eines algebraischen Gebildes, insofern sie bei rationaler Transformation in Betracht kommen. Lassen sich doch die Theorien der algebraischen Functionen geradezu nach ihrem Verhältnis zu den Factoren der Discriminante anordnen.

Unter dem Titel „Darstellung des Gebildes in invarianter Gestalt“ referiren wir einmal über die allgemeinen Fortschritte, welche die Theorie der algebraischen Functionen seit 1876 (insbesondere durch eine Abhandlung von Weber) gemacht hat, sodann über die kanonischen Formen, die einigen Theorien zu Grunde gelegt sind, namentlich über eine bis jetzt noch wenig gewürdigte Untersuchung von Christoffel und über F. Klein's kanonische „Riemann'sche Fläche“. Das Referat über „Wurzelfunctionen“ („Abel“'sche Functionen im engeren Sinne) und die Theorie der Berührungscurven einer Grundcurve hat einen vielleicht unverhältnismässig grossen Umfang angenommen, nicht bloss wegen der Bedeutung dieser den Functionen der „Klasse“ nächststehenden Bildungen, welche die Riemann'schen Ideen besonders klar hervortreten lassen, für Geometrie und Functionentheorie, sondern weil die weitverzweigte Litteratur über Thetafunctionen gleichfalls heranzuziehen war, mit der sie nur im Zusammenhang behandelt werden konnten, und weil mancherlei historische Irrtümer, die sich in die neuere Production eingeschlichen hatten, nur durch eingehende Darstellung des Sachverhalts richtig gestellt werden konnten.

In dem Referat über Correspondenzen endlich berücksichtigen wir sowohl die algebraische wie die transcendente Auffassung, indem wir jedoch bezüglich der Anwendungen uns auf die für die Theorie der algebraischen Functionen nicht unwichtige Abzählung der Special- und der „ausgezeichneten“ Punktgruppen beschränken.

Das hiermit skizzirte Arbeitsfeld haben die Verfasser der Hauptsache nach zeitlich unter sich geteilt. Der Bericht über die ältere Zeit, bis Riemann einschliesslich, sowie der abgesonderte über die Correspondenztheorie rührt von Brill her; der über die neueren Theorien, mit der Besprechung der geometrisch-algebraischen Richtung beginnend, sowie die Sonderberichte über singuläre Punkte und über Wurzelfunctionen sind von Noether bearbeitet worden.

Indessen sind die Verfasser sowohl bei der Vorbereitung wie bei

der Ausführung des Planes in stetem Austausch geblieben und erklären sich für den Inhalt des Werkes in Gemeinschaft verantwortlich.

Im Verlauf unserer Studien hat sich bei uns die Ueberzeugung befestigt, dass eine Geschichte der neueren Mathematik, wenn sie auf die inneren Zusammenhänge eingehen will, in die Geschichte einzelner Disciplinen aufgelöst werden muss, welche andererseits nicht allzu kleine Zeiträume umfasst. Wenn diese Ansicht in weiteren Kreisen Geltung gewinnt, so werden wir Nachfolger finden, welche durch Einzeldarstellungen innerhalb des von uns skizzirten Gebietes oder durch Bearbeitung von Nachbarbezirken das begonnene Werk fortsetzen und, indem sie die Fäden hervorheben, die verschiedene Zeiten und Wissensgebiete verknüpfen, dazu beitragen — wie wir dies zu thun wünschen —, das Bewusstsein von der Einheit der Wissenschaft zu stärken, die Kenntnis des bereits Geleisteten der heutigen Production zu vermitteln und das Bild bedeutender Männer und ihrer Thätigkeit in dem Gedächtnis der jüngeren Generation frisch zu erhalten.

Tübingen und Erlangen, im Mai 1894.

Inhaltsverzeichnis.

II. Abschnitt.

Periode der Begründung einer Theorie der Functionen: Lagrange, Gauss, Cauchy, Puiseux.

III. Abschnitt.

IV. Abschnitt.

Seite

V. Abschnitt.

VI. Abschnitt.

VII. Abschnitt.

VIII. Abschnitt.

IX. Abschnitt.

X. Abschnitt.

Algebraische Correspondenzen und ausgezeichnete Gruppen.



Einleitung: Der Begriff Function in der älteren Mathematik.

1. Die Vorstellung von der gesetzmässigen Abhängigkeit einer Grösse von einer anderen ist so alt, wie die Mathematik selbst. Denn indem der Mathematiker sich mit Grössen- und Lage-Beziehungen beschäftigt, erforscht er dasjenige Verhältnis gegenseitiger Abhängigkeit, das man mit dem Namen Function bezeichnet. Ein wesentliches Attribut dieses Begriffs ist die stetige Veränderlichkeit einer Grösse mit der anderen, von der sie abhängt. Sie tritt zunächst bei geometrischen Beziehungen zu Tage.

Geometrie.

Obgleich die griechischen Geometer in den Objecten ihrer Sätze und Beweise unveränderliche Grössen sahen, so war ihnen doch die Möglichkeit einer simultanen Veränderung der verknüpften Gebilde geläufig. In den Diorismen, durch die sie den Umfang bestimmen, innerhalb dessen die Lösung einer geometrischen Aufgabe möglich oder zulässig ist, wird die Figur in gewissen Grenzen als variabel gedacht. Noch deutlicher tritt in dem „geometrischen Ort" der flüssige Zustand der Abhängigkeit zu Tage. Es ist bekannt — schon Descartes knüpft im zweiten Buche seiner Géométrie an diesen Umstand an, und neuerdings hat ihn Zeuthen*) zum Gegenstand eingehender Studien gemacht —, dass Apollonius bereits über den Begriff der Coordinaten verfügt. Er stellt in geometrischer Ausdrucksweise, die ihm die heutige Zeichensprache der Algebra ersetzt, die Gleichung der Kegelschnitte in recht- und schiefwinkligen Coordinaten auf, verfügt frei über die Hülfsmittel der Transformation, operirt überall mit stetig und zugleich

*) Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, Denkschr. d. Kopenhag. Akad. 1885, deutsch von Fischer-Benzon, Kopenhagen 1886.

sich ändernden Grössen, mit Functionen. Wo sich Gelegenheit bietet, weicht Apollonius auch Fragen nicht aus, die, wie die nach den Tangenten einer Curve, den Normalen von einem Punkt aus, gerade an die Veränderlichkeit der verbundenen Grössen anknüpfen und so den Uebergang zur heutigen Differentialrechnung bilden*). Man findet ferner einen anderen, mit dem der Function in inniger Beziehung stehenden Begriff, den des „Grenzwertes", in der Exhaustionsmethode des Archimedes ausgebildet, durch die dieser mittelst der einem Kreis, einer Parabel einbeschriebenen Polygone, unter fortgesetzter Verdopplung der Seitenzahl, den Flächeninhalt, Schwerpunkt u. s. w. bestimmt.

Wiewohl sich hiernach in den Schriften der Alten alle Elemente vorfinden, aus denen sich die erwähnten abstracten Begriffsbildungen zusammensetzen liessen, wiewohl sie sogar in ihren Methoden immerfort angewandt werden, findet man sie explicite doch nirgends formulirt. Die Gründe für diese und ähnliche Erscheinungen werden von dem genannten Kenner der griechischen Mathematik in dem Schlusskapitel seines Werkes dargelegt. Zeuthen erklärt den plötzlichen Abbruch in der blühenden Entwicklung, welche jene Wissenschaft noch im dritten Jahrhundert vor Christi Geburt aufwies, aus der Art der Ueberlieferung des Erworbenen, die meist nur in der mündlichen Lehre bestand, also in hohem Grade von Zufälligkeiten abhängig und so den Störungen nicht gewachsen war, die der bald eintretende Verfall des politischen Lebens mit sich brachte. Grenzen steckte den Griechen auch ihre ausgeprägte Eigenart. Bei dem Bedürfnis strenger Beweisführung hinderte sie die Scheu, mit irrationalen Grössen anders als in geometrischer Einkleidung zu operiren, an der Ausbildung einer expediten algebraischen Zeichensprache — zu der sich übrigens Ansätze bei Heron und Diophant vorfinden**) —, für die sie nur einen schwerfälligen Ersatz in gewissen geometrischen Operationen und Sätzen besassen. Diese theoretischen Bedenken wuchsen in der Zeit des Verfalls zu einer Starrheit aus, die nicht nur jede Wechselbeziehung zum gewöhnlichen Leben verschmähte, sondern befruchtende organische Neubildungen überhaupt nicht mehr aufkommen liess. So kam es, dass die Alten auf dem Standpunkt stehen blieben, wo noch das Interesse am Gegenstand dasjenige an dem Verfahren, durch welches man

---

*) Vgl. die zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse Zeuthen's in dessen Note: Sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité et sur l'invention de cet instrument, Kopenhag. Akad. Berichte 1888.

**) Cantor, Geschichte der Mathematik I, 2. Aufl. S. 376, S. 442.

ihn beherrscht. überwiegt. Das Bedürfnis der Verallgemeinerung, das die ganze moderne Mathematik durchzieht, hat sich bei ihnen noch nicht entwickelt. Deshalb gehen ihnen jene beherrschenden Begriffsbildungen und jene allgemeinen Principien ab, die Chasles*) und Zeuthen**) bei ihnen vermissen, und die den Grundzug der heutigen Wissenschaft überhaupt bilden.

Algebra und Buchstabenrechnung.

2. Erst das Zeitalter des Wiederauflebens von Kunst und Wissenschaft im Abendland hat das erlösende Wort auch für die mathematischen Wissenschaften gesprochen. Schon Inder und Araber waren durch das Bedürfnis, die Lösung einer Gleichung vom zweiten und gewisser solcher von höherem Grad in geschlossener Form darzustellen, veranlasst worden, nicht nur Potenzen sondern auch Wurzeln von Grössen, abgelöst von irgend einer geometrischen Bedeutung, wie Zahlen zu behandeln, indem sie für solche Operationen an der Unbekannten ebenso wie für sie selbst besondere Zeichen einführten***). Wie diese Begriffe und Bezeichnungen in das Abendland übergingen, die Benennung der Unbekannten als „cosa" einer ganzen Schule von Algebraikern den Namen „Cossisten" eintrug, welche Gestalt jene Zeichen annahmen, wie durch ihre Verwendung bei der Auflösung der Gleichungen dritten Grades Cardano, Tartaglia, u. A. den Begriff der irrationalen Function vorbereiteten, dies Alles ist in dem Werk über Geschichte der Mathematik von M. Cantor****) ausführlich dargelegt, und es mag gestattet sein, auf dieses gründliche und umfassende Werk wegen der älteren Spuren des Functionsbegriffes überhaupt hier Bezug zu nehmen. Einen entscheidenden Schritt in der Ausbildung desselben that Vieta, der in seinem Werk: In artem analyticam Isagoge, 1591, dem Zuge der Zeit nach Verallgemeinerung folgend, zu der logistica numerosa, der Arithmetik, die logistica speciosa, die Buchstabenrechnung, hinzu erfand, indem er Gleichungen behandelt, die nicht, wie bei seinen Vorgängern, den Cossisten, bloss die Unbekannte, sondern auch die Coefficienten in der Form unbestimmter Grössen enthielten. Wenn dabei Vieta, um diesen Buchstaben (species, utpote alphabetica elementa) die Eigenschaften extensiver Grössen und damit die Vorzüge der geometrischen Auffassung zu sichern, sie als Längen, Flächen u. s. w. deutet,

---

*) Chasles, Aperçu historique etc. Bruxelles 1837.

**) Zeuthen, Kegelschnitte u. s. w. 9. Abschn. a. E. (S. 201).

***) Hankel, Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter, Leipz. 1874, S. 193, 265.

****) Bis jetzt ist erschienen Bd. I, 2. Aufl. 1894; Bd. II 1892; Bd. III 1. Abtlg. 1894; Leipzig.

und deshalb nur homogene Gleichungen in Betracht zieht, so hob schon Descartes durch seine Einführung der Einheit als geometrische Massgrösse diese Beschränkung auf. Immerhin wurde durch die Zeichensprache Vieta's das Auge des Mathematikers an die Vereinigung mehrerer unbestimmter Grössen zu einer algebraischen Gleichung gewöhnt, und der Weg war nicht mehr weit bis zu dem Entschluss, den Coefficienten veränderliche Werte beizulegen und Wurzeln in ihrem Abhängigkeitsverhältnis gegenüber diesen zu untersuchen. Zunächst behandelt die umgekehrte Frage Albert Girard in seiner „Invention nouvelle en l'algèbre" (Amsterdam 1629; Neue Ausg. von Bierens de Haan, Leyden 1884), indem er, unter Zulassung auch negativer und imaginärer Wurzeln (Blatt 22, XII. défin., II. théor.), die Coefficienten der allgemeinen Gleichung durch die Wurzeln darstellt. — Der Begriff der impliciten algebraischen Function aber hat sich erst an der Gleichung der Curve entwickelt, der „aequatio speciosa", wie Newton sie genannt hat, einer algebraischen Gleichung, deren Coefficienten von einer Veränderlichen abhängen. Sie bedeutet die Beschränkung des Abhängigkeitsverhältnisses auf zwei Grössen, und damit den Uebergang zu einer neuen Fragestellung. Dass der Gedanke nicht ferne lag, die Buchstabenrechnung des Vieta auf die geometrischen Oerter der Griechen und die Coordinatenbeziehungen des Apollonius anzuwenden, ergiebt sich daraus, dass zwei congeniale Mathematiker sich um die Ehre streiten, Erfinder der „analytischen Geometrie" zu sein. Wegen des Anteils, den Descartes und Fermat an der Begründung dieses Wissenszweiges haben, vergleiche man die Darstellung in Cantor's Geschichte der Mathematik und die Bemerkungen von Zeuthen in der oben (S. 110) erwähnten Note. Für die Entwicklung des Functionsbegriffs kommt, teils wegen der allgemeinen Gesichtspunkte, die es enthält, teils weil es höhere algebraische Curven behandelt, vornehmlich das Werk „la Géométrie" von Descartes in Betracht, von dem wir nun zu sprechen haben.

I. Abschnitt.

Anfänge einer Theorie der algebraischen Curven und der Elimination: Von Descartes bis Euler und Bézout.

A. René Descartes [1637].*)

1) Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher les vérités dans les sciences, plus la Dioptrique, les météores et la Géométrie. 1 vol. 4° Leyden 1637. Einzel-Ausg. der Géométrie. Paris 1886. 91 SS. Deutsche Ausg. von L. Schlesinger. Berlin 1894.

1. Der Schrift „La Géométrie“ liegt ein Verfahren zu Grunde, nach welchem sich algebraische Ausdrücke durch Strecken darstellen lassen. Nimmt man nämlich eine Länge als Masseinheit an, und deutet die unbestimmten Grössen oder Zahlen, aus denen ein Ausdruck sich zusammensetzt, ebenfalls als Längen, so lassen sich die arithmetischen Elementaroperationen an denselben, Potenziren und Quadratwurzelziehen eingeschlossen, durch solche ebene Constructionen ersetzen, die wieder zu Längen führen, und hierdurch in den Schutz der strengen Grössenlehre des fünften Buches von Euklid stellen.**) Umgekehrt werden Beziehungen zwischen Strecken, Flächen, körperlichen Inhalten, zwischen Producten, Quotienten, u. s. w. von Strecken durch Anwendung der

*) Die Jahrzahlen der Ueberschriften deuten den Zeitraum an, in dem der genannte Autor über den zu besprechenden Gegenstand sich öffentlich (in älteren Zeiten auch brieflich) geäussert hat.

**) Wie sehr das Bestreben, die Grössenoperationen der Algebra (Buchstabenrechnung) der Geometrie der Alten zugänglich und dadurch der Vorzüge ihrer strengen Beweise teilhaftig zu machen, im Bedürfnis jener Zeit lag, hat in anschaulicher Weise Herr Zeuthen in dem Schlusskapitel seiner erwähnten „Lehre von den Kegelschnitten im Altertum“ auseinandergesetzt.

Bezeichnungen der Arithmetik in algebraische Form gebracht, wobei zugleich der Begriff der stetigen Veränderlichkeit von einander abhängiger Grössen aus der Geometrie in die Algebra übergeht.

Indem auf diese Weise Descartes jedes Abhängigkeitsverhältnis zwischen extensiven Grössen, namentlich auch zwischen unbestimmten, in die Form von Gleichungen bringt, eröffnet er den Weg zu einer neuen Art von Problemen: zur Darstellung und Discussion der geometrischen Oerter mit Hülfe von Gleichungen zwischen Veränderlichen, welche alle Eigenschaften dieser Oerter in sich einschliessen, und verbindet so zwei bis dahin getrennte Wissenszweige: Analysis und Geometrie (Vorrede zu de l'Hospital, Analyse des infiniment petits, Paris 1696).

Durch die algebraische Darstellung geometrischer Oerter wird die Kluft überbrückt, die für die Griechen noch zwischen Kreis und gerader Linie einerseits (den „geometrischen" Linien) und zwischen Kegelschnitten und den höheren („mechanischen") Curven andererseits bestand ((1) livre II, Einleitung); es ist eine Theorie der allgemeinen algebraischen Curven angebahnt. Descartes nennt dieselben „geometrische Curven", während er die Bezeichnung „mechanische" auf diejenigen beschränkt, die wir heute mit Leibniz transcendent nennen. Er teilt die erstgenannten in „Geschlechter" (genres) ein, wobei er je zwei auf einander folgende Ordnungen ($2n+1$ und $2n+2$) zu einem Geschlecht vereinigt: eine Einteilung, die später Newton durch die jetzt übliche nach der Ordnung (der Dimension der Gleichung) ersetzt hat.

Ueberhaupt handelt die „Geometrie" nur von algebraischen Curven, von denen die Kegelschnitte und die bekannten (Cartesischen) Ovale nebst Normalenconstructionen (hierbei die Descartes'sche Regel von den unbestimmten Coefficienten) den Inhalt des zweiten Buches bilden, sowie von den Durchschnittspunkten algebraischer Curven, deren Aufsuchung Descartes (im dritten Buch) nach dem Vorgang der Alten mit der Theorie der algebraischen Gleichungen in Verbindung setzt. Abgesehen von den dieser Theorie gewidmeten Kapiteln, lässt sich das Ziel des ganzen dritten Buches denn auch dahin charakterisiren, dass Descartes den Weg zu zeigen wünscht, wie man „Probleme" — er versteht darunter höhere algebraische Gleichungen — durch den Schnitt von Curven möglichst niedriger Ordnung löst.*)

Da sich die allgemeinen Gleichungen von höherem als dem vierten

*) Noch Newton äussert (Enumeratio lin. 3. ord. Cap. VIII) die Ansicht: Curvarum usus in Geometria est, ut per earum intersectiones problemata solvantur.

Grad nicht mehr auf den Schnitt von Kreisen mit Kegelschnitten zurückführen lassen (drittes Buch, gegen Ende), so reducirt er diejenigen des sechsten Grades auf die Aufgabe, die Abscissen der gemeinsamen Punkte eines Kreises und einer gewissen Curve dritter Ordnung zu bestimmen, die er als einen geometrischen Ort definirt. Für die Veränderlichen verwendet Descartes — um auch von Aeusserlichkeiten zu sprechen, die sich als folgenreich erwiesen haben — die letzten Buchstaben des Alphabets, eine Bezeichnung, die sich trotz des Widerspruches von Fermat, der die Vieta'sche durch die Vocale vorzog, eingebürgert hat. Auf Descartes geht auch die Unterscheidung der Potenzen durch Zahlenexponenten zurück, eine Bezeichnung, die Wallis und Newton auf die von Wurzeln durch gebrochene Exponenten ausdehnten, und die so zur Conception des Binomialtheorems hinleitete, wie Laplace im Eingang seiner Théorie analytique des probabilités (Paris 1812) ausführt. Auch die Einführung der Exponentialgrössen als einer neuen Functionengattung durch Leibniz war eine Folge dieser scheinbar unerheblichen abkürzenden Bezeichnungsweise Descartes'.



2. Chasles bezeichnet die Lehre des Descartes als eine „proles sine matre creata". Man könnte an diesem Ausdruck unbedingter Bewunderung Anstoss nehmen, wenn man mit dem Inhalt des Werkes die Ansprüche vergleicht, die auf die Erfindung der Coordinatenmethode Zeuthen für Apollonius und seine Vorgänger reclamirt, und die auf deren principielle Anwendung Fermat erhebt, der zuerst in systematischer Weise die Gleichungen ersten und zweiten Grades discutirt hat; wenn man ferner hinsichtlich der Sätze über algebraische Gleichungen die scharfen Aeusserungen von Wallis und später von Leibniz bezüglich der Priorität Harriot's in Betracht zieht. Indessen abgesehen davon, dass bei den Letzteren jedenfalls der Umstand mitsprach, dass Descartes, der überhaupt keinen seiner nächsten Vorgänger zu nennen für gut fand, durch seine provocirende Schreibart den Widerspruch der Zeitgenossen hervorrief: das eine lässt sich nicht in Abrede stellen, dass Descartes den Begriff der höheren algebraischen Curven und damit für unsere Theorie den Ausgangspunkt geschaffen hat. Auch Leibniz erkennt ausdrücklich an (de ortu ... algebrae etc. Leibniz math. Schr. her. von Gerhardt, Halle 1863 Bd 7 S. 213), dass „Cartesius zuerst die Curven höherer Grade durch Gleichungen ausgedrückt hat, indem er sich von den Vorurteilen der Alten frei machte, die noch Vieta umfingen, wenn er solche Constructionen, die mit Hülfe dieser Curven sich vollziehen [z. B. von Wurzeln höherer Gleichungen], als nichtgeometrisch bei Seite liess".

Auf Descartes geht die Sonderung von algebraischen und transcendenten Curven zurück. Wenn ihn Leibniz darum tadelt, dass er die letzteren aus seiner Geometrie ausschliesst (l. c.), so scheint der heutige Stand der Wissenschaft die Selbstbeschränkung von Descartes eher zu rechtfertigen, als zu widerlegen. Jedenfalls hat die Theorie der algebraischen Functionen von Descartes' Geometrie ihren Ausgang genommen; denn eben an die algebraische Gleichung zwischen zwei Coordinaten knüpft nun zunächst Newton an.

B. **Isaac Newton** [1669—1704]*).

Isaaci Newtoni Opera quae exstant omnia. comm. S. Horsley. Lond. 1779 —1785. 5 voll. 4°. T. 1 enthält u. A.:

(1) Arithmetica universalis, S. 1—229. (Vorlesungen in Cambridge, publ. 1707).
(2) Analysis per aequationes numero terminorum infinitas. S. 257—282 (verfasst vor 1669, publ. 1711).
(3) Excerpta quaedam ex epistolis Newtoni. S. 285—329.
(4) Geometria analytica sive specimina artis analyticae, S. 391—518, von Bischof Horsley aus drei Manuscripten zusammengestellt 1779.
(4a) In der Ausgabe: Isaaci Newtoni Opuscula, coll. J. Castillioneus, Laus. et Gen. 1744, 2 Voll. T. 1. ist die Geometria analytica des Horsley, dem Text nach verschieden, aber inhaltlich übereinstimmend, als „Methodus fluxionum et serierum infinitarum" aufgeführt in der Gestalt, in welcher diese Abhandlung zuerst von Colson 1736 publicirt worden ist. Als Zeit der Abfassung giebt der Biograph Newton's, Brewster, in: The life of Sir I. Newton, Lond. 1831. 2. Auflage unter dem Titel: Memoirs of the life, writings and discoveries of Sir I. Newton, 2 voll. 1860, aus welcher auch die übrigen Daten oben entnommen sind, das Jahr 1670 an (T. I, pp. 62. 346. 349).
(5) Enumeratio linearum tertii ordinis, S. 531—560. publ. 1704.

Newton's Vorgänger auf dem Gebiete der Darstellung irrationaler Functionen.

3. Durch die Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades waren die Mathematiker mit dem Begriffe der irrationalen Function in der Form des Abhängigkeitsverhältnisses einer Wurzel von den Coefficienten der Gleichung vertraut gemacht worden, und die von Stifel, Bombelli, Vieta u. A. in die Algebra eingeführte Zeichensprache diente zur Darstellung dieser Function.

Aber erst Newton erfasste den Begriff einer algebraischen Function — ohne ihn übrigens explicite zu formuliren — inhaltlich dadurch, dass er zeigte, wie man eine Wurzel einer algebraischen Gleichung, deren

---

*) Siehe die Note zu A.

Coefficienten rationale Functionen einer Veränderlichen sind, durch Reihen nach auf- oder absteigenden Potenzen dieser Grösse darstellt. Das Verfahren, nach welchem dies geschieht, findet man ausführlich in der Geometria analytica (Methodus fluxionum (4). (4ª) der Litteraturangabe) auseinandergesetzt, es ist teilweise mit denselben Worten auch in dem zweiten Brief an Oldenburg (indirect an Leibniz) vom 24. Oct. 1676 und in der Analysis per aequationes (2) besprochen. Der Zeitpunkt dieser folgenschweren Entdeckung fällt wohl zusammen mit der Abfassung der erwähnten Analysis, die Newton im Jahr 1669 seinem früheren Lehrer Barrow vorlegte. Nicolaus Mercator hatte 1668 die Quadratur der Hyperbel ausgeführt, indem er den Bruch $1/1+x$ nach aufsteigenden Potenzen von x in eine Reihe entwickelte*) und dann Glied für Glied integrirte, was nach bekannten Formeln geschehen konnte, da schon Wallis das Integral der nten Potenz für beliebige n auszuführen wusste (Arithmetica Infinitorum 1659). Dieser Vorgang scheint Newton, der schon vorher vermöge Wallis' Interpolationsmethode in den Besitz des Binomialtheorems gelangt war, auf die Entwicklung der Wurzeln von höheren, nicht reinen Gleichungen (aequationes affectae) geführt zu haben. Je nachdem die Coefficienten Zahlen sind oder noch eine unbestimmte Grösse (species indefinita) enthalten, schreiten die Reihen nach Potenzen von $1/10$ oder von x (bezw. $1/x$, $x-a$) fort. In der Einleitung zur Geometria analytica giebt Newton seine Auffassung des Problems mit beiläufig folgenden Worten:

Newton's Auffassung des Problems.

4. „Da die Rechenoperationen an Zahlen und Buchstaben die nämlichen sind, . . . so nimmt mich Wunder, dass die kürzlich erfundene Lehre von den Decimalbrüchen noch niemand auf unbestimmte Grössen (species) angewandt hat, zumal da man Grösseres damit erreichen kann. Ich nehme hiervon die Abhandlung des N. Mercator über die Quadratur der Hyperbel aus, aus der sich ersehen lässt, dass die elementaren Rechenoperationen von der Arithmetik auf die Algebra übertragbar sind, wenn man statt der absteigenden Potenzen von zehn die nach Dimensionen geordneten Potenzen der unbestimmten Grösse, bis ins Unendliche fortgesetzt, nimmt. Und wie der Vorteil der Decimalen darin besteht, dass alle Brüche und Wurzelgrössen, durch sie ausgedrückt, gewissermassen die Natur von ganzen Zahlen erhalten, so können mit Hülfe dieser Entwicklungen complicirte Ausdrücke in Bruchform, oder Wurzelgrössen, auch die Wurzeln nicht reiner Gleichungen, auf die Form von unendlichen Reihen ge-

*) Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen, Tübingen 1889. S. 17 ff.

bracht werden, deren Glieder einfache Zähler und Nenner haben, und die keine Schwierigkeit mehr bieten. Ich werde hier ein Verfahren angeben, nach welchem sich solche Entwicklungen auch in schwierigeren Fällen ausführen lassen, und dann diese Rechnung auf die Lösung gewisser Aufgaben anwenden."

Newton's Verfahren der Potenzentwicklung.

5. Nun entwickelt Newton nicht etwa eine Theorie, sondern er zeigt, nach dem Gebrauche jener Zeit, an wenigen Beispielen auf im ganzen 14 Buchseiten sein Verfahren, das, wie bekannt, im wesentlichen in einer successiven Verbesserung des eingeführten zunächst noch fehlerhaften Wurzelwertes besteht. Diejenigen Beispiele, die sich auf die Entwicklung der Wurzel einer höheren Gleichung nach Potenzen der unabhängigen Veränderlichen, welche in die Coefficienten eingeht, beziehen, leitet der Verfasser ein durch eine Darstellung seiner Auflösungsmethode für numerische Gleichungen. Wie es sich hier zunächst um einen Näherungswert („neglectis caeteris potestatibus ob parvitatem") der Wurzel handelt, so muss in dem Fall der aequationes speciosae" zuerst irgend ein numerisches Wertepaar für die zwei Veränderlichen gefunden werden, das die Gleichung befriedigt und die Stelle definirt, für welche eine Entwicklung hergestellt werden soll. In den meisten Beispielen ist dies der Ursprung des Coordinatensystems; in anderen wird durch die Transformation $z = x \pm a$, oder durch $z = 1/x$ die Stelle in den Ursprung verlegt (a. a. O. S. 404).

Das erste Glied.

6. Der Coefficient des ersten Gliedes der Entwicklung, des „quotiens", wird nun so bestimmt. Man bringe die Gleichung auf die Form: eine ganze Function der beiden Veränderlichen x, y gleich Null, und vernachlässige die Glieder höherer Dimension gegen das Aggregat der niedrigsten, das für sich gleich Null gesetzt wird, insofern „species indefinita x parva esse fingitur". Das geschieht, indem man (l. c. p. 398) „aus den Gliedern, in denen die Wurzel y nicht vorkommt, den hinsichtlich x niedrigsten Term beibehält, dazu den ebenso in y niedrigsten Term nimmt, also zwei Terme, für welche die Progression der Dimensionen beider Variabeln eine möglichst kleine ist (ut progressio dimensionum utriusque praefatae speciei a termino prius assumpto ad hunc terminum continuata quam maxime potest descendat) und dazu noch alle Terme, deren Dimensionen in der gleichen Progression auftreten, wenn man sie beliebig fortsetzt".

Um diese Auswahl zu erleichtern, führt Newton ein „Diagramm", das nach ihm genannte Parallelogramm ein, das ja auch noch heute eine klassische Bedeutung besitzt. Indessen diejenige Schwierigkeit, die man

jetzt durch dieses Hülfsmittel hebt, nämlich die Trennung verschiedener Entwicklungsgruppen, die einer singulären Stelle des algebraischen Gebildes angehören, macht Newton keine Sorge. Er spricht von ihr so wenig, wie von dem Umstand, dass allgemein zu irgend einem Werte von x so viele Entwicklungen von y gehören, als der Grad der Gleichung in y angiebt. Nur in einem Beispiele lässt er in die Entwicklung eine unbestimmte Wurzel derjenigen Gleichung eingehen, aus der sich das Anfangsglied bestimmt, indem er diese als „surda" (irrational) oder als inextricabilis (nicht ausziehbar) voraussetzt, sofern sie nur nicht „impossibilis" (imaginär) ist.

Uebrigens ist Newton's Bestreben nicht etwa darauf gerichtet, die Entwicklung in der Nähe eines bestimmten vorher ausgewählten Curvenpunktes zu erhalten. Er fasst die Ordinate der Curve als Wurzel einer Gleichung auf, die durch eine Reihe gelöst werden soll. Es ist ihm also überhaupt nur um irgend eine Entwicklung zu thun, und er bevorzugt diejenige, die infolge einer passend gewählten Ausgangsstelle ein rationales Anfangsglied eindeutig darbietet. Einen Ueberblick über die verschiedenen möglichen Entwicklungen zu geben beabsichtigt er keineswegs. Solche Abzählungen oder gar die Untersuchung singulärer Stellen, die dem allgemeinen Verfahren sich nicht unterordnen, liegen nicht im Geiste der Zeit, die Mühe genug hatte, durch die Fülle der Fragen, welche die neuen fruchtbaren Methoden aufgeworfen hatten, sich überhaupt nur hindurch zu finden.

Die imaginären Zweige.

7. Auch die imaginären Zweige der Curven waren für Newton und das ganze nächste Jahrhundert nicht vorhanden: den unbestimmten Coefficienten in einer Gleichung oder Reihenentwicklung imaginäre Werte zu erteilen, wagte man erst, nachdem Gauss und Cauchy dem Imaginären Bürgerrecht in der Analysis verliehen hatten. Für Newton war auch der Grad einer algebraischen Gleichung bloss eine obere Grenze für die Zahl der Wurzeln ((1) „De natura radicum", a. a. O. S. 167), wiewohl schon Girard (Invention nouvelle en l'Algèbre 1629, neue Ausgabe Leyden 1884) die heutige Auffassung vertreten hatte, dass die Zahl der Wurzeln einer Gleichung gleich ihrem Grade sei, sofern man nämlich drei Arten von Lösungen zulässt: positive, negative und „d'autres enveloppées (auch „impossibles"), comme celles, qui ont le $\sqrt{-1}$". Für Newton kommen jedoch Entwicklungen mit imaginären Coefficienten nicht in Betracht, vielmehr schliesst er an seine Theorie der Reihen alsbald die Probleme der Quadratur, Rectification u. s. w. der reellen Curvenzweige an.

Die höheren Glieder und die Convergenz.

8. Das zweite Glied der Reihe („subsequentes dimensiones“ oder „termini quotientis“) bestimmt Newton, ähnlich wie bei numerischen Gleichungen, durch Einführung einer neuen Grösse $y - Ax^n = p$ an Stelle von y, wenn Ax^n das erste Glied der Reihe für y ist, unter Wiederholung des Verfahrens an der Gleichung in p und x.

Die Frage der Convergenz der erhaltenen Reihe erörtert Newton mit den Worten: „Um zu erkennen, dass die gewonnenen Ausdrücke auf diese Weise dem Werte der Wurzel so nahe gebracht werden können, dass sie um weniger als eine gegebene Grösse von ihr verschieden sind, und ins Unendliche fortgesetzt, die Reihe sich von der Wurzel überhaupt nicht unterscheidet“. ((4) de reduct. affect. aequat. l. c. S. 405) — — so lehrt (dies ist der Sinn der folgenden Worte) das benutzte Rechenverfahren, dass je mehr Glieder der Reihe man nimmt, um so höher die Potenz des niedrigsten unter denjenigen Gliedern der Gleichung ist, die nach der Einsetzung sich nicht wegheben. Dazu kommt noch die Bemerkung:

„Ein Ende hat die Giltigkeit (radix terminatur) für denjenigen Wert der unabhängigen Veränderlichen, für den die Reihe einen unendlich grossen Wert erhält (quin magnitudo radicis in infinitum prosiliet, hoc est, fiet impossibilis) wie beispielsweise die Entwicklung von $y = \sqrt{ax - x^2}$ für $x = a$“ (l. c. S. 406). Newton hat also eine gewisse Vorstellung von der Rolle, welche für die Frage der Convergenz die Verzweigungspunkte spielen.

Ein zweites Verfahren für die Bestimmung der Exponenten der Potenzentwicklung.

9. In einem Briefe an Wallis 1676 (l. c., S. 292) giebt Newton für die Berechnung des ersten Reihengliedes noch eine andere Methode, und wendet sie sogleich auf gewöhnliche Differentialgleichungen „ubi duae fluentes quantitates una cum earum fluxionibus in aequatione comprehenduntur“ [selbstverständlich bei Newton in algebraischer Verbindung] an, deren Lösung er molestissimum et omnium difficillimum problema nennt (l. c. S. 423).

Newton erklärt diese Methode in folgender Weise:

Gegeben sei eine Gleichung zwischen y, z und dy/dz (in Newton's Schreibweise $\dot{y}$, oder vielmehr: $\dot{y}/\dot{z}$ für $\dot{z} = 1$). Ist, nachdem man sie auf die Form: eine ganze Function von y und $\dot{y}$ gleich Null, gebracht hat, der Term niedrigster Ordnung in z allein z^λ, und sind die anderen von der Form $z^\mu \cdot y^\alpha \cdot \dot{y}^\beta$, so bilde man für jeden dieser Terme den Bruch $\dfrac{\lambda - \mu + \beta}{\alpha + \beta}$. Ist ν die grösste dieser Zahlen, so ist z^ν der Exponent

des ersten Gliedes der Reihe $y = az^r + \cdots$, welche die Wurzel der Differentialgleichung (aequatio fluxionem radicis involvens) darstellt. Die Grösse a bestimmt Newton durch Coefficientenvergleichung, setzt dann $y = az^r + p$ und bildet die Gleichung zwischen z, p, $\dot{p}$, die ebenso behandelt wird, wie die gegebene. Von dem Eingehen einer willkürlichen Constanten ist nicht die Rede. Diese Methode lässt sich auch anwenden, wenn höhere Differentialquotienten (fluxiones secundae, tertiae . . .) auftreten. Newton wendet sie auf solche Fälle an, wo andere Methoden versagen. Selbstverständlich gilt sie aber auch, wenn die Fluxion fehlt, d. h. für endliche Gleichungen zwischen y und z, die hierdurch in der Behandlung mit den Differentialgleichungen auf eine Stufe gestellt werden. Erst neuerdings hat man auf diesen Gedanken wieder zurückgegriffen.

An diese zweite — in den Fällen, wo sie nicht gleichfalls versagt, recht förderliche — Methode knüpfen die nächsten Schriftsteller der englischen Schule, Stirling, Taylor, Mac Laurin an, wobei sich indessen ihre Unzulänglichkeit bald herausstellen sollte, wie unten gezeigt werden wird.

Leibniz Urteile über die Newton'sche Methode.

10. Es wurde schon erwähnt, dass Newton seinen älteren — vor-Leibniz'schen — Fluxionscalcul auf die Entwicklung der zu differentiirenden oder zu integrirenden Ausdrücke in Reihen gegründet hat, wie dies auch aus den Briefen an Oldenburg vom Jahre 1676 hervorgeht. Leibniz äusserte sich, als der Streit über die Priorität der Erfindung der Differentialrechnung ihm nahe ging, in einem Brief vom 10. October 1712 an Joh. Bernoulli darüber wie folgt:

„Ich erinnere mich, seinerzeit Briefe von Oldenburg erhalten zu haben, aus denen hervorging (apparebat), dass Newton damals den Angelpunkt der Sache in die Reihen verlegte und diejenigen Probleme für gelöst ansah, die er auf Reihen zurückgeführt hatte. Aber ganz was anderes lehrt der Differentialcalcul. Man muss die Probleme, die auf gewöhnliche Constructionen nicht zurückgeführt werden können, wenigstens auf Quadraturen zurückführen, und auch in den transcendenten Quadraturen giebt es verschiedene Stufen. Ich bezweifle also, dass Newton so zeitig zu jener Methode, die er [jetzt] Fluxionsrechnung nennt, gekommen ist.“ Joh. Bernoulli stimmt brieflich dieser Ansicht zu (7. Juni 1713), indem er die Prioritätsansprüche Beider vergleicht und zu dem Ergebnis kommt, dass der Algorithmus, die allgemeinen analytischen Operationsregeln des Differentiirens und Integrirens, zu jener Zeit Newton unbekannt waren.

Die Ansicht, die Newton selbst von seiner Reihen-Methode hegt, kommt an einer Stelle des ersten Briefes an Oldenburg zum Ausdruck, wo er, nachdem er die Reihenentwicklung für die Ordinate der Ellipse auf die Probleme der Quadratur, Rectification der Ellipse und die Kubatur des Sphäroids angewendet hat, Folgendes sagt: ((3). a. a. O. S. 322):

„Ex his videre est, quantum fines analyseos per hujus modi infinitas aequationes ampliantur: quippe quae, earum beneficio, ad omnia paene dixerim problemata (si numeralia Diophanti et similia excipias) sese extendit.“ Man wird dem Autor darin Recht geben, dass seine Methode die Grundlage enthält für einen Fortschritt der Analysis von ungemessener Tragweite. Aber der Verlauf dieses Referats wird lehren, wie viel zu thun übrig blieb, um dem von Newton ausgesprochenen Gedanken seine Umgrenzung und einen Beweis zu geben; und weiter ist bekannt, wie viel fruchtbarer für die nächste Zeit die Methoden, Anschauungen und Bezeichnungen des Festlandes sich erwiesen haben, die sich den Bedürfnissen der angewandten Disciplinen geschmeidig anpassten und für eine Theorie der Functionen eine Reihe wichtiger Voruntersuchungen an Transcendenten lieferten. Es zeugt demnach mindestens von Einseitigkeit, wenn, mit einem Ausfall auf Leibniz, Stirling in seiner Schrift Lineae 3. ordinis Newtonianae (1717) ausruft: „Sane non video, qua ratione quis possit fluxionum methodi inventionem sibi arrogare et non etiam serierum inventionem“.

Newton und das Taylor'sche Theorem.

11. Dem Umstand, dass Newton auf die Beherrschung der impliciten Functionen, die allerdings, gegenüber Leibniz, die starke Seite seiner Theorie bildete, den Hauptnachdruck legte, ist es vielleicht zuzuschreiben, dass er den kurzen Schritt, der ihn von dem Taylor'schen Theorem noch trennte, nicht ausgeführt hat. In der später viel besprochenen Prop. X. Probl. III des lib. II der Principia (Philosophiae naturalis principia mathematica, auct. Is. Newton, 1687), wo Newton die Aufgabe behandelt, aus der beliebig gegebenen Bahncurve eines schweren Körpers das Gesetz für die Dichtigkeit des widerstehenden Mittels, in dem die Bewegung erfolgt, abzuleiten (wobei er den Widerstand der Dichtigkeit und dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional setzt), kommt eine Reihenentwicklung vor für den Zuwachs der Ordinate jener Curve nach Potenzen des Zuwachses der Abscisse. Die Coefficienten der Entwicklung ergeben der Reihe nach die Lage der Tangente, die Krümmung der Curve, die Variation der Krümmung u. s. w., lauter Grössen, die andererseits Newton durch seine Fluxionsmethode direct zu berechnen wusste ((4). Probl. IV. V). Es lag nahe, diese Ausdrücke

mit einander zu vergleichen, wie dies später Stirling that (Lin. 3. ord. Newtonianae, Prop. III. ed. Paris. 1797 p. 76), der auf diese Weise unabhängig von Taylor zu dem nach diesem genannten Theorem gelangt ist. Uebrigens befindet sich gerade an dieser Stelle der Principia in der ersten Auflage ein Fehler (vgl. Briefe von Joh. Bernoulli an Leibniz vom 12. Aug. 1710, 7. Juni 1713 und Lagrange, Fonct. analyt. I partie 8, p. 6), den Newton erst in der zweiten Auflage stillschweigend verbessert hat (1713), als ihn andere Dinge mehr in Anspruch nahmen.

Von dem Beitrag zur Eliminationstheorie, den (1) enthält, wird unten (No. 14) die Rede sein.

12. Zwischen der Fluxionsrechnung (4) und der Enumeratio lin. tert. ord. (5) scheint ein Zusammenhang nicht zu bestehen. Aber dass die gerad- und krummlinigen Asymptoten, die in dieser Schrift das Einteilungsprincip für die Curven abgeben, mit dem Approximationsverfahren der Reihen in Verbindung gesetzt werden können, haben später Stirling und Cramer gezeigt. Jedenfalls hat, wie man in Chasles' Geschichte der Geometrie (Aperçu historique sur l'origine et le developpement des méthodes en géométrie. 4. section. § 4, 1837, Bruxelles 4°; 2. édit. 1875, Paris) nachlesen kann, diese Schrift auf die Entwicklung der Geometrie einen weittragenden Einfluss geübt. Indem Newton seine überraschend einfachen Sätze, welche Ordnung in das wirre Gebiet der Gestalten der Curven dritter Ordnung bringen, ohne Beweis publicirte, veranlasste er namhafte englische Geometer wie Stirling, Mac Laurin, auf dem Festlande Nicole, De Gua, Cramer u. A. zu bedeutenden Anstrengungen, die, zunächst auf die Begründung jener Sätze gerichtet, neue Gesichtspunkte zu Tage brachten, welche zu einer allgemeinen Geometrie der algebraischen Curven den Grund legten.

Die „Enumeratio" etc.

Es wäre eine dankbare Aufgabe, diese Zusammenhänge, die auch Chasles nur gestreift hat, zu verfolgen. Wir müssen dies einer Geschichte der Theorie der Curven überlassen, und uns im Nachfolgenden mit dem Hervorheben einiger Punkte begnügen, die sich für die Theorie der algebraischen Functionen als wichtig erwiesen haben. Zuvor wollen wir kurz die Stellung bezeichnen, welche gegenüber der Newton'schen Fluxionsrechnung die Mathematiker in Deutschland, Holland und Frankreich einnahmen.

C. Gottfried Wilhelm Leibniz und die festländischen Mathematiker seiner Zeit [1675—1730].

Leibnizens gesammelte Werke, her. v. Pertz: 3. Folge: mathematische Schriften, her. von C. J. Gerhardt, Berlin, Halle 1849—63, 7 Bände 8°.

Bevorzugung der transcendenten Functionen vor den algebraischen.

13. Leibniz liebt es, seine Analysis indivisibilium et infinitorum in Gegensatz zu der Lehre von den algebraischen Gebilden zu stellen. Er betont bei jedem Anlass (vergl. z. B.: De geometria recondita in den Act. Erudit. Lips. 1686, und Leibnizens Werke. Mathematik 5. Bd. S. 230): „dass er [Leibniz] durch seine Methode die Geometrie über die Grenzen hinaus, die ihr Vieta und Cartesius gesteckt, gefördert habe, weil seine Analysis sich auf solche Probleme erstrecke, die überhaupt von algebraischen Gleichungen nicht umfasst werden“: und an einer andern Stelle (S. 228): er wolle „fontem aperire Transcendentium Quantitatum“. Mit diesem ausgesprochenen Zug zu den transcendenten Functionen stellen sich Leibniz, Jacob und Johann Bernoulli, de l'Hospital, Huygens, Varignon und die anderen Anhänger Leibnizens zugleich in Gegensatz zu der Newton'schen Schule. „Statt an Gleichungen zwischen zwei Variabeln anzuknüpfen, die willkürlich ersonnen aus der Mannigfaltigkeit aller algebraischen Gleichungen heraus gehoben sind“, ziehen sie es vor, sich mit Constructionen und Curven zu beschäftigen, „quas natura ipsa simplici et expedito motu producere potest“ (Jac. Bernoulli, de isochrona parametrica, Opera T. I. p. 648): Rollcurven, Cykloiden, Spiralen, die Kettenlinie, die logarithmische Linie, Loxodrome. Vornehmlich interessirt sie die lebendige Erzeugung der Curven durch mechanische Processe. Das Verhalten von Evolute und Evolvente, die kaustischen Linien, die durch Reflexion und Refraction aus einer gegebenen entstehen, u. s. w. regt sie zu lebhaftem Gedankenaustausch an, dessen oft polemische Form von dem Eifer zeugt, mit dem sie die eigenen Erzeugnisse hüten und jede fremde Anregung sogleich ausnützen*). Wo so viele hervorragende Männer an denselben Problemen arbeiten, konnte es nicht fehlen, dass Fülle und Tiefe zugleich die Lösungen auszeichneten.

*) Man vergl. was Leibniz über diese Art des Verkehrs schreibt in „Communicatio“ etc. Acta Erud. Lips. 1697, Math. Schriften Bd. 5, S. 331.

Wir heben einige für die Theorie der algebraischen Functionen belangreiche Ergebnisse dieses Verkehrs hervor.

Den Begriff eines Curvensystems mit variablem „Parameter" entwickelt Leibniz in der Abhandlung „de linea ex lineis" etc. (Acta Erudit. Lips. 1692. Math. Schriften Bd. 5 S. 266) und in seiner Correspondenz mit Joh. Bernoulli (3. Aug. 1697), dem er durch die Lösung des Problems der Trajectorien mit Hülfe der Differentiation nach jenem Parameter ein Wort unverhohlener Bewunderung entreisst*).

Die Evoluten, und ihre Umkehrung, die Evolventen, die bei Abwicklung eines auf die ersteren aufgelegten Fadens entstehen, eine Entdeckung von Huygens, weisen regelmässig gewisse singuläre Vorkommnisse in der Gestalt von Spitzen oder Rückkehrpunkten auf. Die Kriterien für diese Punkte und die auch sonst schon bekannten Wendepunkte zu finden, war ein Problem der Differentialrechnung, das die Untersuchung singulärer Curvenpunkte überhaupt nach sich zog. Leibniz, von dem Studium der Krümmung einer Curve ausgehend, gab die (im wesentlichen schon früher bekannte) Bedingungsgleichung für die Wendepunkte in der Form an: $d^2y = 0$ (Nova method. pro max. et min. Acta Erud. Lips. 1684. Math. Werke 5. S. 221) unter der Annahme, dass y und dy von Null verschieden sind. De l'Hospital, der begeisterte und selbstlose Anhänger Leibnizens, stellt an die Spitze seiner Analyse des infiniments petits (Paris 1715) die Forderung: Eine krumme Linie kann als ein Linienzug von unendlich vielen, unendlich kleinen Strecken angesehen werden, also als ein Polygon von unendlich vielen Seiten, dessen Winkel das Mass für die Krümmung der Curve abgeben (Art. 3), und giebt in Art. 66, an den Ausdruck für die Subtangente anknüpfend, die im Vergleich zu dem Zuwachs der Abscisse des Berührpunktes, wenn dieser ein Rückkehrpunkt ist, einen unendlich grossen Zuwachs erhält, als Kriterium für den letzteren die Gleichung $d^2y = \infty$ an. Er bemerkt zugleich (l. c. §§ 109, 82), dass mit der äusseren Gestalt eines Rückkehrpunktes (point de rebroussement) oder auch eines Wendepunktes ein ganz verschiedenes Verhalten der Curve in Bezug auf die Krümmung verbunden sein kann, wovon noch unten (De Gua) die Rede sein wird. Mit dem Doppelpunkt, als dem einfacheren Vorkommen, brachte die Spitze zuerst Saurin (Sur un cas singulier du problème général des tangentes. Acad. Par. 1716) in Verbindung. Er beseitigte die Unbestimmt-

*) Gerhardt, Geschichte der Mathematik in Deutschland, München 1877, S. 166.

heit des Wertes von dy/dx in einem Doppel-, dreifachen u. s. w. Punkt durch die Substitution von x+dx, y+dy, wodurch sich ihm für die Richtung der Tangenten eine quadratische, kubische u. s. w. Gleichung ergab, deren Wurzeln reell oder imaginär, teilweise gleich u. s. w. sein können. Bragelogne (Abbé de B., Examen des lignes du 4. ordre etc. Acad. Par. 1730 und 1731) hat dann — immer im Anschluss an die Methoden der Differentialrechnung — die bei den Curven vierter Ordnung auftretenden Singularitäten und ihr Entstehen aus Doppelpunkten u. s. w. durch Variation der Constanten untersucht.

Leibniz über Elimination.

14. In Bezug auf die Methode der Elimination aus zwei Gleichungen, welche die Unbekannte in höherem Grade enthalten, ist Leibniz, wie Gerhardt in der Vorrede zum 7 Band der Mathematischen Schriften von Leibniz bemerkt, der unmittelbare Vorläufer von Bézout. Newton hatte in der Arithmetica universalis (Sect. IV. l. c. S. 631) eine Tabelle der Resultanten von zwei Gleichungen bezw. zweiten, zweiten und dritten, dritten Grades aufgestellt, die in der Weise berechnet sind, dass die zwei Gleichungen je zu einer dritten von niederem Grad combinirt werden. Eine solche Tabelle in ausgedehntem Massstab aufzustellen, hält auch Leibniz für nötig (Brief an de l'Hospital vom 28. April 1693, Math. Schr. ed. Gerhardt. Bd. 2. S. 239 ff.). Die Mittel zur Berechnung erblickt er:

1) In einer systematischen Bezeichnung der Coefficienten durch Stellenzeiger (Indices), einem Kunstgriff, dessen Anwendung auf ein System von linearen Gleichungen Leibniz bekanntlich zum Erfinder der Determinanten gemacht hat*); ferner in folgendem Process:

2) „Hat man (l. c. Bd. 7. S. 6) zwei Gleichungen desselben Grades, so multiplicire man beide mit einem unbestimmten Ausdruck (assumtitia formula) vom nächst niederen Grad; durch Addition der Producte entsteht eine Gleichung, deren einzelne Terme man gleich Null setzte. Man erhält dann eine Gleichung mehr, als unbestimmte Coefficienten vorhanden sind, und zwar sind diese Gleichungen linear (in simplice gradu). Damit ist das Problem auf das frühere zurückgeführt“ (Elimination aus einem System von linearen Gleichungen), das man vermöge 1) bewältigen kann.

Das Wort Function.

15. Wie fast alle Bezeichnungen, welche die neue Lehre einzuführen erforderte, nach dem Vorschlag der festländischen Mathematiker acceptirt worden sind, so rührt auch das Wort „Function“ von Leibniz her, der zunächst diese Bezeichnung anwandte auf die mit einem Punkt der Curve

*) Gerhardt, Gesch. d. Math. S. 183.

verbundenen Längen wie Abscisse, Ordinate, Tangente, Subtangente, Krümmungsradius „et alias innumeras" (Nova calc. diff. appl. Act. Erud. Lips. 1694; Schriften, 5, S. 306. Vergl. auch Jac. Bernoulli, Act. Erud. Lips. 1694, de methodo tangentium inversa), zwischen deren je zweien ein Abhängigkeitsverhältnis besteht. Im heutigen Sinn, unter Beschränkung übrigens auf das, was wir einen „Ausdruck" nennen, findet sich das Wort „Function" systematisch wohl zuerst verwendet in der Abhandlung über das isoperimetrische Problem von Joh. Bernoulli (Ac. Paris. 1718. Opera. Lausanne 1742. 4 Voll. II. S. 241), der auch bereits „algebraische" und „transcendente Functionen" (l. c. III. S. 174) unterscheidet. Durch Euler wurde das Wort der wissenschaftlichen Welt vertraut gemacht. Aber nicht in der Einführung des Wortes, sondern darin lag das Verdienst, dass die Leibniz'sche Schule das Bedürfnis erkannt hat, die Vielheit der Abhängigkeitsverhältnisse, die man kennen gelernt hatte: die rationalen, irrationalen und transcendenten Ausdrücke und ihre Verbindungen in einen Begriff zusammenzufassen, der, dank auch dem Zeichen, das später Lagrange eingebürgert hat, jetzt alle Disciplinen der reinen und angewandten Mathematik beherrscht und seinen Namen einem besondern Wissenszweige geliehen hat.

D. Brook Taylor, James Stirling, Colin Mac Laurin [1717—1748].

I. B. Taylor, Methodus incrementorum directa et inversa. Lond. 1717; 4° 118 pp.

II. J. Stirling, Lineae tertii ordinis Newtonianae, sive illustratio tractatus D. Newtoni de enumeratione linearum tertii ordinis. Oxon. 1717. — Spätere Ausgabe, mit Newton's Abhandlung vereinigt: Paris 1797. 8°, 198 SS.

III. C. Mac Laurin. (1) Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis. Lond. 1720. 4°. 139 pp.

(2) A treatise of fluxions in two books. 2 Voll. 4° Edinb. 1742. 763 pp.

(3) A treatise of algebra in three parts with an appendix: De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus. 8°. 1. ed. Lond. 1748; 4. ed. Lond. 1788. 504 pp.

Taylor's Methodus incrementorum

16. Die Einkleidung, die Newton der neuen Lehre gegeben hatte, indem er geläufige Vorstellungen der Mechanik heranzog, besass vor derjenigen von Leibniz den Vorzug, dass sie sich leichter streng begründen liess. Aber die Begriffe und Bezeichnungen der Leibniz'schen Methode des Unendlichkleinen („methodus incrementorum") waren flüssiger und bequemer für die Anwendungen und gaben ihr einen solchen Vorsprung

vor Newton's starren Grenz-Verhältnissen („rationes ultimae partium evanescentium“. Vorrede zu Taylor. l. c.). dass die englische Schule die Notwendigkeit einsah, die Methoden der Rivalen. deren strenge Begründung dem Festlande wenig Sorge machte, in ihr System einzuarbeiten und sie mit ihrem an Euklid und den Alten geschulten Sinn für Strenge in Einklang zu bringen.

Dieses Ziel verfolgt in seinem theoretischen Teil Taylor's kleine Schrift, unter Beschränkung jedoch auf algebraische Functionen und algebraische Differentialgleichungen („aequationes fluxionales“). Taylor will, was unter dieser Beschränkung natürlich leicht durchführbar ist, mit Hülfe endlicher Zuwächse*). die erst in der Schlussgleichung zur Grenze „Nihil“ übergeführt worden, die Regeln der Fluxionsrechnung und damit die Lösung der beiden Hauptprobleme: der impliciten Differentiation und der Integration der durch sie definirten Functionen streng begründen, das Letztere selbstverständlich wieder an der Hand der Reihenentwicklungen. Er ergänzt zu diesem Behufe Newton's Verfahren durch einige Sätze, von denen der den Namen Taylor's tragende und ein anderer über die Exponenten der Potenzentwicklung für algebraische Functionen die wichtigsten sind. Von dem ersteren macht der Verfasser selbst nur einen ganz beschränkten Gebrauch. in der heutigen Fassung erscheint der Satz überhaupt nur in Form eines Corollars (Cor. II zu Prop. VII) und bleibt ohne Anwendung.

Die Reihe für die Function y, die einer algebraischen Differentialgleichung genügt. setzt Taylor in der Form an (Prop. IX, Probl. VI):

$$y = Az^{\vartheta} + Bz^{\vartheta+\eta} + Cz^{\vartheta+2\eta} + \cdots,$$

und bestimmt die Zahl ϑ mit Hülfe des Newton'schen Parallelogramms, die Zahl η aber ist ihm — im Anschluss an Newton's zweite Methode — der grösste gemeinsame Teiler der Exponenten der Potenzen von z, welche die verschiedenen Terme der vorliegenden Gleichung liefern, wenn man allenthalben $y = Az^{\vartheta}$ setzt.

Stirling's Lineae Newtonianae.

17. Dass es bedenklich ist. die Exponenten späterer Reihenglieder zu bestimmen, ohne von den Beziehungen zwischen den Coefficienten der Gleichung Notiz zu nehmen. weist Stirling nach (II, Prop. I, Ex. 4. l. c. p. 71), indem er ein Beispiel anführt, wo der Coefficient A des ersten Gliedes sich aus einer Gleichung höheren Grades berechnet, und wo dann B mehrdeutig wird, wenn einige Wurzeln A einander gleich werden.

---

*) Vergl. die malitiöse Besprechung des Werkes von Joh. Burcardus in den Opera omnia von Joh. Bernoulli 1742, T. II, S. 486.

Aber auch Stirling's Abänderungsvorschlag, den er übrigens unter Reserve giebt, ist unzureichend. So würde man für ein von Cramer (Introduction à l'analyse etc. Ch. VII. § 112. Ex. 3) behandeltes Beispiel auch vermöge Stirling's Methode falsche Exponenten erhalten. Bemerkenswert ist, dass Stirling in der Prop. III. l. c. S. 76 bereits den Mac Laurin'schen Satz über die Coefficienten der Potenzreihen — allerdings unter Beschränkung auf algebraische Functionen — ausspricht und durch Beispiele erläutert. Auch im übrigen ist Stirling's Erläuterungsschrift zu Newton's Curventheorie ein Werk voll trefflicher Bemerkungen und Ausblicke, die wegen ihres weiten Gesichtskreises für die Theorie der algebraischen Curven grundlegend geworden sind. Der Verfasser zeigt, dass eine algebraische Curve (linea rationalis) nter Ordnung durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ ihrer Punkte bestimmt ist (Prop. IX. l. c. S. 115), dass parallele Gerade eine algebraische Curve „in iisdem numero punctis [sic!] realibus et imaginariis" schneiden (Prop. I. Corr. 4. l. c. S. 44), dass die unendlichen Zweige in gerader Anzahl auftreten; er übersieht die Gestalt der algebraischen Curven, weiss, dass Asymptoten, geradlinige wie krummlinige, sich bestimmen aus den Anfangsgliedern mit positiven Exponenten der nach fallenden Potenzen der Abscisse geordneten Reihe für die Ordinate des betreffenden Curvenzweigs (Prop. VI), und schliesst diese allgemeinen Sätze, mit deren Hülfe er einen grossen Teil der Newton'schen „Enumeratio" begründet, mit der vollklingenden Bemerkung ab: „hac methodo universali procedendo ... patescunt ... proprietates omnium curvarum ordinum superiorum".

18. Mac Laurin's Geometria organica, das Werk eines Neunzehnjährigen, ist die Grundlage geworden für die heutige synthetische Geometrie der höheren Curven, insoweit sich diese auf die algebraischen Schnittpunktsätze stützt. Wenn es unsere Aufgabe wäre, eine Geschichte der Theorie der algebraischen Curven zu schreiben, so müssten wir auf die vielseitigen, übrigens meist an Newton anschliessenden Methoden Mac Laurin's für die Beschreibung solcher Curven und auf seine Ergebnisse in Bezug auf die Erzeugung höherer Curven ohne vielfache Punkte (die bei den nächstliegenden Erzeugungsarten meist sich einstellen), sowie auf eine Vergleichung seines Verfahrens mit den neueren von Jonquières und H. Grassmann eingehen. Für die Theorie der algebraischen Functionen kommt das bedeutende Werk jedoch nur in wenigen Stellen in Betracht.

Mac Laurin's Geometria organica.

Die Theorie der singulären Punkte wird dort analytisch nicht näher entwickelt. Ja es ist methodisch ungenau, wenn Mac Laurin auf die Existenz eines Doppelpunktes im Ursprung des Coordinatensystems

schliesst, weil für $y = 0$ in der Gleichung der Curve nur noch Glieder mit dem Factor x^2 bleiben, wobei dann die Anschauung des besonderen Falls die offenbare Lücke ausfüllen hilft (S. 13).

Dagegen bringt der Schluss des Werkes wichtige Sätze zur Curvenlehre, die hierher gehören (Sect. V. Lemma III. Cor. I, l. c. S. 136). „Es scheint, dass sich zwei Linien mter und nter Ordnung in mn Punkten treffen“, ein Satz, den der Verfasser durch Induction aus den Fällen $m = 2, 3$ erschliesst, und zu dessen Beweis er den Ansatz gehabt hätte, weil er den Grad der Gleichung nter Ordnung mit Hülfe der Gleichung zweiter bezw. dritter Ordnung successiv herabzudrücken weiss. Eine weitere Bemerkung Mac Laurin's bezieht sich auf das später nach Cramer benannte Paradoxon, dass eine Curve nter Ordnung nicht immer durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte bestimmt ist, weil „linea ordinis n occurrere potest aliae ejusdem ordinis in punctis n^2.“ Eine Erklärung versucht er indessen nicht. — Von anderen Schnittpunktsätzen erwähnen wir den: wenn man $nr+1$ Punkte einer Curve nter Ordnung auf einer solchen rter Ordnung ($r \leq n$) annimmt, so muss sie zerfallen. In dem Coroll. IV wird durch ähnliche Schlüsse, wie dies heute geschieht, die Maximalzahl der Doppelpunkte einer nichtzerfallenden C_n auf $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ angegeben, und mit gleichen Mitteln eine obere Grenze für die Art und Zahl der höheren vielfachen Punkte festgestellt, die eine C_n besitzen kann.

Mac Laurin's Fluxionstheorie.

19. Die Fluxionstheorie (III, (2)) des Mac Laurin verrät in ihrer Anlage durchaus den Geometer. Der erste Teil, der nicht eine einzige Formel enthält, ist der Begründung der Theorie der Fluxionen auf der Basis der Geometrie der Alten gewidmet. Zu der Curve, welche die Function darstellt, gesellt Mac Laurin die Darstellung ihrer Fluxion, um das Verhalten der ersteren an ausgezeichneten Stellen genauer zu definiren, so in den Wende- und Rückkehrpunkten (Vol. I, Chapt. IX, S. 228 ff.). Erst das zweite Buch enthält die zugehörigen Formeln, wobei übrigens der Verf. auf die Spitzen (cuspids) nur flüchtig eingeht, „die einfachste Art von Spitzen erster Art wird durch $\ddot{y} = \infty$ definirt, ebenso wie $\ddot{y} = 0$ die einfachste Art von Wendungen (contrary flexions) ergiebt.“ (Book II, Chapt. V, Art. 868, S. 701.)

In diesem Teil findet sich auch das bekannte nach dem Verfasser benannte Theorem für die Entwicklung einer Function von x nach ganzen positiven Potenzen dieser Veränderlichen (Book II, Chapt. II, Art. 751, S. 611). Mac Laurin begründet dasselbe durch die Methode der unbestimmten Coefficienten, und hebt hervor, dass es einige Ausnahmen erleide, so wenn für $x = 0$ einer der Differentialquotienten der Function

unendlich wird; dass im übrigen aber der Satz ebenso wohl auf explicit wie auf implicit (durch eine „affected" also nicht reine „equation") gegebene Functionen und „in manchen Fällen" auf die durch eine Differentialgleichung definirten Functionen eine Anwendung zulässt. Welche Fälle er ausgenommen wissen will, giebt er nicht an. Gewiss hat Mac Laurin die Bedeutung des Satzes besser erkannt als Taylor; aber so wenig wie dieser und Stirling bemerkt er den Vorzug, den die Beweglichkeit der Ausgangsstelle dem Taylor'schen Theorem vor seinem giebt, und länger als ein Jahrhundert dauerte es, bis der Bann gebrochen war, den die Bevorzugung des Werthes $x = 0$ des Argumentes allen Untersuchungen über Entwicklung in Potenzreihen auferlegte, und dem sich selbst Cauchy nicht entzogen hat.

Mac Laurin's Algebra.

20. Aus der Algebra (III. (3)) heben wir die Stelle hervor, wo von Reihenentwicklungen für implicite Functionen die Rede ist. In chapt. 10 unternimmt es der Verfasser, die Regeln, die ohne Beweis Taylor und Stirling für die Bestimmung der Exponenten ϑ, η in der Reihe:

$$y = Ax^{\vartheta} + Bx^{\vartheta+\eta} + Cx^{\vartheta+2\eta} + \cdots$$

gegeben hatten, zu begründen und zu erweitern. An die erste Newton'sche Methode anschliessend (das Newton'sche Parallelogramm, in dem die Terme der vorliegenden Gleichung durch Sterne repräsentirt sind) giebt er die vervollständigte Regel (§ 104): „Um alle Reihen [d. h. die Anfangsglieder der Entwicklungen für eine Coordinate nach auf- oder absteigenden Potenzen der anderen] zu erhalten, beschreibe man ein Polygon, das in jeder Ecke einen Term hat und alle anderen Terme einschliesst; dann erhält man eine [!] Reihe, wenn man irgend zwei Terme einander gleich setzt, die auf zwei aufeinander folgenden Ecken des Polygons liegen." Er spricht, wohlgemerkt, nur von je einer Reihe, und dies ist der Mangel auch seiner sonstigen Ausführungen. An die zweite Newton'sche Methode anschliessend, die ja wesentlich nur eine Uebertragung der Polygonmethode in die arithmetische Form ist, verbessert Mac Laurin das Taylor'sche Verfahren zur Bestimmung des Exponenten η des zweiten Gliedes, indem er den Fall berücksichtigt, dass $y - Ax^{\vartheta}$ mehrfacher Factor der Glieder niederster Ordnung ist. Aber immer ist es nur das Interesse an der einzelnen Entwicklung, das die Mathematiker jener Zeit leitet; einen Ueberblick über alle zu geben, beabsichtigt auch Mac Laurin nicht, insbesondere sind die mit imaginären Coefficienten für ihn überhaupt nicht vorhanden. Wir bemerken hier vorgreifend, dass Lagrange, der eine ähnliche Darstellung des Algorithmus wie Mac Laurin giebt, zuerst die Frage nach allen

möglichen Entwicklungen, auch die imaginären nicht ausgeschlossen, aufwirft.

Für längere Zeit abschliessend hat die Theorie dieser Entwicklungen Cramer (1750) behandelt. Bevor wir jedoch mit ihm uns beschäftigen, müssen wir von den Leistungen eines Mannes sprechen, der sich durch eine Uebereilung in einem verhältnismässig geringfügigen Punkt den Tadel der Nachfolger in dem Masse zugezogen hat, dass, wie es scheint, darüber seine nicht geringen Verdienste um die Anwendung der Algebra auf Geometrie fast in Vergessenheit geraten sind: des Abbé De Gua.

E. **Jean Paul De Gua de Malves** [1740].

Usage de l'Analyse de Descartes pour découvrir sans le secours du calcul différentiel les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres. Paris 1740. 12°. 457 SS.

Singuläre Punkte einer Curve.

21. Dieses Werkchen, dessen Format und Ausstattung auf alles andere eher als auf ein Buch mathematischen Inhalts schliessen lässt, ist, wie fast alle geometrischen Schriften jener Zeit, eine Frucht der Anregung, die Newton's „Enumeratio" gegeben hat, und repräsentirt in knapper Form ein vollständiges Lehrbuch der analytischen Geometrie, für seine Zeit schwer verständlich abgefasst*), aber voll originaler Gedanken und feiner Bemerkungen. Da sich die Schrift auf algebraische Curven beschränkt, so wird eine Behandlung möglich, die unter principieller Verzichtleistung auf die Hülfsmittel der Differentialrechnung fast nur mit der linearen Transformation operirt. Das Werk zerfällt in einen allgemeinen Teil (Sectt. I, II) und in Anwendungen (Sect. III), die letzteren beziehen sich besonders auf Curven dritter Ordnung. Der allgemeine Teil handelt von den Mittelpunkten der Curven (Sect. I), von den singulären Punkten, der Form der unendlichen Zweige und von einer gewissen engen Verwandtschaft, die der Verfasser zwischen den letzten beiden Erscheinungsformen von Curvenästen entdeckt hat.

De Gua verlegt (l. c. S. 116 ff.) die zu untersuchende Singularität in den Ursprung, befreit sich ferner dadurch, dass er vom rechtwinkligen Coordinatensystem x, y zu einem schiefwinkligen z, u mit beweglicher Axe u (S. 88 ff.) mittelst der Formeln übergeht:

$$x = z + nu,$$
$$y = mu.$$

*) Vergl. den Nachruf an De Gua in Mém. Ac. Par. 1786.

von den Zufälligkeiten der Lage der Tangenten des singulären Punktes, sammelt dann die für den Punkt charakteristischen Glieder der Gleichung mit Hülfe des Newton'schen Parallelogramms, das er jedoch durch ein Dreieck ersetzt (le „triangle algébrique", später von Cramer „triangle analytique" genannt), welches alle Punkte umschliesst, die den Termen einer gegebenen Curvengleichung entsprechen (S. 24). Ist der Ursprung des Coordinatensystems ein singulärer Punkt, so wird für sehr kleine Werte von x „die linke Seite der vorliegenden Gleichung in mehrere Factoren von der Form $y^m - Ax^n$ zerfallen, wo m eine positive ganze, n eine ganze Zahl ist, von denen jedoch nur diejenigen Factoren, für welche n positiv ist, zu den Zweigen des singulären Punktes im Ursprung gehören" (S. 76): und zwar findet er, dass der erste Term der Entwicklung Ax^n zur Definition des Zweiges hinreicht, denn für kleine Werte von x sind diesem gegenüber die anderen zu vernachlässigen (S. 48).

Dass die letzterwähnte Auffassung falsch ist, bemerkt Euler, der in der „Introductio in analysin infinitorum" lib. II § 333 noch widersprechende Ansichten äussert, in der Note: „Sur le point de rebroussement de la 2e espèce" (Mém. Berl. 1749) jedoch darauf aufmerksam macht, dass für gewisse Werte von x das erste Glied einer Potenzreihe reell, das zweite aber imaginär sein könne, gegen dieses also dann nicht zu vernachlässigen sei, und so dazu führe, dass der Zweig überhaupt imaginär werde. Euler erklärt hierdurch das Verhalten der von de l'Hospital entdeckten Spitze zweiter Art, deren Existenz De Gua in Abrede gestellt hatte, weil die ihr entsprechende Entwicklung:

$$y = Ax^2 + Bx^{\frac{5}{2}}$$

sich durch Weglassen des höheren Gliedes auf einen (doppelt zu rechnenden) einfachen Zweig reducirt. Auch giebt, wie wir zufügen wollen, bei diesem Anlass Euler verschiedene Entwicklungen an, die alle auf dieselbe reelle Erscheinungsform der Spitze führen, und constatirt das Auftreten von Spitzen zweiter Art bereits bei Curven vierter Ordnung.

De Gua: Collineare Verwandtschaft.

22. Wie für die Aufsuchung der Gleichungen der Näherungscurven, welche die Zweige eines singulären Punktes im Ursprung des Coordinatensystems charakterisiren, De Gua den einen Eckpunkt des algebraischen Dreiecks benutzt, so dienen die beiden anderen ihm für die Untersuchung derjenigen Zweige der Curve, die nach den unendlich fernen Punkten der beiden Coordinatenaxen streben. Die merkwürdige Analogie, welche diese Zweige mit denen des singulären Punktes im Ursprung darbieten, verfolgt er in alle Einzelheiten, und findet, dass der innere Grund derselben, geometrisch gesprochen, in der Newton'schen „Genesis curvarum per umbras"

gelegen ist, die Nicole (Acad. Paris. 1731) zuerst richtig aufgefasst hatte (Chasles, Aperçu hist. Chap. IV), algebraisch gesprochen, in der Verwandtschaft, die sich durch die Gleichungen ausdrückt:

$$x = \frac{1}{z}; \quad y = \frac{u}{z},$$

vermöge deren zwei Seiten und zwei Ecken des analytischen Dreiecks sich einfach vertauschen (S. 202).

Bedingung für vielfache Punkte. Elimination.

23. Auf S. 238 ff. findet man — diesmal unter Benutzung der Differentialrechnung — die Bedingungen für einen Doppelpunkt der Curve ausserhalb des Ursprungs aufgestellt „en faisant à la fois $= 0$: 1° son équation même, 2° les deux coefficients de dx et dy dans sa première différentielle“, und als Specialfall hiervon (S. 259) den Rückkehrpunkt (1. Art) charakterisirt. De Gua hebt hiermit das einfachste Vorkommen der Spitze vor verschiedenen Vorkommen gleicher Gestalt heraus, die teils der Bedingung $d^2y/dx^2 = \infty$, welche Leibniz und de l'Hospital hierfür aufgestellt hatten, teils der $d^2y/dx^2 = 0$ genügen, Eigenschaften, die sie zudem mit den Wendepunkten in ihrem verschiedenen Vorkommen teilen, so dass diese Kriterien unzulänglich sind.

An jener Stelle (S. 240) wird endlich noch ein k-facher Punkt durch das Verschwinden der $\frac{1}{2}k(k+1)$ partiellen, ersten, zweiten, ... $(k-1)$ten Differentialquotienten der Curvengleichung nach x und y charakterisirt*).

Auch in Bezug auf die Auffassung der Elimination weicht De Gua von seinen Vorgängern in originaler Weise ab. Er definirt die Resultante aus zwei Gleichungen, die eine Veränderliche in höherem Grad enthalten, als den Rest, der sich bei Anwendung des Kettenbruchverfahrens, welches schon Euklid zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Teilers benutzt hat, am Schlusse einstellt: eine zwar schwerfällige aber sicher zum Ziele führende Methode der Resultantenbildung, auf die man neuerdings wieder zurückgreift, wenn es sich um strenge Begründung der Sätze über die Resultante handelt.

---

*) Der Satz, dass eine Gerade, die zwei Wendepunkte einer Curve 3. O. trifft, durch einen dritten geht, ist gleichfalls zuerst von De Gua bekannt gemacht worden, der auf S. 313 diesen Satz für neu erklärt. Die Algebra des Mac Laurin, deren Anhang man gewöhnlich für den Ursprung dieses Satzes citirt, ist, wenn auch vielleicht gleichzeitig oder früher bearbeitet, doch erst acht Jahre später erschienen.

F. Gabriel Cramer [1750].

Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Geneve 1750, 4°. 680 SS.

24. Dieses Werk ist für die Geschichte unserer Theorie bemerkenswert besonders wegen der in Chap. VII enthaltenen Méthode des séries. Cramer führt das Newton'sche Verfahren der Entwicklung einer implicit gegebenen algebraischen Function in eine Reihe für seine Zwecke — zunächst die Discussion der Gestalt der unendlichen Zweige — in folgender Weise aus:

„Méthode des séries."

Gegeben sei eine algebraische Gleichung zwischen zwei Veränderlichen x, y. Sie stellt eine „courbe algébrique, géométrique ou rationelle" dar (im Gegensatz zu den „courbes transcendantes, mécaniques ou irrationelles"). Es handelt sich um die Entwicklung von y nach auf- oder absteigenden Potenzen von x. Ob zu einem unendlich grossen, oder zu einem unendlich kleinen Werte von x solche von y existiren, und in welchem Grössenverhältnis sie zu x stehen, darüber entscheidet das Newton'sche Parallelogramm, oder besser das „analytische Dreieck", zu welchem De Gua das Parallelogramm ausgestaltet hat.

Wenn man alle Punkte, die in dem analytischen Dreieck den in der vorgelegten Gleichung wirklich auftretenden Termen entsprechen, durch ein Polygon einschliesst, dessen Seiten durch mindestens zwei dieser Punkte gehen, so entspricht einer jeden dieser Seiten (déterminatrice) (§ 91) ein Wertverhältnis von x und y, das den Exponenten des ersten Gliedes einer der Entwicklungen von y nach auf- oder absteigenden Potenzen von x ergiebt (§ 96, § 102). Indessen werden bei Cramer von den Dreiecksseiten zwei bevorzugt, und auch von diesen wieder eine vor der anderen. Die Analogie, welche, an das Dreieck anschliessend, De Gua zwischen den nach einem unendlich fernen Punkt laufenden Zweigen und den Zweigen eines vielfachen im Endlichen gelegenen Punktes entdeckt hatte, findet bei Cramer keine Beachtung: der Schritt von dem analytischen Dreieck zur Einführung homogener Coordinaten scheint damals noch allzu kühn gewesen zu sein. — Jedem durch das Dreieck gewonnenen Anfangsglied entspricht eine Näherungscurve: dies gilt sowohl für die unendlichen Zweige wie für die Zweige des (einfachen oder vielfachen) Punktes im Ursprung des Coordinatensystems. Aber „le premier terme de la série ne suffit pas toujours pour s'assurer de la nature, de la position et même de l'existence d'une branche [eines reellen Zweiges]: il faut souvent aller plus loin et calculer un certain nombre de termes"

(§ 115). Man erhält die höheren Glieder, wenn man auf die mittelst $y - Ax^h = u$ transformirte Gleichung das Verfahren mit dem Dreieck abermals anwendet. Dabei kann es, wie schon bei der Bestimmung von A, vorkommen, dass eine déterminatrice mehrere Coefficienten (und also mehrere Entwicklungen) liefert, wenn sich nämlich der zugehörige Coefficient aus einer Gleichung höheren Grades bestimmt. Diese kann gleiche Wurzeln haben (§ 108), was alsdann eine nachträgliche Spaltung der begonnenen Reihe anzeigt, ein Fall, der sich übrigens nicht unendlich oft wiederholen kann (§ 109). Ein abkürzendes graphisches Verfahren unterstützt die Aufsuchung der Exponenten der nach der Transformation auftretenden Glieder. Im Falle einer vielfachen Wurzel giebt Cramer (§ 113) eine (auch Mac Laurin bekannte) Regel für die Bildung des Exponenten des nächsten Gliedes.

Bei Cramer macht sich, zum Unterschied von Mac Laurin, bereits das Bedürfnis geltend, in der Aufzählung der einer Abscisse zugeordneten reellen Entwicklungen der Ordinate nach auf- oder absteigenden Potenzen der Abscisse vollständig zu sein: so in dem Beispiel des § 98, wo von den zu $x = 0$ und $x = \infty$ gehörigen Entwicklungen von y aus der Gleichung:

$$ay^3 - x^3y - ax^3 = 0$$

alle reellen angegeben sind, und auch die Frage der Convergenz mit den Worten gestreift wird: „Diese Reihen sind convergent, wenn jeder folgende Term kleiner ist als der vorhergehende, und diese Terme ins Unendliche abnehmen“ — mit einer allerdings richtigen Nutzanwendung auf die vorliegenden Potenzreihen.

Das Capitel von der méthode des séries bereichert, wie ersichtlich, das Newton'sche Verfahren nicht durch neue Ideen, verfolgt dasselbe jedoch in Einzelheiten, die neue Gesichtspunkte eröffnen. Spätere Partien des Werkes wenden die Reihenmethode auf zahlreiche Fragen der Curventheorie an nach der gestaltlichen Seite hin und leisten durch Aufzählung aller möglichen Fälle und durch die Erweiterung des Anschauungsgebietes für die Geometrie der höheren Curven Erhebliches. Bei der Richtung jener Zeit auf die reelle Darstellung insbesondere auch der Curven ist es verständlich, dass die Autoren (s. auch Euler, Rf. I. G.) sich mit den imaginären Zweigen nicht weiter beschäftigen (so z. B. schliesst Cramer aus $y^3 = x^3$ sogleich auf $y = x$, S. 180). Wohl aber sind die Reihen mit reellen Coefficienten bei Cramer jedesmal alle aufgezählt, auch wenn sie nach gebrochenen Exponenten fortschreiten (§ 98, § 206). Ueberhaupt tritt das Bestreben hervor, die obere Grenze der reellen

Lösungen eines Problems wirklich zu ermitteln, also meistens das, was man heute schlechthin die Anzahl der Lösungen nennt.

25. Zu Grunde liegt bei diesen Abzählungen der Satz, dass die Anzahl der reellen Schnittpunkte einer Curve mter mit einer nter Ordnung höchstens gleich mn ist. Elimination.

Von diesem Satz, den Mac Laurin (s. oben) zuerst ausgesprochen hat, wurde, fast gleichzeitig mit Cramer, von Euler ein Beweis versucht, welcher der Grundidee nach mit dem von Cramer in Appendix II gegebenen übereinstimmt. Euler (Mém. de l'Acad. de Berlin für das Jahr 1748, S. 234—248) präcisirt den Satz dahin, dass die Zahl mn wirklich erreicht werde, wenn man die unendlich fernen und die imaginären Schnittpunkte hinzunimmt und den Fall unendlich vieler gemeinsamer Punkte, d. h. den eines gemeinsamen Factors beider Gleichungen, ausschliesst. Beide Autoren definiren die Resultante in x als das Product aller Wurzeldifferenzen der nach y aufgelösten Gleichungen. Dieses ist als rationale Function der Coefficienten der beiden Gleichungen darstellbar, und zwar ersieht man aus der Doppelform, die man dem Product geben kann, dass der Grad in den Coefficienten bezw. gleich m und n ist. Nicht so leicht ist der Nachweis zu führen, dass das Product, nachdem rational gemacht ist, hinsichtlich x Glied für Glied bis zu höchstens dem Grad mn ansteigt. Euler kommt über einen Analogieschluss (s. unten Nr. 29) nicht hinaus. Cramer dagegen dringt tiefer ein. Wie Leibniz definirt er die Coefficienten in den beiden Gleichungen durch Stellenzeiger, erkennt den Kern der Frage als in denjenigen Relationen gelegen, durch die später (1771) Vandermonde die symmetrischen Functionen der Wurzeln vermöge der Coefficienten der Gleichung allgemein darstellte, und erfasst den Begriff des „Gewichts"*) einer symmetrischen Function der Wurzeln (App. II §§ 9, 10). Die Beweise werden jedoch auch von ihm nur an Beispielen geführt (hätten übrigens leicht durch den Schluss von n auf n+1 verallgemeinert werden können) und ermangeln durchaus derjenigen Bündigkeit, die der Beweis eines so wichtigen Theorems erfordert. Nichtsdestoweniger hat Cramer's Untersuchung die Aufmerksamkeit auch hervorragender Mathematiker der nächsten Zeit auf sich gezogen (vgl. z. B. Lagrange, résolution des équat. algébr., Oeuvres III, SS. 342, 230), weil er zuerst die Frage nach der Darstellung allgemeiner symmetrischer Functionen durch die Coefficienten der Gleichung aufgeworfen und zu beantworten versucht hat.

---

*) Salmon-Fiedler, Algebra der lin. Transf. 2. Aufl. § 56.

Den Appendix I der Analyse des lignes courbes pflegt man, wiewohl bereits Leibniz die Berechnung von Zähler und Nenner der Unbekannten eines Systems von linearen Gleichungen mit Hülfe von Indicesbezeichnung kannte (s. oben Nr. 14), als den Ursprung der Lehre von den Determinanten zu bezeichnen. Eine kurze Geschichte dieser Lehre findet man in Salmon's Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen, hergg. v. Fiedler, Anhang (Litteraturnachw. und Geschichte). 2. Aufl. 1877 (S. 464).

Das Cramer'sche Paradoxon.

26. Im Text der „Analyse“ (§ 48, S. 78) vergleicht weiterhin Cramer, den Spuren von Mac Laurin (s. oben) folgend, die Anzahl ν^2 der Schnittpunkte zweier Curven νter Ordnung mit der Zahl $\frac{1}{2}(\nu^2+3\nu)$ der verfügbaren Constanten einer Curve νter Ordnung, und findet die Lösung des nach ihm benannten Paradoxons: dass die Zahl der eine Curve bestimmenden Punkte $\frac{1}{2}(\nu^2+3\nu)$ kleiner sein kann als die Zahl ν^2 derjenigen, die eine Curve noch unbestimmt lassen, darin, dass die ν^2 Gleichungen, die zu erfüllen sind, damit eine der schneidenden Curven durch die ν^2 Schnittpunkte geht, von einander nicht unabhängig sind (S. 79). Dieselbe Erklärung gab übrigens in den Mém. de Berlin, année 1748, also mindestens zur selben Zeit, wiederum Euler. Wie Euler und De Gua in ihren Lehrbüchern der analytischen Geometrie, so vermeidet auch Cramer die explicite Anwendung des Differentialcalculs. Aber während Euler von der Anordnung der Curvengleichung nach Dimensionen von $x-p$, $y-q$, wenn p, q die zu untersuchende Stelle ist, ausgeht, benutzt Cramer für manche Zwecke (Krümmungsverhältnisse) die Entwicklung der einen Variabeln nach Potenzen der anderen, was dann wieder die Anwendung infinitesimaler Prozesse voraussetzt.

Dagegen ermittelt auch Cramer wie De Gua die vielfachen Punkte bloss durch unbestimmte Parallelverschiebung des Coordinatensystems. Die Verschiebungsgrössen ergeben sich aus der Bedingung, dass die Glieder 0., 1., . . . $(k-1)$ter Dimension alle verschwinden. Diese Gleichungen gleichzeitig zu erfüllen, ist bloss in einem k-fachen Punkt möglich, dessen Existenz hiernach $\frac{1}{2}(k^2+k-4)$ Bedingungen zwischen den Coefficienten der Curvengleichung voraussetzt (§ 174, S. 441).

Die Gestalt einer Curve in der Nähe von singulären Stellen liest zuweilen Cramer aus der einer transformirten Curve ab, wobei er sich solcher Transformationen bedient, die eine Graderniedrung und damit eine leichtere Auflösung der transformirten Gleichung und eine bequemere Construction der ganzen Curve (§§. 33, 616, 626) erlauben.

Dabei kommen irrationale, gelegentlich auch rationale Transformationen, besonders der Art $y = xz$ vor (wie ja auch schon Newton die Transformation $x' = 1/x$ angewendet hatte), wodurch Spaltung von verschiedenen Zweigen eintritt; indessen lässt sich irgendwelche theoretische Einsicht in die Verwertung dieses wichtigen Hülfsmittels nicht erkennen. Wird ja doch die Transformation ausschliesslich an Beispielen vorgenommen, und z. B. jene Transformation $y = xz$ auch auf die Zweige unendlich ferner Punkte der Curve (§ 142, S. 288; § 221, S. 626 ff.) angewendet. Theoretisch wird vielmehr eine singuläre Stelle ausschliesslich durch Reihenentwicklung mit dem Parallelogramm untersucht.

Rückblick auf Cramer's „Analyse".

27. Wir haben Cramer's Analyse des lignes courbes ausführlicher besprochen, als vielleicht der Wert seiner selbständigen Gesichtspunkte und Ergebnisse es erheischt hätte. Man könnte auch an der geringen Schärfe der Schlüsse, an der Breite und einer gewissen Aengstlichkeit der Darstellung, an den unzähligen die Entwicklung unterbrechenden Beispielen Anstoss nehmen.

Aber das Werk bildet ein vollständiges in sich abgeschlossenes Compendium des Wissens seiner Zeit über algebraische Curven, unter einheitliche Gesichtspunkte geordnet, auch äusserlich trefflich ausgestattet und mit wertvollem Anschauungsmaterial an ausgeführten Curvenzeichnungen versehen. So ist die Analyse des lignes courbes ein vielgelesenes und oft citirtes Werk geworden, auch für Sätze, deren Priorität nicht unbestritten dem Verfasser zufällt. Aus Cramer's Werk sind fast alle diejenigen Anschauungen und Methoden entnommen, die, weiter ausgebildet, dazu gedient haben, die Theorie der algebraischen Functionen vom geometrischen Standpunkt aus zu begründen und zu bereichern. Seine Theorie der Reihenentwicklung scheint auch diejenigen Mittel gewährt zu haben, deren sich Puiseux später für die Untersuchung der singulären Stellen eines algebraischen Gebildes bedient hat. Es hätte deshalb der lamentabeln Vorrede nicht bedurft, durch die Cramer für die algebraisch-geometrische Methode, die das Werk vertritt, gegenüber dem strengen [synthetischen] Beweisverfahren der Alten ein gutes Wort einlegt. Längst war die Zeit vorüber, wo man die Theorie der Curven als eine bloss im Dienste der Algebra stehende Hülfswissenschaft ansah. Man hatte Anzeichen genug dafür, dass sich Curventheorie und Analysis fruchtbar durchdringen können; hat es doch auch Euler nicht verschmäht, seiner Introductio als zweiten, grösseren Teil einen Abriss der Geometria sublimior, der „analytischen Geometrie" im heutigen Sinne des Wortes, beizufügen.

G. Leonhard Euler [1748—1764].

(1) Introductio in analysin infinitorum. 2 Voll. Laus. 1748.
(2) Démonstration sur le nombre des points, où deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper. Acad. Berlin, Année 1748 (1750) S. 234—248.
(3) Nouvelle méthode d'éliminer les quantités etc. Acad. Berl. 1764, S. 91—104.

Die „Introductio". Darstellung der Coordinaten gewisser Curven durch einen Parameter. Curven mit besonderen constructiven Eigenschaften.

28. Der erste Band der Introductio, eine Theorie der elementaren Functionen, ihrer Zerlegung in Factoren und Entwicklung in Reihen, u. s. w., entwickelt Methoden, die in den Gedankenkreis der Differentialrechnung einführen, ohne diesen Calcul selbst zu verwenden. Indem Euler an die gewöhnliche Algebra anschliesst, aber auch die bekannteren transcendenten Functionen in die Untersuchung einbezieht, legt er den Grund zu einer Theorie dieser Functionen und schafft jenes Grenzgebiet, das wir heute als algebraische Analysis bezeichnen. Euler's Introductio ist das erste Werk, welches den Begriff der Function an die Spitze stellt und als Einteilungsprincip für den Inhalt benutzt, auf das sich dann im II. Teil auch die Einteilung der Curven und Flächen gründet. Function ist für Euler „quantitatis variabilis expressio analytica quomodocunque composita ex illa variabili quantitate et numeris seu quantitatibus constantibus" (ähnlich schon Joh. Bernoulli, Problème des isopérim. Ac. Par. 1718, Werke II., S. 241). Für Euler scheint es hiernach nur Functionen in expliciter Darstellung zu geben. Hiermit stimmen jedoch nicht ganz die weiteren Definitionen überein. Zunächst sagt er: „Functiones dividuntur in algebraicas et transcendentes, illae, quae componuntur per operationes algebraicas solas, hae in quibus operationes transcendentes insunt." Er teilt dann aber die algebraischen ein in rationale und irrationale Functionen: die letzteren in explicite und implicite, „welche durch eine höhere Gleichung definirt sind" (§ 8). Ein anderer Einteilungsgrund ist ihm die Ein- oder Mehrdeutigkeit (functiones uniformes, multiformes); im letzteren Fall sind sie Wurzeln höherer Gleichungen, deren Coefficienten eindeutige Functionen der Variabeln sind (§ 14). Indessen „wenn eine Function für alle Werte der Veränderlichen nur einen reellen Wert annimmt, wie $\sqrt[3]{P}$, wo P eine eindeutige Function ist, kann man sie meistens auch zu den eindeutigen rechnen" (plerumque loco functionis uniformis usurpari potest, § 15).

Von diesen in sich nicht widerspruchsfreien Definitionen wendet sich Euler alsbald zu den rationalen ganzen Functionen. Dabei erscheint ihm selbstverständlich, dass jede solche in rationale Factoren

ersten oder zweiten Grades zerlegbar ist (vgl. Capp. II. IX). Auf seine Theorie der Auflösung besonderer Gleichungsformen, wie der binomischen etc., gehen wir nicht ein, dies gehört in eine Geschichte der Algebra*). Auch die auf die transcendenten Functionen bezüglichen Teile des Werks übergehen wir hier. Dagegen gedenken wir des Versuchs (§§ 52—58), aus algebraischen Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen diese in independenter Form durch eine dritte (die man heute, mit einer contradictio in adjecto, einen „variabeln Parameter" nennt) auszudrücken. Dies geschieht erstens für trinomische Gleichungen, zweitens für solche, die Kegelschnitte und Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt darstellen; dann für Gleichungen mit Gliedergruppen von drei verschiedenen Dimensionen, deren eine das arithmetische Mittel zwischen den andern ist. In diesen letzten Fällen ist die Parameterdarstellung eine irrationale. — Spuren dieses Bestrebens, Hülfsvariable einzuführen, fanden wir oben Nr. 26 auch bei Cramer (Analyse. § 21, S. 34) mit der Absicht, die Berechnung der Curvenpunkte zu erleichtern, jedoch dort nur als „artifice algébrique", ohne Methode.

Was den zweiten, geometrischen, Band der Introductio anlangt, so ist ein Vergleich mit dem fast gleichzeitigen Cramer'schen Werk nicht ohne Interesse. Zunächst stimmen sie darin überein, dass auch bei Euler die Gleichung zwischen zwei Veränderlichen nur das reelle Gebilde, die „Curve" schlechthin, darstellt, nicht — wie seit Cauchy — den Träger zusammengehöriger complexer Wertsysteme, das „algebraische Gebilde". Deshalb sind ihm nicht nur die unbestimmten Coefficienten reelle Grössen, auch die unabhängige Veränderliche durchläuft bloss das reelle Wertgebiet, und die hierbei sich ergebenden imaginären Werte der Abhängigen haben nur das negative Interesse, dass ihnen kein reeller Curvenzug entspricht.

Dagegen tritt bei Euler das Interesse an der Gestalt der Curven und ihrer singulären Zweige, auch ihrer unendlichen Aeste, deren Behandlung der Cramer'schen nachsteht, zurück hinter dem an den algebraischen Processen als solchen, auf die diese Fragen führen. Namentlich aber beschäftigt ihn die Bildung der Gleichungen von Curven mit vorgegebenen Eigenschaften. Hier lässt Euler sein reiches Erfindertalent spielen. Curven, die einen oder mehrere Durchmesser besitzen, solche mit gewissen Transformationen in sich (Cap. XV), andere, bei denen eine

---

*) Vergl. die Noten in Baltzer's Elem. der Mathematik. I. Bd. 2. Buch § 25; 3. Buch § 7 ff.

Abhängigkeit zwischen den Ordinaten der gleichweit von der Ordinatenaxe abstehenden Punkte besteht (Cap. XVI), oder zwischen den von einem Pole aus nach derselben Richtung gehenden Radienvectoren (Cap. XVII) — alle werden durch angemessene Gleichungsformen dargestellt.

Elimination. 29. Das Cap. XIX de intersectione curvarum enthält jene nach Euler benannte aber, wie Euler (3) selbst sagt, bereits von Newton angewandte Eliminationsmethode, wonach aus zwei höheren Gleichungen eine Unbekannte dadurch eliminirt wird, dass man vermöge einer Combination beider die Grade allmählich soweit erniedrigt, bis man zu zwei linearen Gleichungen gelangt. Weil hierbei im allgemeinen der Grad der Resultante in den Coefficienten zu hoch wird, wenn man nicht zuvor einen nicht immer leicht zu erkennenden gemeinsamen Factor weghebt, so giebt Euler noch ein anderes Verfahren, welches darin besteht, dass man die vorliegenden Gleichungen $m$ten und $n$ten Grades mit unbestimmten ganzen Functionen $(n-1)$ten und $(m-1)$ten Grades multiplicirt und die durch Subtraction entstehende Gleichung befriedigt, indem man die Coefficienten der Potenzen der zu eliminirenden Grösse einzeln gleich Null setzt. Offenbar also ein Vorläufer der Multiplicatoren-Methode von Bézout. Die hinsichtlich der unbestimmten Coefficienten linearen Gleichungen übertreffen an Zahl diese um eins, lassen also deren Elimination zu.

Man sieht, dass hier Euler dieselbe Methode schildert, deren schon Leibniz (s. oben) sich bedient hatte, ohne übrigens darüber etwas zu veröffentlichen. In der That ist der Gedankengang, der zu diesem Verfahren hinführt, und den Euler in (3) darlegt, ein so einfacher, dass es wohl verständlich ist, dass Beide denselben Weg gingen. Sind nämlich fz, φz ganze Functionen $n$ten bezw. $m$ten Grades, so drückt das Verschwinden der Resultante die Bedingung dafür aus, dass f und φ mindestens einen Linear-Factor gemeinsam haben. Dies zieht aber die identische Erfüllbarkeit der Gleichung nach sich:

$$f\varphi' - \varphi f' = 0,$$

wenn f', φ' Functionen vom $(n-1)$ten und $(m-1)$ten Grad sind. Bestimmt man umgekehrt die Coefficienten von zwei ganzen Functionen f', φ' so, dass alle Coefficienten der 1., 2., 3., ... $(m+n-1)$ten Potenz von z in $f\varphi' - \varphi f'$ verschwinden, so ist das übrig bleibende constante Glied die Resultante. Aehnlich bildet Euler in jenem späteren Aufsatz die Bedingungen dafür, dass f und φ zwei und mehr Linearfactoren gemeinsam haben. — Die Frage nach dem Grade der Schlussgleichung hinsichtlich der Coefficienten von f und φ (im Fall einer gemeinsamen Wurzel) erörtert Euler für

diese Form der Resultante nicht noch einmal; auch kommt er nicht mehr auf die hier anschliessende nach der Zahl mn der Schnittpunkte zweier Curven zurück, die er in (2) aufgeworfen (s. oben Cramer), aber in nicht befriedigender Weise behandelt hatte. — Dort hatte Euler vermöge der Form des irrationalen Products, die er der Resultante gab, den Grad m, bezw. n derselben hinsichtlich der Coefficienten der einen und der anderen Componente bestimmt, aber wenn er die Coefficienten der letzteren als ganze Functionen einer anderen Variabeln annimmt, so dass die Gesamtdimensionen m und n sind, so reicht sein Raisonnement, das sich auf die paar ersten Coefficienten erstreckt „et ainsi de suite“ nicht aus, um das behauptete Ergebnis, dass mn der Grad der Resultante ist, zu begründen. Euler fühlt das selbst: „s'il y a dans cette demonstration encore quelque obscurité ... on fera l'application à quelques cas particuliers“ etc., was natürlich die Lücke nicht ausfüllt. Erst Bézout hat diese Frage in befriedigender Form beantwortet.

Additions-Theorem der elliptischen Functionen.

Ueber eine Stelle der Institutiones calculi integralis von Euler, die sich auf die Addition der elliptischen Integrale bezieht und später von weittragender Bedeutung für die Theorie der Functionen werden sollte, werden wir unten berichten (s. Rf. III, Nr. 2 ff.).

H. Étienne Bézout [1764—1779].

(1) Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues et sur le moyen qu'il convient d'employer pour trouver les équations. Mém. Acad. Paris 1764, p. 288—338.

(2) Théorie générale des équations algébriques. Paris 1779. 4°. 471 pp.

(3) Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine. Paris 1775. 3me partie: l'Algèbre.

Elimination aus zwei Gleichungen.

30. Die Elimination der Unbekannten aus einem System von höheren Gleichungen hat für lange Zeit abschliessend Bézout in der ebenso viel berühmten als wenig gelesenen Théorie des équations behandelt, nachdem ein erster Versuch, diese schwierige Frage in der Abhandlung (1) zu erledigen, fehlgeschlagen war.

Zwar für die Elimination aus zwei Gleichungen, die hinsichtlich zweier Unbekannten zur Dimension m und n ansteigen, liefert jene erste Abhandlung — wenn man davon absieht, dass das benutzte lineare Gleichungssystem Besonderheiten aufweisen könnte, die nicht berücksichtigt sind — einen neuen Beweis dafür, dass mn der Grad der Endgleichung ist, und zwar durch Bildung der Resultante auf demselben

Wege der Elimination aus einem System von linearen Gleichungen, den bereits Euler (Ac. Berl. 1764, s. oben Nr. 29) eingeschlagen hatte (ohne indessen dort die Coefficienten der Gleichungen als Functionen einer Variabeln zu betrachten). Wir werden auf dieses Beweisverfahren in dem Bericht über (2) zu sprechen kommen, und handeln hier zunächst von der bekannten Methode, die Jacobi (de eliminat. e duabus aequationibus algebraicis, Journ. für Math. XV. 1835. Werke Bd. III) aus (3), part. III entnimmt. Sind die beiden Gleichungen:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_0 = 0,$$
$$\varphi(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_0 = 0,$$

so multiplicire man 1) φ mit a_n, f mit b_n und subtrahire; 2) φ mit $a_n x + a_{n-1}$, f mit $b_n x + b_{n-1}$ und subtrahire wieder, 3) φ mit

$$a_n x^2 + a_{n-1} x + a_{n-2} \quad \text{u. s. w.}$$

Jede der so erhaltenen n Gleichungen wird vom Grad $n-1$ in x; ihre Resultante, die eines in $x^{n-1}, x^{n-2}, \ldots 1$ linearen homogenen Gleichungssystems, ist die gesuchte Gleichung. Dieses unter dem Namen des Bézout'schen bekannte Verfahren ist seitdem in alle Lehrbücher übergegangen.

Für mehr Gleichungen mit mehr Unbekannten gab nun Bézout in (2) eine Methode, die Jacobi in einem andern berühmten Aufsatz gleichfalls benutzt, merkwürdiger Weise jedoch, ohne Bézout als Vorgänger zu nennen (De relationibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis etc. Journ. für Math. XV, 1836, Werke Bd. III). Wir geben kurz den Gedankengang dieser bedeutenden Leistung Bézout's auf dem Gebiete der Eliminationstheorie, der wenig bekannt ist, wieder, weil sie in einigen Anwendungen auf unsere Theorie fördernd eingewirkt hat. Offenbar würde, so bemerkt Bézout in (2), die successive Elimination der Unbekannten aus einem System von Gleichungen einen zu hohen Grad der Resultante („équation finale“) ergeben. Man bilde sie daher auf dem folgenden Weg, den wir am Falle von drei Gleichungen mit drei Unbekannten x, y, u, von denen die beiden ersten eliminirt werden sollen, schildern werden.

Elimination aus drei und mehr Gleichungen.

31. Gegeben seien die drei Gleichungen:

$$f(xyu)^m = 0, \quad \varphi(xyu)^n = 0, \quad \psi(xyu)^p = 0$$

(die Functionsbezeichnungen f, φ, ψ, die jener Zeit noch fremd waren, führen wir der besseren Uebersicht wegen ein), wo die oberen Indices die Dimension angeben, bis zu der die Polynome ansteigen. Setzt man den Fall „vollständiger Gleichungen“ voraus, d. h. nimmt man an, dass alle Glieder von der angegebenen und von niederer Dimension, die auf-

treten können, auch wirklich vorkommen, und zwar mit unbestimmten Coefficienten, so muss sich (§§ 224, 45) die Resultante R darstellen lassen als lineare homogene Function von f, φ, ψ mit Multiplicatoren F, Φ, Ψ als Coefficienten behaftet („polynomes multiplicateurs"), die selbst Functionen von x, y, u sind, also:

$$1) \qquad R = F.f + \Phi.\varphi + \Psi.\psi.$$

Man drücke nun die höchste Potenz x^n von x, die in φ auftritt, vermöge $\varphi = 0$ durch x, y, u aus, ebenso vermöge $\psi = 0$ die höchste Potenz y^p von y, und setze diese Werte in die rechte Seite der Gleichung 1) ein, nachdem man das Product F.f ausgeführt hat, so dass, wenn M die Dimension von F ist, in dem Product:

$$F(x, y, u)^M . f(x, y, u)^m \equiv P(x^{n-1}, y^{p-1}, u^{M+m})^{M+m}$$

x nur noch in der $(n-1)$ten, y in der $(p-1)$ten, u in der $(M+m)$ten (und in niederen Graden) vorkommen, was wieder durch obere Indices ausgedrückt werden möge. Wegen 1) muss es dann möglich sein, die Coefficienten des Multiplicators F so zu bestimmen, dass die x und y noch enthaltenden Glieder von P alle verschwinden. Berechnet man ihre Anzahl, ausgedrückt durch M, m, n, p, andererseits die der Coefficienten in F (wo x auch in F höchstens bis zur Potenz $n-1$, y bis zur Potenz $p-1$ ansteigt, also F in der Form $F(x^{n-1}, y^{p-1}, u^M)^M$ vorausgesetzt wird) und setzt beide gleich, so erhält man eine Bedingungsgleichung für die Dimension M von F, aus der Bézout $M = mnp - m$ findet. Der Grad von R(u) wird gleich $M + m = mnp$, also gleich dem Product der Ordnungen der vorliegenden Gleichungen. Man erkennt, dass diese Methode wie auch das Ergebnis sofort auf eine beliebige Anzahl von Gleichungen ausgedehnt werden kann.

Der hiermit skizzirte Beweis hat wesentliche Lücken. Namentlich wird nicht näher erklärt, warum R in jener linearen Form darstellbar ist; ja es giebt Fälle, wo eine Function R, wie sie Bézout voraussetzt, nicht existirt: so wenn die drei Gleichungen ausser durch discrete Wertsysteme der x, y, u durch eine continuirliche unendliche Reihe von solchen erfüllbar sind, geometrisch ausgedrückt: wenn die „Flächen" $f = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$ eine räumliche Curve gemeinsam haben*). Auf diesen Fall geht Bézout überhaupt nicht ein. Wohl aber auf den anderen wichtigen, dass die vorliegenden Gleichungen „unvollständig" sind, d. h. zwar zu den angegebenen Dimensionen ansteigen, aber hinsichtlich der

*) Untersuchungen über diesen Fall hat End (Dissertation Tübingen 1887 und Math. Ann. Bd. 36, S. 82) angestellt.

einzelnen Variabeln gewisse vorgegebene niedere Grade, und zu je zweien, zu je dreien, u. s. w. genommen, gewisse Dimensionen nicht übersteigen.

Dasselbe nach einem anderen Verfahren.

32. Für diesen Fall schlägt Bézout einen anderen Weg ein. Er nimmt zwar wiederum R in der Form 1) an, verfährt dann aber in mehr symmetrischer Weise, indem er die drei Multiplicatoren F, Φ, Ψ zugleich so zu bestimmen sucht, dass die Coefficienten aller Glieder mit x, y, die rechts auftreten, verschwinden. Diesen Gedanken hatte Bézout schon in der Arbeit (1) verfolgt, war jedoch dort nicht zum Ziele gelangt, nämlich zu einer von fremden Factoren freien, hinsichtlich der Coefficienten der drei Gleichungen symmetrisch gebildeten Endgleichung mit der einen Unbekannten u, weil er nicht berücksichtigt hatte, dass die Coefficienten jener Multiplicatoren zu dem Zweck, die Unbekannten x, y aus der Gleichung zu entfernen, keineswegs sämtlich zur Verfügung stehen. Erst in dem Werk (2) bemerkt Bézout (§ 233 ff.), dass sich bei n Gleichungen der Multiplicator der ersten Gleichung mit Hülfe der n — 1 übrigen Gleichungen, derjenige der zweiten mit Hülfe der n — 2 nachfolgenden u. s. w. auf eine reducirte Form bringen lässt, und dass hierdurch erst die Zahl der nun noch verfügbaren Coefficienten derart herabsinkt, dass alle Unbestimmtheiten verschwinden.

In der heutigen Bezeichnungsweise lässt sich diese wichtige Bemerkung wie folgt darstellen: die Gleichung 1) lässt sich für beliebige Polynome λ, μ, ν in die Form bringen:

$$R = (F + \lambda\varphi + \mu\psi) f + (\Phi - \lambda f + \nu\psi)\varphi + (\Psi - \mu f - \nu\varphi)\psi.$$

Daher sind von den Coefficienten in F nur diejenigen verfügbar, die übrig bleiben, nachdem vermöge $\lambda\varphi + \mu\psi$ eine möglichst grosse Anzahl in die Form von Zahlencoefficienten übergeführt sind [wo übrigens auch noch $\lambda\varphi + \mu\psi$ durch $(\lambda + k\psi)\varphi + (\mu - k\varphi)\psi$ ersetzbar ist], u. s. w. Macht man insbesondere die Coefficienten der höheren Potenzen der zu eliminirenden Variabeln zu Null, so erhält man diejenige Form der Multiplicatoren, die Bézout in § 311 für den Fall der „équations complettes" angiebt und in § 312 auf den Fall von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten: $f(x, y)^m = 0$, $\varphi(x, y)^n = 0$, wie folgt, specialisirt: Die Multiplicatoren sind alsdann von der Form:

$$F(x^{D-m}, y^{n-1})^{D-m}, \quad \Phi(x^{D-n}, y^{m-1})^{D-n},$$

wo $D = mn$ ist und die oberen Indices wie früher den Grad angeben. Für drei Gleichungen wird:

$$F = F(x^{D-m}, \quad (y, z)^{n+p-2})^{D-m}, \quad \text{u. s. w., wo } D = mnp \text{ ist.}$$

Wir heben, als für die Folge wichtig, von den „équations incom-

plettes" das System der zwei Gleichungen hervor (§ 62):

$$f(x^a, y^b)^m = 0, \qquad \varphi(x^c, y^d)^n = 0,$$

für das Bézout den Grad der Resultante gleich:

$$mn - (m-a)(n-b) - (m-c)(n-d)$$

findet. Für $m = a+b$, $n = c+d$ wird dieser Grad gleich:

$$ad + bc.$$

Wir bemerken ferner vorgreifend, dass Minding sechzig Jahre später die Resultate Bézout's für zwei Gleichungen von neuem beweist, ohne Bézout zu nennen (Journ. f. M. XXII. S. 178). Da, wie oben gesagt, Jacobi ähnlich vorgeht, so scheint es, dass Bézout's Hauptarbeit damals in Vergessenheit geraten war.

In dem Falle specieller Gleichungsformen können auf dem eingeschlagenen Wege hinsichtlich des Grades der Multiplicatoren, der verfügbaren Coefficienten, der Form der Schlussgleichung u. s. w. Unbestimmtheiten eintreten, die selbst die Beharrlichkeit eines Rechners wie Bézout nicht zu bewältigen im Stande war, und deren Untersuchung für mehr als zwei Gleichungen bis heute noch aussteht.

Allerdings ist bei Bézout, so wenig, wie bei seinen Vorgängern auf dem Gebiet der Eliminationstheorie, das Bedürfnis für Strenge der Beweisführung, das erst mit Lagrange und Gauss anhebt, vorhanden. Aber das grosse Material an Beispielen, über das er verfügt, gewährt ihm eine solche Einsicht in die Bildungen, mit denen er operirt, dass mit geringen Einschränkungen seine Ergebnisse richtig sind, und dass jede neue Eliminationsmethode bei dem Vergleiche mit Bézout's Verfahren keinen leichten Stand haben wird.

J. Rückblick auf den ersten Zeitabschnitt (von Descartes bis Euler).

Function. Potenzreihen. Singuläre Stellen einer algebraischen Curve.

33. Mit dem Wiederaufleben der Wissenschaften im Abendland erwachsen aus der Vereinigung der griechischen Geometrie und der morgenländischen Algebra bald nach einander zwei neue grosse Wissenszweige: die Geometrie des Descartes und die Infinitesimalrechnung. Um den Begriff der Abhängigkeit einer Grösse von einer anderen drehen sich alsbald die meisten Probleme, das Leibniz'sche Wort „Function" erlangt Bürgerrecht und durch Joh. Bernoulli die heutige Bedeutung. Newton wendet sein Interesse den impliciten algebraischen Functionen zu und stellt sie durch Potenzreihen dar. In den geometrischen, physikalischen und kinematischen Problemen, mit denen sich Leibniz und seine

Anhänger beschäftigen, nehmen die transcendenten Functionen das grössere Interesse in Anspruch.

Die knappe Form der Newton'schen Schriften, für die Publication nicht abgefasst, liess indessen für die Theorie der Fluxionen, der Reihenentwicklungen und der algebraischen Curven noch viele offene Fragen, deren Beantwortung Taylor, Stirling, Mac Laurin ihre Thätigkeit widmen, während auf dem Festlande die Bernoulli's, de l'Hospital u. A. mit dem weniger streng begründeten, aber fruchtbaren Begriffe des Unendlichkleinen zu vielseitigen Anwendungen übergehen, die ihrerseits wieder neue analytisch-geometrische Begriffsbildungen veranlassen. Eine Theorie der singulären Stellen einer Curve nimmt davon ihren Ausgang, indessen nicht bei den Engländern, denen doch, wie dem Mac Laurin gelegentlich seiner Erzeugung von Curven höherer aus solchen niederer Ordnung, singuläre Stellen begegnen mussten, und die in ihren Reihen die Mittel besessen hätten, sie zu beherrschen. Erst Cramer verbindet die Hülfsmittel der englischen mit denen der festländischen Schule zu einer vollständigeren Theorie der Potenzreihen, zunächst in der Absicht, die reelle Gestalt einer Curve in der Nähe eines singulären Punktes und die Form der in das Unendliche sich erstreckenden Zweige zu erforschen. Die Entwicklungen, deren sich Newton bedient, um deren Convergenz man aber vorerst sich noch keine Sorge macht, erfolgen nach ganzen Potenzen von x oder $1/x$, gebrochene Exponenten kommen gelegentlich bei Stirling und Mac Laurin vor. Das Bedürfnis, für alle singulären Stellen einer Curve die reellen Entwicklungen zu ermitteln, zeigt aber erst Cramer. Mit Mac Laurin's bekanntem Theorem bringt man diese Reihen nicht in Beziehung, wie denn überhaupt für lange Zeit die Wege der Geometrie und der Analysis sich trennen. Euler kann als der letzte Vertreter dieser auch hinsichtlich der Curventheorie an Wissenszuwachs überreichen Periode angesehen werden. Die Ordnung und Begründung des neuen Materials war Aufgabe der nächsten Generation.

Elimination. Newton und Leibniz haben beide die Notwendigkeit erkannt, den Process der Elimination einer Unbekannten aus zwei höheren Gleichungen systematisch auszugestalten. Während der erstere eine Tabelle der Resultanten aus je zwei Gleichungen der vier ersten Grade giebt, entdeckt der andere in der Methode der Stellenzeiger ein Mittel für die Darstellung der Resultante aus zwei Gleichungen von beliebigem Grad, indem er auf Grund des gleichen Hülfsmittels das Resultat der Elimination aus einem System von linearen Gleichungen anschreibt. — Den Satz, dass die Zahl der Schnittpunkte von zwei algebraischen Curven $m$ter

und *n* ter Ordnung gleich *mn* ist, hat zuerst Mac Laurin ausgesprochen. Unvollkommene Beweise desselben, gestützt auf die irrationale Form der Resultante als Product der Wurzeldifferenzen, haben gleichzeitig Cramer und Euler gegeben. Der erstere gelangt dabei von neuem zu der für die Eliminationstheorie wesentlichen Indicesbezeichnung, über die Leibniz nichts publicirt hatte, und zu einer neuen Fragestellung über symmetrische Functionen. Euler greift die Frage der Elimination einer Unbekannten aus zwei Gleichungen später noch einmal auf, indem er wie Leibniz die Bildung des Eliminationsresultates auf ein System von linearen Gleichungen zurückführt. Aber erst Bézout giebt einen mehr befriedigenden Beweis, indem er zugleich seine Methode auf die Berechnung der Unbekannten aus einem System von beliebig vielen Gleichungen höheren Grades mit ebenso vielen Unbekannten ausdehnt und damit einen ersten glücklichen Angriff auf jenes schwierige und bedeutende Problem wagt, das die Wissenschaft noch lange Zeit beschäftigen wird.

Das Interesse der folgenden Zeit wendet sich von der Theorie der algebraischen Curven ab; den Geometer beschäftigt mehr und mehr die Theorie der krummen Oberflächen, die darstellende und bald die projective Geometrie.

Dagegen wirkt der Anstoss fort, den die Analysis durch Newton's Reihenlehre und das Taylor'sche Theorem erhalten hat, und fördert bald neue bedeutende Gesichtspunkte für die Theorie der Reihen und der Functionen.

II. Abschnitt.

Periode der Begründung einer Theorie der Functionen: Lagrange, Gauss, Cauchy, Puiseux.

A. Joseph Louis Lagrange [1770—1796].

(1) Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies. Paris 1796, 277 pp.

(2) Nouvelle méthode pour resoudre les équations litérales par le moyen des séries, Mém. Acad. Berl. XXIV, Année 1768 (erschienen 1770). Oeuvres III, p. 5—73.

Die Functionen-theorie. ihre Grundlage.

1. Die „Théorie des fonctions" (1) leitet neue erhebliche Fortschritte ein, zunächst formaler Natur durch grundsätzliche Benutzung der Zeichen f. F. φ. . . für Function, f′, F′ u. s. w. für deren Differentialquotienten. Zwar hatte man jene Zeichen f, . . . schon früher für unbestimmte Functionen verwendet, wie sie in dem Problem der schwingenden Saiten (d'Alembert 1747) auftreten, oder wie sie Laplace in der Theorie der Capillarität, Lagrange bei Formulirung des Gesetzes für seine Reihe u. A. zur Bezeichnung eines nicht näher specialisirten Abhängigkeitsverhältnisses dienten. Aber lebendige Bedeutung*) erhielt das Zeichen erst, als Lagrange in (1) die Frage aufwarf nach den gemeinsamen Eigenschaften aller „fonctions analytiques" — so nennt er die „expressions de calcul" mit einer oder mehreren Veränderlichen, an die er anknüpft —, und die Frage nach ihrem Zusammenhang mit den Coef-

---

*) „Tel est l'avantage d'une langue bien faite, que ses notations les plus simples sont devenues souvent la source des théories les plus profondes" sagt Laplace (Th. des probab. T. I. 1. partie) bei Gelegenheit der Besprechung der von Descartes eingeführten Exponentenbezeichnung durch Zahlen.

ficienten der Potenzreihe, in welche sie entwickelbar sind. Indem er eine neue Begründung der Differentialrechnung sucht, legt er, was folgenschwerer war, den Grund zu einer allgemeinen Functionentheorie.

Zwar gründet Lagrange seinen Entwurf auf die Annahme, dass seine Functionen in der Form von Reihen, die nach positiven ganzen Potenzen der (selbstverständlich reellen) Veränderlichen fortschreiten und innerhalb eines gewissen Gebietes convergiren, entwickelt vorliegen. Diese Annahme aber beschränkte auch nach der Ansicht der Zeitgenossen zu sehr den Kreis der Functionen, auf welche die Theorie anwendbar ist, um nicht alsbald wieder verlassen zu werden. Cauchy kritisirt in der Vorrede zu seinen Leç. s. l. calcul diff. (Paris 1829) den Ausgangspunkt von Lagrange mit den Worten: La formule de Taylor ne peut plus être admise comme générale, qu'autant qu'elle est réduite à un nombre fini de termes et complétée par un reste. Je n'ignore pas qu'en faisant d'abord abstraction de ce reste, l'illustre auteur ... a pris la formule dont il s'agit pour base de sa théorie ... Mais .. la plupart des géomètres s'accordent maintenant à reconnaître l'incertitude des résultats auxquels on peut être conduit par l'emploi de séries divergentes. Il y a plus: le théorème de Taylor semble, dans certains cas, fournir le développement d'une fonction en série convergente, quoique la somme de la série diffère essentiellement de la fonction proposée ... Als Beispiel einer solchen Reihe, die, wiewohl convergent, doch nicht die Function darstellt, aus der sie durch die Mac Laurin'sche Reihe abgeleitet ist, giebt Cauchy (l. c. X. leç.) diejenige für $e^{-x^2}+e^{-(1/x)^2}$ an, die mit derjenigen für e^{-x^2} völlig übereinstimmt.

Indessen, wie berechtigt auch die Einwände gegen die von Lagrange vorgeschlagene Grundlage einer Functionentheorie*) waren: der Anfang war gemacht; eine neue Basis liess sich finden, wenn man den Kreis der bekannten Functionen weiter ausdehnte und ihre Kenntnis vertiefte. Lagrange hatte gewünscht, durch seine „dérivées" das Unendlichkleine von Leibniz und von Euler zugleich mit dem Verhältnis verschwindender Grössen (ultima ratio) von Newton aus der Differentialrechnung zu verbannen. Zwei Decennien später hat Cauchy eben den Begriff des Grenzwertes in neuer Definition an die Spitze seines Cours d'Analyse gestellt. Und doch beruht auch Cauchy's für die Theorie der Func-

---

*) Neuerdings hat das Lehrbuch der Differentialrechnung von O. Stolz (Leipz. 1893) die Lagrange'sche Auffassung für die Theorie der Functionen von mehr Variabeln mit Vorteil wieder verwendet.

tionen grundlegendes Werk auf dem Anschauungskreis, den Lagrange geschaffen, und verfolgt die Tendenz, die diesen leitete.

Das Restglied der Taylor'schen Reihe: Fälle, wo die Entwicklung nicht nach den Regeln erfolgt.

2. Weiter war für die Zukunft bedeutsam, dass Lagrange darauf Wert legt, die Gültigkeit seiner Entwicklungen zu sichern. Er verwirft die Methode der unbestimmten Coefficienten, weil sie keine Vorstellung giebt von dem Fehler, den man begeht, wenn man die Reihe an irgend einer Stelle abbricht ((1) § 46). Sein Verfahren der Reihenentwicklung — „lorsque le développement est susceptible de cette forme" ((1), § 34) — liefert dagegen ein Restglied (§ 47), zunächst in Form eines bestimmten Integrals, dessen Wert jedoch in feste Grenzen eingeschlossen wird — wie man es früher nicht aufgestellt, ja nicht einmal vermisst hatte. — Wir bemerken anschliessend, dass die prägnante Form, die später Cauchy dem Restglied gegeben hat (vgl. Pringsheim, Math. Ann. Bd. 44, S. 73), zuerst wohl in den Exercices de Math. 1, 1826, p. 25 erscheint.

Dass es Functionen giebt, die, obwohl unter Lagrange's „expressions de calcul" eingeschlossen, überhaupt keine Potenzentwicklung zulassen, wusste man damals noch nicht. Wohl aber macht Lagrange auf die Fälle aufmerksam, wo die Entwicklung von f(x+i) nach ganzen positiven Potenzen von i für specielle Ausgangswerte x unmöglich wird. Dies tritt, wie übrigens schon Mac Laurin bemerkt hatte, für ein solches x ein, für das alle Ableitungen von fx von irgend einer bestimmten an unendlich werden und, nach Lagrange, nur für ein solches x. Alsdann müssen in der Entwicklung von f(x+i) (§ 42) gebrochene positive Exponenten vorkommen, und wenn alle Functionen fx, f'x, ... unendlich werden, auch negative Exponenten. Wie man in diesen Fällen zur wahren Form der Entwicklung gelangt, wird nur an einem Beispiel gezeigt, in dem eine gebrochene Potenz als Factor vor eine nach ganzen Potenzen aufsteigende Entwicklung vortritt. Geometrisch zu reden, hat die Curve $y = fx$ an jener Stelle „un rebroussement" (§ 42), wenn der Nenner des Bruches im Exponenten gerade ist.

Klarer überschaut Lagrange den Fall des vielfachen Punktes der Curve $F(x, y) = 0$, der eintritt, wenn die erste Ableitung der Function y, die nach der Auflösung etwa einen Wurzelausdruck enthält, unbestimmt wird. Diese Ableitung bestimmt sich alsdann aus einer höheren Gleichung, die man durch Weiterdifferentiiren der Gleichung $F = 0$ erhält (§ 35), und es tritt eine Spaltung der Entwicklung in mehrere ein. — Wir weisen darauf hin, dass alle diese Fälle, sofern es sich um algebraische Functionen handelt, ohne die Hülfsmittel der Differentialrechnung weit erschöpfender

und übersichtlicher längst von Cramer (I. Nr. 24) erledigt waren. Allerdings will Lagrange's Darstellung auch für andere Functionen gelten; beschränkt man sich auf algebraische, so muss auch hier an De Gua's eindringliche Warnung vor dem Gebrauch der Differentialmethoden erinnert werden, wo man mit endlichen Operationen, namentlich Transformationen, ausreicht.

Ablösung der Analysis von der Geometrie.

3. Die Anwendungen im dritten Teile des Werkes zeigen, dass die anschauliche Interpretation der analytischen Methoden dem Verfasser nicht nur geläufig ist, sondern ihm wohl teilweise die Anregung zu ihnen gab. Aber Lagrange wollte die Differentialrechnung, deren Begründung in den viel gelesenen Lehrbüchern seiner Zeit von de l'Hospital und Mac Laurin auf geometrische Anschauung sich stützt, in Euler's Institutiones calculi differentialis mit dem schwer fassbaren Begriff des Unendlichkleinen vom Wert Null verquickt war, auf eigene, sichere Grundlage stellen, und indem er den Versuch wagte, seinen Beweisen „den Charakter von Evidenz und Strenge zu geben, der die Lösungen der Alten auszeichnet" (§ 108), bezeichnet er bereits die Aufgaben und Ziele der heutigen Functionentheorie. Es war nur eine Folge dieses Vorgehens, dass auch aus der analytischen Geometrie sich ein abstracter Zweig absonderte, der, an die Gleichungen mit veränderlichem Parameter anknüpfend, sich bald zu einer Theorie der algebraischen Functionen auswuchs.

Die Lagrange'sche Reihe.

4. Auf eine solche Gleichung bezieht sich die Abhandlung (2), in der zum erstenmal die später nach Lagrange genannte Reihe auftritt. Wir berichten über sie, weil Cauchy's Untersuchungen über Reihenconvergenz an sie zunächst angeschlossen haben.

Lambert hatte in einer Schrift: Observationes variae in mathesin puram (Acta Helvetica, Vol. III, 1758) eine der Wurzeln der trinomischen Gleichung $x^m + px + q = 0$ nach aufsteigenden Potenzen von q/p entwickelt (l. c. § 38), und indem er den Grenzwert bestimmte, dem der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder zustrebt (l. c. § 47), gefunden, dass diese Reihe nur dann convergirt, wenn $(m-1)^{m-1} p^m > m^m q^{m-1}$ ist *).

Diese Methode der Auflösung greift Lagrange auf und giebt ihr in (2) eine ebenso neue wie elegante Wendung, indem er den Satz ausspricht (wir wählen eine etwas speciellere Form):

Ist φx eine beliebige Function von x (L. beschäftigt sich ausführ-

*) Ueber die Entwicklung des Convergenzbegriffs s. Reiff, Geschichte der unendlichen Reihen, S. 50 ff., S. 118 ff.

licher nur mit dem Fall, dass φ ein Polynom aus beliebigen Potenzen in x ist), so genügt der Gleichung:

$$u - x + \varphi x = 0$$

die folgende („Lagrange'sche") unendliche Reihe für x:

$$x = u + \varphi u + \frac{1}{2}\frac{d}{du}[\varphi u]^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^2}{du^2}[\varphi u]^3 + \cdots$$

Es ist übrigens nur eine der Wurzeln x, die in dieser Form sich darstellen lässt, nämlich, wie später Cauchy und Chio (s. No. 5) gezeigt haben, die, welche, wenn die Coefficienten in φx der Null sich nähern, dem Wert u nahe kommt.

Der Beweis, den Lagrange führt, setzt die Function φx in Form einer unendlichen Reihe nach ganzen positiven Potenzen in x gegeben voraus (also bereits 1770) und beschränkt sich auf die Vergleichung der Coefficienten einiger Glieder.

Anschliessende Convergenzuntersuchung.

5. Die Convergenzuntersuchung (§ IV), welche die Lücke ausfüllen soll, setzt, wie später Chio (Savans étr. XII. 1854, vergl. das Ref. von Cauchy in C. R. XXXIV. S. 304) bemerkt, implicite in dem Polynom φx sowohl die Exponenten wie die Coefficienten mit demselben Vorzeichen voraus, ist also im allgemeinen nicht verwendbar. Sie erfolgt nach einem auch von Laplace, Gauss und Cauchy vielfach angewendeten Verfahren, indem nämlich die Glieder mit hohem Stellenzeiger n derart umgeformt werden, dass die Reihe in eine geometrische (oder vielmehr in $\Sigma u^n/n^b$, § IV) übergeht, deren Convergenz und Divergenz die der vorliegenden Reihe bedingt.

Die Reihe erregte wegen ihrer Eleganz und vielseitigen Verwendbarkeit das grösste Interesse. Auf das Kepler'sche Problem, die Auflösung der Gleichung $x = t - c \sin x$ nach x, hat sie Lagrange selbst angewendet (Mém. Berl. Ac. XXV, 1771, Oeuvres III, S. 113—138), jedoch ohne specielle Convergenzbestimmung. Laplace hat im Anschluss hieran in der Mécanique céleste (T. I, livre II, No. 22, 1799) die Entwicklung des Radiusvector R einer Planetenbahn nach der Zeit in eine nach aufsteigenden Potenzen der Excentricität c fortschreitende Reihe durch Elimination von x aus den Gleichungen $R = 1 + c \cos x$, $t = x + c \sin x$ vorgenommen. Aber erst im Jahre 1827 (Mém. Instit. Par. VI, p. 61) konnte er die Grenzen für die Excentricität bestimmen, innerhalb deren die Reihe convergirt. Auch die Entwicklung des Ausdrucks

$$(1 - 2\alpha \cos \Theta + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$$

nach Kugelfunctionen, die Laplace (Méc. cél. T. I, livre II, § 49) nach der Methode der unbestimmten Coefficienten ausführt, hätte er, wie

später Cauchy zeigt (Mém. Instit. VIII. S. 118). durch Anwendung der Lagrange'schen Reihe auf die Gleichung $x = \cos\Theta + 1/2 . \alpha(x^2 - 1)$ erhalten können. Indessen mit der Zunahme der praktischen Bedeutung der Reihe hatten die theoretischen Ergebnisse namentlich hinsichtlich ihrer Convergenz keineswegs gleichen Schritt gehalten. So richtete sich, wie wir später sehen werden, das Interesse von Cauchy auf die fundamentale Aufgabe, die Convergenzuntersuchung statt an dem allgemeinen Term der Reihenentwicklung, wie dies noch Laplace in jenem Beispiel gethan, an der zu Grunde gelegten Gleichung selbst vorzunehmen, die ja doch alle in die Reihe eingehenden Eigenschaften und zwar in übersichtlicherer Form bereits enthält.

B. **Carl Friedrich Gauss** [1799—1815].

(1) Demonstratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse, Dissertat. Helmstädt 1799; C. F. Gauss Werke Band III, 1876, S. 1—30.

(2) Demonstratio nova altera theorematis etc. Comm. Gotting. 1815, Vol. III, Werke III, S. 31—56.

(3) Theorematis de resolubilitate functionum algebraicarum integrarum in factores reales demonstratio tertia, ibd. 1816, Werke III, S. 57—64.

(4) Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel, Leipzig 1880, Brief von Gauss vom 12. Jan. 1812, Werke III, S. 156.

Die Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra.

6. Dass Gauss, dessen Wissen und Können sich auf alle Gebiete der mathematischen Forschung erstreckte, einen Einfluss auch auf die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen geübt habe, die ihrerseits sich mit so vielen Zweigen berührt, wird man ohne weiteres annehmen dürfen. Und doch lässt sich ein einzelner für unsere Theorie epochemachender Satz nicht nachweisen, den die Litteratur auf Gauss zurückführt. Seine auf die Theorie der Gleichungen bezüglichen Untersuchungen haben mehr die Methoden als die Ergebnisse der Functionentheorie gefördert; die Beweise (1), (2) des Fundamentalsatzes der Algebra vor allem insofern, als es sich darum handelte, ein Theorem einwurfsfrei zu begründen, dessen Richtigkeit zwar niemand in Zweifel zog, an dessen ausstehendem Beweis aber bis dahin sich die besten Köpfe mit zweifelhaftem Erfolg versucht hatten. Die Kritik dieser früheren Versuche, die den ersten Beweis (1) einleitet, legt einen Massstab an,

dem selbst die Strenge eines Lagrange nicht völlig Stand hält. Wesentlich von Lagrange und Gauss' Erstlingsarbeit datirt dann auch diejenige Richtung, die sich — nach dem Muster der Alten — die Vertiefung der Begriffe, die strenge Begründung und genaue Umgrenzung der Sätze zur Aufgabe stellt, und die zunächst in Cauchy ihren hervorragendsten Vertreter gefunden hat.

Daneben enthält die Abhandlung (1), deren Inhalt übrigens Gauss später einer vereinfachenden Umarbeitung unterzogen hat (Gött. Abhndlg. 1850. Werke III. S. 75), jene bekannte Stelle (Note zu § 3), wo der Verfasser die imaginären Grössen als quantitates possibiles für die Algebra reclamirt, und jene, wo die imaginäre („Gauss"'sche) Ebene für die Interpretation der complexen Zahlen (§ 16) verwendet wird. Es mag bei diesem Anlass hervorgehoben werden, dass bei Gauss und Lagrange, wie noch lange nach ihnen bei Cauchy, Jacobi, Abel u. s. w. die unbestimmten Coefficienten — wo nichts Näheres gesagt wird — reelle Grössen (negative und irrationale einbegriffen) bedeuten, und nur die Unbekannten und die Variabeln werden, wiewohl als complex gedacht, doch mit einem Buchstaben bezeichnet, bewusst übrigens erst bei Cauchy in seinen späteren Arbeiten.

Sätze über Elimination.

7. Der zweite Beweis (2), welcher auch dem letzten Einwand sich entzieht, den man gegen (1) erheben konnte: die Benutzung geometrischer Hülfsmittel, enthält wichtige Beiträge zur Elimination. So ein (übrigens bereits von Waring in den medit. algebr. 3. ed. p. 13 angegebenes) Verfahren zur Darstellung einer symmetrischen Function der Wurzeln durch die Coefficienten der Gleichung; ferner den Satz, dass das Product der Wurzeldifferenzen (von Gauss „Determinante", heute nach Sylvester „Discriminante" der Gleichung genannt) durch eine lineare Combination der linken Seite der Gleichung und deren erster Ableitung darstellbar ist, und dass danach die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass diese beiden einen gemeinsamen Factor haben, das Verschwinden der Discriminante ist. Hierdurch erhält die schon vor Erfindung der Differentialrechnung von Hudde (Geom. a Descartes, ed. Schooten, ed. 2ª 1659. I p. 507) gelöste Frage nach der Gleichung, die zu einer gegebenen mit gleichen Wurzeln derart gehört, dass sie diese Wurzel einfach enthält, ihre abschliessende Beantwortung, eine Frage, die auch in der Theorie der Maxima und Minima der algebraischen Curven auftritt und deshalb mit den Hülfsmitteln der Differentialrechnung von de l'Hospital und von Newton (Geom. analyt. Cap. V) von neuem behandelt worden war.

Umkehrung der Integrationsordnung bei Doppelintegralen.

8. Der dritte Gauss'sche Beweis steht zu der Theorie der Functionen in noch näherer Beziehung. Ausführungen und Andeutungen, die man dort findet, wären, zusammen mit dem Inhalte des Briefes (4), von dem wir gleich sprechen werden, wohl geeignet, die Priorität Cauchy's hinsichtlich der bekannten Sätze über die Integration durch imaginäres Gebiet in Zweifel zu ziehen, wenn man auf Nichtveröffentlichtes Prioritäts-Ansprüche gründen wollte. Hinsichtlich jenes dritten Beweises, welcher lange vor der einschlägigen Arbeit Cauchy's (1825, s. unten C.) erschienen ist, hat dies auch schon der Biograph Cauchy's (Valson, la vie etc. de Cauchy 1868, T. II, pp. 26, 82) empfunden, aber, da ihm der Inhalt jenes Briefes unbekannt war, mit den Worten bestritten: „C'est là un des points où l'on peut dire que ces deux grands géomètres se sont touchés de plus près. Mais la notion fondamentale des intégrales prises entres des limites imaginaires a entièrement fait défaut [?] à Gauss.“

Aus dem Folgenden scheint hervorzugehen, dass Gauss seine Kenntnis von den imaginären Integralen auf die Umkehrung der Integrationsordnung bei Doppelintegralen bloss anwandte, während Cauchy sich jedenfalls mit den beiden Untersuchungsobjecten in der umgekehrten Reihenfolge beschäftigt hat.

In (3) betrachtet Gauss ein gewisses Doppelintegral Ω, das sich über eine Kreisfläche erstreckt, deren Radius so gross gewählt ist, dass alle in der imaginären (Gauss'schen) Ebene etwa vorhandenen Nullpunkte einer ganzen algebraischen Function von $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ mit reellen Coefficienten: $Z = t + iu = P(\cos\Phi + i\sin\Phi)$ innerhalb der Kreisfläche liegen. Der Integrand $\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\varphi} = p$ des Doppelintegrals:

$$\Omega = \iint \frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\varphi}\, dr\, d\varphi$$

ist eine gebrochene rationale Function von r, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, deren Nenner

$$P^4 = (t^2 + u^2)^2$$

ist. Würde nun Z, d. h. P, in jenem Kreise nicht irgendwo gleich Null, so könnte eine Aenderung der Integrationsfolge bei Ausführung des Doppelintegrals das Resultat nicht ändern. Gauss zeigt aber, dass $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$ innerhalb des Kreises eine wesentlich positive, von Null verschiedene Grösse ist. Dies müsste also auch mit Ω der Fall sein, während doch andererseits in den Grenzen $\varphi = 0, 2\pi$ die Grösse $\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 0$ ist, also

auch Ω gleich Null sich ergiebt. Dieser Widerspruch liefert die Thatsache, dass $Z = 0$ in jenem Flächenraum Wurzeln besitzt.

In einer Anmerkung berechnet Gauss den Wert des Integrals $\int \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} d\varphi$ zwischen $\varphi = 0$ und 2π, welcher bei der Vieldeutigkeit der Function Φ von φ nicht unmittelbar ersichtlich ist, aus Gründen, die er nicht angeben will („aliunde"), zu $2m\pi$, wo m der Grad von Z in z ist. Um jenen Widerspruch näher zu erklären, äussert sich Gauss noch weiter über einfache Integrale mit Unstetigkeitsstellen, wie $\int \frac{d\xi}{\xi^2}$ zwischen reellen Grenzen, innerhalb deren der Punkt $\xi = 0$ liegt, und weist darauf hin, dass ihr Wert sich nicht „durch den blinden Mechanismus des Calculs" bestimmen lasse, auf diesem Wege vielmehr zu Widersprüchen führe.

Insbesondere hat jenes Doppelintegral Ω nur in demjenigen Stück eines Kreisrings einen endlichen Wert, wo der Integrand p nicht unendlich [unbestimmt] wird. „Wird aber dieser Ausdruck innerhalb desselben unendlich [unbestimmt], so ist eigentlich die Frage nach dem Werte des Integrals ungereimt", weil nämlich $\Phi = \operatorname{arctg} \frac{u}{t}$ eine vieldeutige Function ist.

Durch die Klammern [ ] deuten wir eine Ungenauigkeit des Ausdrucks bei Gauss an, die Cauchy (s. unten) vermieden hat. In der That wird jene Function p von zwei Variabeln in $u = 0$, $t = 0$ nicht unendlich, sondern, weil u und t auch im Zähler von p homogen auftreten, wirklich unbestimmt.

Wiewohl Cauchy von einem Zusammenhang zwischen seinen Untersuchungen und denen von Gauss, soviel wir wissen, an keiner Stelle spricht, so besteht doch ein solcher weiterhin noch zwischen der oben erwähnten Anmerkung von Gauss in (3) und zwischen dem später zu besprechenden (Nr. 29) Cauchy'schen Beweis für die Zahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung. Denn jene Zahl $2m\pi$ für den Wert des Integrals $\int \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} d\varphi$, erstreckt über den Kreisumfang, verwandelt sich sogleich in $2mi\pi$ für das Integral $\int \frac{dZ}{Z}$, genommen über ein Rechteck von genügender Ausdehnung, indem wegen

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{dP}{P} + i\,d\Phi$$

die Vieldeutigkeit von Φ sich auf log Z überträgt, da log P für immer positives P bestimmt und eindeutig bleibt (vgl. auch Cauchy, Exerc. de Math. I, 1826, S. 205ff.).

Integration zwischen imaginären Grenzen.

9. Auf die Frage, weshalb die Umkehrung der Integrationsordnung unter Umständen nicht erlaubt ist, sind unzweifelhaft Gauss und Cauchy unabhängig von einander gekommen. Die damit zusammenhängende Frage aber nach dem Wert eines zwischen complexen Grenzen genommenen einfachen Integrals ist ebenso sicher zuerst von Gauss erörtert worden, wenn auch nur in einer privaten Mitteilung an Bessel (4) im Jahre 1812, über die wir jetzt berichten wollen.

Anknüpfend an eine Abhandlung von Bessel über den Integrallogarithmus weist Gauss auf die Notwendigkeit hin, auch imaginäre Grenzen in Betracht zu ziehen, bespricht kurz die Repräsentation der imaginären Grösse $a+bi$ durch die Punkte einer Ebene und fährt dann fort: „Was soll man sich bei $\int \varphi x.dx$ für $x = a+bi$ denken? Offenbar, wenn man von klaren Begriffen ausgehen will, muss man annehmen, dass x durch unendlich kleine Incremente von demjenigen Werte, für welchen das Integral Null sein soll, bis zu $x = a+bi$ übergeht und dann alle $\varphi x.dx$ summirt. — — Der stetige Uebergang von einem Werte von x zu einem anderen $a+bi$ geschieht [in jener Ebene] durch eine Linie und ist mithin auf unendlich viele Arten möglich. Ich behaupte nun, dass das Integral $\int \varphi x.dx$ nach zwei verschiedenen Uebergängen immer einerlei Werte erhalte, wenn innerhalb des zwischen beiden die Uebergänge repräsentirenden Linien eingeschlossenen Flächenraumes nirgends $\varphi x = \infty$ wird. Dies ist ein sehr schöner Lehrsatz, dessen eben nicht schweren Beweis ich bei einer schicklichen Gelegenheit geben werde. Er hängt mit schönen anderen Wahrheiten, die Entwicklungen in Reihen betreffend, zusammen“ u. s. w. In einer Anmerkung weist er darauf hin, dass innerhalb jenes Flächenraums φx als eindeutig („einförmig“) vorausgesetzt wird. — Es folgt dann noch eine Anwendung auf das Integral $\int \frac{dx}{x}$, wobei Gauss die Perioden dieses Integrals aus den verschiedenen Umläufen um den Punkt $x = 0$ erklärt. Hiervon weiter unten (Cauchy). Er fordert Bessel auf, diese Gesichtspunkte auf die Untersuchung des Integrals $\int \frac{e^x - 1}{x} dx$ zu übertragen.

Man sieht, dass damals schon Gauss einen Gedankenkreis beherrschte, der erst nach Decennien die Zierde der bedeutendsten Arbeiten von Cauchy bilden sollte.

Wir werden, was Gauss anbetrifft, später noch über gewisse in der Abhandlung über die hypergeometrische Reihe enthaltene Gedanken zu reden haben, die dann von Cauchy weiter ausgeführt wurden, und von dem Anteil, den diese und die Abhandlung über das Potential an dem Ideenkreis hatte, aus welchem Riemann's Arbeiten hervorgewachsen sind.

C. Augustin Louis Cauchy [1814—1851].

Der Begriff Function in der mathematischen Physik.

10. Der Begriff Function hatte um die Wende des Jahrhunderts vornehmlich durch die mathematische Physik eine Erweiterung weit über den Bereich hinaus erfahren, der bisher der Analysis zugänglich war. Während Gauss in seinen älteren Abhandlungen geschlossene Ausdrücke meint, wenn er von Functionen spricht, oder, wenn er die hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ eine Function der Elemente α, β, γ, x nennt, die Wendung „tamquam functio ... spectari potest" gebraucht, sind Lagrange's „fonctions analytiques" bereits [gewöhnliche] Potenzreihen ohne vorgegebenen Convergenzbereich; in der Mécanique analytique (2. Aufl. 1811 bis 1815) gebraucht Lagrange die Bezeichnung Function für jede Art von Abhängigkeit, sogar für eine solche, bei der ein vollständiges Differential nicht existirt, die nicht eine „fonction algébrique" [analytique], liefert. [1. Band Dynamique. IV, § 14; vergl. übrigens eine andere Deutung dieser Stelle in der Anmerkung von Bertrand zur 3. Aufl. 1853]. Nachdem nun Fourier in einer Abhandlung über die Wärme*) die überraschende Thatsache bekannt gemacht hatte, dass jede willkürlich (graphisch) gegebene Function einer reellen Veränderlichen in Form einer convergenten trigonometrischen Reihe sich darstellen lasse, wuchs mit einem Mal das Gebiet derjenigen Functionen, die der Analysis zugänglich waren, ins Unabsehbare, und so wurde eine feste Basis wünschenswert, von der aus man an der Hand eines zweckmässigen Einteilungsgrundes das Gebiet übersehen und verschiedene Darstellungsarten derselben Function mit einander vergleichen konnte. Diese Basis lieferte Cauchy's Theorie der Potenzreihen.

Bevor wir in die Besprechung der für unsere Theorie grundlegenden Abhandlungen Cauchy's über bestimmte Integrale und über Potenzreihen eintreten, müssen wir eines Werkes von demselben Verfasser gedenken, das am meisten bezeichnend ist für die Richtung, in der seine Haupt-

*) Siehe den geschichtlichen Abriss über trigonometrische Reihen in Riemann's „Darstellung einer Function durch eine trigonometrische Reihe", Abh. Gött. Ges. Bd. 13; Werke S. 213.

leistungen liegen, und für den Umschwung, der durch seine Arbeiten in der Analysis und Functionentheorie eingeleitet worden ist, nämlich den:

(1) Cours d'Analyse, Paris 1821.

11. Beschäftigt mit den grossen Aufgaben, welche durch den neuentdeckten Calcul den Mathematikern des 18. Jahrhunderts erwachsen waren, hatten diese nicht Musse gefunden, die gewonnenen Ergebnisse sicher zu stellen und sie auf den Umfang ihrer Verwendbarkeit und etwaige Ausnahmen zu prüfen. Zahlreiche Compendien und Lehrbücher hatten versucht, den reichen Stoff auf jedem der verschiedenen Gebiete in ein Lehrgebäude zusammenzufassen. Aber wer die Methoden der Alten, die man damals noch mehr als jetzt zur Grundlage des mathematischen Studiums machte, als strengen Masstab anlegte, konnte von keinem derselben befriedigt sein. Namentlich die damals vielgelesenen Werke über Infinitesimalrechnung von de l'Hospital, Mac Laurin, Euler, Lagrange, Lacroix verfallen mehr oder weniger in den Fehler, die algebraische Allgemeingültigkeit ihrer Formeln stillschweigend vorauszusetzen, und ziehen daraus oft voreilige Schlüsse. Es galt (Cauchy, Einleitung zu dem Cours d'analyse) „den Lehrsätzen grössere Strenge zu geben und allzu ausgedehnte Behauptungen zu beschränken“.

Neue Formulirung der Begriffe stetig, Grenzwert, Function.

Dieses Ziel, das übrigens, wie wir gesehen haben, auch schon Gauss und Lagrange in ihren Untersuchungen stets vor Augen hatten, verfolgt nun unser Autor in Bezug auf die Theorie der Functionen, namentlich der rationalen, der elementaren transcendenten und der Potenzreihen überhaupt. Ueber den Erfolg dieses Bestrebens urteilt Abel in der Abhandlung über die Binominalreihe, die selbst ein unerreichtes Muster exakter Schlussweise ist, mit den Worten: „Dieses ausgezeichnete Werk sollte von Jedem gelesen werden, der in den mathematischen Untersuchungen die Strenge liebt.“ Dabei verlässt Cauchy gänzlich den Weg seiner Vorgänger, die, wie Euler, an Functionen in expliciter Darstellung oder, wie Lagrange, an die Potenzreihe anknüpfen und deshalb auf gewisse Begriffe, die Cauchy in den Vordergrund stellt, überhaupt nicht oder nur nebenher zu sprechen kommen.

Es ist der Leibniz'sche Begriff der unendlich kleinen Grösse, den in präciser und von jedem metaphysischen Beiwerk freien Fassung Cauchy an die Spitze stellt. Er schliesst den Begriff der Stetigkeit reeller Functionen ein, der von ihm ganz so, wie vor ihm schon von Bolzano (die drei Probleme der Rectification etc. Leipzig 1817 § 2; u. a. a. O.*))

*) Vergl. O. Stolz, R. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung, Math. Ann. XVIII, S. 255—279.

formulirt wird. Noch Euler und Lagrange hatten gelegentlich eine Function dort „stetig" genannt, wo sie allenthalben demselben (analytisch formulirten) Abhängigkeitsgesetz genügt, unstetig dort, wo die Gleichung sich ändert, aus der sich die abhängige Grösse bestimmt. Seitdem man aber wusste, dass jeder, auch gebrochene, Linienzug über der Axe der unabhängigen Variabeln mit Hülfe einer trigonometrischen Reihe dargestellt werden kann, konnte von formal verschiedenen Abhängigkeitsgesetzen bei derselben Function in dem Euler'schen Sinne nicht mehr gesprochen werden. Cauchy ersetzte daher jene Definition durch die folgende:

„Die Function f(x) von x ist stetig zwischen zwei gegebenen Grenzen, wenn für jeden zwischen diesen Grenzen gelegenen Wert von x der numerische Wert der Differenz $f(x+\alpha)-f(x)$ mit α zugleich so abnimmt, dass er kleiner wird, als jede endliche Zahl." (Chap. II, § 2)*).

Der hieran anschliessende Begriff des Grenzwerthes gewährt die Mittel, um Functionen an ausgezeichneten Stellen zu untersuchen: „eine der heikelsten und wichtigsten Fragen der Analysis".

Schon in diesem Werke zeigen sich Spuren des Bestrebens, den Begriff Function loszulösen von der wirklichen Darstellung. Cauchy adoptirt in dieser Hinsicht offenbar die Anschauung, die schon 1797 Lacroix (Traité de calcul diff. et de calcul intégr. T. I. Introduction) ausgesprochen hatte: „Toute quantité dont la valeur dépend d'une ou de plusieurs autres quantités est dite fonction de ces dernières, soit qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première", wozu Lacroix als Beispiel die Wurzel einer Gleichung fünften Grades als Function der Coefficienten heranzieht. Eine „implicite Function" ist gegeben durch irgend eine „Beziehung", eine Gleichung (Chap. I, 1), auch eine Functionalgleichung (Chap. V), eine Reihe (Chap. VI) oder durch eine Anzahl ihrer Werthe als ganze Function (Chap. IV). Auch später schliesst Cauchy an diese Auffassung der Begriffe: Function einer reellen Variabeln und „stetig" immer wieder an. So wenn er C. R. XVIII, p. 116 (1844) sagt: „Die analytischen Gesetze, denen Functionen unterworfen werden können, lassen sich im Allgemeinen durch algebraische oder transcendente Formeln ausdrücken. Dabei kann es vorkommen, dass verschiedene Formeln für gewisse Werthe der Variabeln [Intervalle] die-

---

*) Später hat Cauchy eine Zeitlang, um die frühere Formulirung seiner Convergenzsätze aufrecht erhalten zu können, in den Begriff der Stetigkeit den der Eindeutigkeit einbezogen (s. unten Nr. 24).

selbe Function darstellen, für andere aber verschiedene Functionen." So stimmt das Integral

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{x^2 dt}{t^2+x^2}$$

für positive Werthe von x mit $+x$, für negative mit $-x$ überein. In dem oben erwähnten Sinne von Euler und Lagrange wäre es eine discontinuirliche Function, im Sinne des Cours d'analyse aber ist es eine stetige Function.

Wir wollen jedoch unterlassen, auf den Inhalt eines Werkes näher einzugehen, das heutzutage die Grundlage einer jeden Vorlesung über Functionentheorie bildet, und heben nur noch folgende Einzelheiten hervor, die zur Theorie der algebraischen Functionen Beziehung haben.

Functionen von imaginären Variabeln.

12. Die imaginären Grössen und die Functionen derselben, welche den Inhalt der Kapitel VII—X ausmachen, werden hier zum ersten Mal principiell und mit genauer Umgrenzung ihrer Gültigkeit in die Analysis eingeführt. Den Wert der imaginären Grössen für reelle Beziehungen (insbesondere für die n-Theilung eines Winkels) hatte schon 1712 Joh. Bernoulli (Opera I. §§ 70, 89) erkannt. Das Moivre'sche Theorem (1730) war dann von Euler, der zugleich die Kreisfunctionen als imaginäre Exponentialfunctionen auffasste, der Darstellung aller complexen Grössen dienstbar gemacht worden, indem er die Letzteren durch Modul und Argument darstellte. Aber wie zaghaft man vor Cauchy gegenüber der Anwendung dieser Grössen in der höheren Analysis war, zeigen die Bedenken gegen bestimmte Integrale mit imaginären Grenzen, die bei Laplace und noch in Cauchy's erster Arbeit über diesen Gegenstand zum Ausdruck kommen (vgl. unten Nr. 15). Diese Euler'schen Ergebnisse stellt nun Cauchy voran. Indessen benutzt er nicht die geometrische Einkleidung, wie sie Gauss begründet und Argand (1806) der Rechnung mit complexen Grössen so wirksam zu Grunde gelegt hatte. Vielmehr bringt Cauchy in analytischer Form den Nachweis, dass die gewöhnlichen Reihenoperationen auf imaginäre Grössen wirklich anwendbar sind, sowie dass der Begriff der Stetigkeit auf Functionen mit complexem Argument ausdehnbar ist. In Kap. IX wird die Convergenz der Reihen mit complexen Gliedern auf diejenige der Reihe der Moduln zurückgeführt, eine Bemerkung, die übrigens schon Gauss in seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe (disq. circa ser. infinit. etc. Comm. Gott. 1812, Werke III. S. 126) ohne weiteres angewendet hatte. Für Reihen mit reellen Gliedern $u_0, u_1, u_2 \ldots$ enthält das Kapitel VI zwei Convergenzkriterien,

deren eines $\left[\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}\right]_{n=\infty} < 1$ ebenfalls schon (l. c.) von Lambert und Gauss verwendet worden war. Im Grunde genommen ist es ja nur die Bedingung dafür, dass die Reihe in ihren späteren Gliedern mit einer convergenten, geometrischen Reihe vergleichbar ist. Das andere hieraus abgeleitete Kriterium: $[\lim \sqrt[n]{u_n}]_{n=\infty} < 1$ hat Cauchy auch später noch öfter benutzt. Er nennt dann die linke Seite den „Modul" der Reihe (z. B. Comptes Rendus XVII. S. 1221).

Wir wenden uns nun zu denjenigen Specialuntersuchungen von Cauchy, die mit unserem Thema in engerem Zusammenhange stehen.

Einteilung der Abhandlungen Cauchy's zur Theorie der Functionen in zwei Hauptgruppen.

13. Die Arbeiten, durch die Cauchy zur Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen beigetragen hat, lassen sich in zwei Gruppen anordnen, die ganz verschiedene Ausgangspunkte nehmen und zunächst verschiedene Ziele im Auge haben.

Die eine bezieht sich auf Integrale mit imaginären Grenzen.

Die andere knüpft an die Lagrange'sche Reihe an und behandelt die Wurzeln einer Gleichung mit veränderlichem Parameter, ihre Entwicklung in eine Reihe, und allgemein die Convergenz der Potenzreihen, die gegebene Functionen darstellen.

Zu jeder dieser Gruppen gehören zahlreiche Abhandlungen, von denen wir, weil Cauchy sich in Wiederholungen gefiel, nur einige Repräsentanten besprechen werden, und zwar beide Gruppen in zusammenhängender Darstellung, weil bis gegen das Jahr 1846 hin der Einfluss von Zeitgenossen auf diese Sparten der ungeheuren productiven Thätigkeit von Cauchy kaum bemerkbar ist.

Wir beginnen mit der ersterwähnten Gruppe, weil sie zeitlich früher einsetzt und von der zweiten unabhängig sich entwickelt hat, während umgekehrt der Einfluss der Ideen der ersteren gleich in den frühsten Arbeiten der zweiten Gruppe sich bemerklich macht. Wegen einer vollständigen Angabe der einschlägigen Litteratur verweisen wir auf das Werk:

La vie et les travaux du Baron Cauchy par C.-A. Valson, Paris 1868. Tome I. Partie historique, 290 SS.; Tome II. Partie scientifique, 178 SS., auf dessen zweiten Band wir uns bereits hier wegen einiger Ausführungen zu unserer ersten Gruppe beziehen.

Wir rathen jedoch auch die Besprechung von J. Bertrand in Darboux' Bulletin des sciences math. T. 1. 1870 S. 105 zu vergleichen, welche dem Lichte des Valson'schen Lobes einige Schlagschatten beifügt.

14. Litteratur: **Erste Gruppe.**

Integration durch imaginäres Gebiet.

(2) Mémoire sur la théorie des intégrales définies, lu à l'Inst. 1814: remis au Sécrétariat pour être imprimé 1825, Savans étrangers I. S. 599 (200 SS.).
(3) Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires, Paris, 1825, 4° (68 SS.) (Besondere Schrift).
(4) De l'influence que peut avoir sur une intégrale double l'ordre dans lequel on effectue les intégrations. Exercises de Mathém.*) 1, S. 85. 1826.
(5) Sur diverses rélations qui existent entre les résidus des fonctions et les intégrales definies, ebd. S. 95. 1826.
(6) Moigno, leçons de calcul différentiel et de calcul intégral. réd. d'après les méthodes et les ouvrages de M. A.-L. Cauchy, 2 Voll. I, 1840. 41. leçon: II, 1844. 7, 9, 21. leçon.
(7) Mémoire sur les fonctions complémentaires C. R. XIX, S. 1377 (1844).
(8) Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée, C. R. XXIII, 1846, S. 251.
(9) Sur les intégrales dans lesquelles la fonction sous le signe $\int$ change brusquement de valeur, ebd. S. 557.
(10) Considérations nouvelles sur les intégrales définies qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée, et sur celles qui sont prises entre des limites imaginaires, ebd. S. 689.
(11) Rapport sur un mémoire présenté à l'Académie par M. Puiseux et intitulé: Recherches sur les fonctions algébriques. Cauchy rapporteur. C. R. XXXII. 1851. S. 276.

Umkehrung der Integrationsordnung in gewissen Doppelintegralen; Zusammenhang mit der Integration durch imaginäres Gebiet.

15. Die grosse Abhandlung (2) über bestimmte Integrale handelt von der Frage der Vertauschbarkeit der Integrationsordnung in Doppelintegralen. Euler hatte in der Abhandlung De formulis integralibus duplicatis (Nov. comm. Petropolit. XIV. 1770) die Vertauschung für erlaubt erklärt, wenn die Grenzen für die beiden Variabeln unter dem Integralzeichen von einander unabhängig sind; dieser Ansicht hatte seitdem Laplace durch öftere Anwendung des Verfahrens stillschweigend beigepflichtet. Cauchy zeigt dagegen, dass noch eine weitere Bedingung zu erfüllen ist, nämlich die, dass die Function der zwei Veränderlichen

*) Die vier Bände Exercises de Mathématiques (1826—1830) und die vier Bände Exercises d'Analyse et de Physique mathématique (1840—1847) unterscheidet Valson durch die Bezeichnung „Anciens" und „Nouveaux" Exercises. Weil es aber einen Band einer dritten Art von Ex. giebt, die Cauchy selbst „Nouveaux Exercises" nennt (Prag. 1835—1836, sie enthalten nur eine Abhandlung über Dispersion des Lichtes), so glaubten wir die ursprüngliche Bezeichnung beibehalten zu sollen.

unter dem Integralzeichen in dem Integrationsbereich nirgends unbestimmt wird (1. partie). Der 2. Teil enthält eine Methode, nach der sich in dem Fall einer Unbestimmtheitsstelle die Differenz zwischen den beiden Werten bestimmt, welche man durch die eine und die andere Integrationsanordnung erhält.

Diese Abhandlung ist nicht nur wegen der Neuheit der Fragestellung und ihrer merkwürdigen Ergebnisse, sondern auch deshalb wichtig, weil sie für Cauchy die Grundlage abgab für seine Sätze über (einfache) Integrale mit complexen Grenzen. Doch ist der Zusammenhang mit dieser Frage in der Abhandlung selbst noch so verdeckt, dass in dem Referat, welches ihr vorgedruckt ist, Legendre sich über den Titel des ersten Teiles: Des équations qui autorisent le passage du réel à l'imaginaire wundert, weil ja überall nur ein legitimer Gebrauch vom Imaginären gemacht werde. In der That bedient sich Cauchy der complexen Variablen $z = x + iy$ (wir setzen i statt $\sqrt{-1}$) zunächst nur zur Bildung gewisser besonderer Functionen von zwei Variabeln, über die seine Doppelintegrale sich erstrecken. Ist nämlich $S(xy)$ der reelle, $iU(xy)$ der rein imaginäre Bestandteil einer Function von $z: f(z) = S + iU$, wo denn also:

$$1) \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}$$

ist, so lautet eines der beiden von Cauchy betrachteten Doppelintegrale:

$$\iint \frac{\partial S}{\partial y}\, dx\, dy = -\iint \frac{\partial U}{\partial x}\, dx\, dy.$$

Nun wird gezeigt, dass, wenn in dem durch das Rechteck $x_0 X y_0 Y$ der Gauss'schen Ebene gebildeten Integrationsintervall die Functionen S, U nicht unbestimmt werden, die Integrationsfolge

$$2) \qquad \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} \frac{\partial S}{\partial y}\, dy = -\int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} \frac{\partial U}{\partial x}\, dx$$

des Integrals links durch die des Integrals rechts ersetzt werden kann, d. h. dass beide denselben Wert liefern. Man erhält so Relationen zwischen bestimmten Integralen, die sich zur Auswertung unbekannter solcher verwenden lassen. Allgemeiner lässt sich $x + iy$ durch $M + iN$ ersetzen, wo M und N irgendwelche reelle Functionen von x, y sind, was zu anderen Relationen derselben Art führt.

Der Gleichung, die sich aus 2) ergiebt, wenn man die erste Integration links und rechts ausführt, stellt sich eine analoge an die Seite, die aus der zweiten Beziehung 1) hervorgeht, aber so wenig wie jene

erste imaginäre Grössen enthält. Nun können es aber nur diese Gleichungen sein, durch die Cauchy das Versprechen der Vorrede einzulösen gedenkt: „d'établir le passage du réel à l'imaginaire sur une analyse directe et rigoureuse". Denn er bezieht sich dort ausdrücklich auf die Versuche, die Euler [man vergl. Instit. calc. int. ed. 3. Petr. 1845, Vol. IV, Suppl. IV, 1; Suppl. V, 6] und Laplace [Théor. d. probabilités 1812, T. I., 2. partie, §§ 25, 33] gemacht hatten, um den Uebergang vom Reellen zum Imaginären auf die Grenzen bestimmter Integrale auszudehnen, und will die Unsicherheit, mit der dies geschehen war, beseitigen.

Den Schritt, der von jenen beiden Gleichungen zwischen reellen Grössen zu ihrer Vereinigung zu einer solchen mit complexen Veränderlichen führt:

$$3)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{y_0}^{Y} f(x_0+iy)i\,dy+\int_{x_0}^{X} f(x+iY)dx \\ \displaystyle= \int_{x_0}^{X} f(x+iy_0)dx+\int_{y_0}^{Y} f(X+iy)i\,dy, \end{cases}$$

wodurch eigentlich erst das Versprechen der Vorrede erfüllt wird, thut Cauchy erst zehn Jahre später in den Fussnoten (§ II, 1. partie), die er 1825 der Abhandlung (2) gelegentlich ihrer Publication zufügt. Sie erst leiten den Uebergang zur Integration durch imaginäres Gebiet ein. Wenn man mit Rücksicht auf diesen Schritt und besonders die Ausführungen, welche die berühmte Abhandlung (3) enthält, Cauchy mit Recht das Hauptverdienst um die völlige Einbürgerung der complexen Grössen in die Analysis zuschreibt, so zeigt die langsame und zögernde Art, wie Cauchy die Theorie der bestimmten Integrale diesem Begriffe zugänglich macht, davon, welche Bedenken zu überwinden waren, bis die Einsicht sich durchgerungen hatte, dass gewisse Relationen zwischen Paaren von reellen Grössen ihre einfachste Gestalt nur mit Hülfe complexer Grössen gewinnen, und dass sie sogar für diesen Zweck unentbehrlich sind. Der Gesichtspunkt, der hiermit zur Geltung gelangte, ist der nämliche, der schon früher Joh. Bernoulli, Euler, Gauss u. A. zur Verwendung imaginärer Grössen veranlasst hatte, und der auch heute noch an die Spitze jeder Theorie der Functionen von imaginären Argumenten gestellt zu werden verdient.

Was den Text der Abhandlung (2) angeht, so liegt der Hauptwert in dem zweiten Teile. Dort betrachtet Cauchy Doppelintegrale, für welche die Function unter dem Integralzeichen — zunächst in einem Eckpunkte des Rechtecks $x_0 X y_0 Y$ — unbestimmt wird. Für diese liefert

die Umkehrung der Integrationsfolge einen anderen Wert. So in dem Falle des Integrals (wegen der Stelle $x=0$, $y=0$):

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,dx\,dy = \iint \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy$$

einmal den Wert $\pi/4$, das andere mal $-\pi/4$. [Ersetzt man nämlich die Grenzen 0, 0 durch die kleinen Grössen ε und η, so erhält man als Wert des Integrals $\pi/4 - \operatorname{arctg}(\varepsilon/\eta)$, welcher Ausdruck je nachdem man erst ε oder erst η gleich Null setzt, jene beiden verschiedenen Werte ergiebt.] Allgemein unterscheiden sich die Werte, die man durch die beiden Integrationsfolgen erhält, um einen gewissen Wert A, den Cauchy durch ein „singuläres Integral" darstellt, d. h. ein einfaches Integral zwischen unendlich benachbarten Grenzen, aber über ein Intervall genommen, in welchem der Integrand (so nennen wir in der Folge die zu integrirende Function) unendlich gross wird. Hat das Doppelintegral die Form:

$$\iint \frac{\partial\varphi(xy)}{\partial y}\,dy\,dx,$$

und wird der Integrand (und damit φ selbst) an der Stelle x_0, y_0, von der die Integration ausgeht, unbestimmt, so hat die Differenz den Wert:

$$A = -\int_0^\varepsilon \varphi(x_0+\xi,\ y_0+\eta)\,d\xi,$$

wo ε, η sehr kleine Grössen sind und η nach der Integration gleich Null zu setzen ist; also in jenem Beispiel:

$$A = -\int_0^\varepsilon \frac{\eta\,d\xi}{\eta^2+\xi^2} = -\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\eta} = -\frac{\pi}{2}.$$

Liegt die Stelle x_0, y_0 auf einer Seite des Rechtecks, so setzt sich A aus zwei, wenn im Inneren, aus vier singulären Integralen zusammen.

Weiterhin ermittelt Cauchy für einige besondere Formen der Function φ den Wert von A, so namentlich für den Fall, dass φ der reelle Teil des Quotienten ($z = x+iy$):

$$f(z) = \frac{F(z)}{\mathfrak{F}(z)}$$

von zwei ganzen Functionen ist, wo dann, wenn einer der Nullpunkte α von $\mathfrak{F}(z)$ in jenem Rechteck eingeschlossen ist, die Summe A den Wert hat (2. partie. § IV):

$$2\pi i\frac{F(\alpha)}{\mathfrak{F}'(\alpha)} = 2\pi i.\lim[\varepsilon f(\alpha+\varepsilon)]_{\varepsilon=0}.$$

Man erkennt hier bereits die Anfänge des Residuencalculs, dessen Anwendung auf den vorliegenden Fall man in der Abhandlung (5) nach-

sehen kann. Die Gleichung 3) oben erhält im allgemeinen, wie Cauchy in den Fussnoten zu der angegebenen Stelle bemerkt, ein Zusatzglied von der Form $A + iA'$, das sich als Summe von acht singulären Integralen darstellt, und das später in der Abhandlung (5) durch ein „Residuum" von der Form:

$$2\pi i \mathop{E}_{x_0 y_0}^{XY} ((f(z)))$$

(übrigens mit einem besonders gebildeten Zeichen E) ersetzt wird, wenn eine Wurzel der Gleichung $1/f(z) = 0$ in das Rechteck entfällt. Statt der Doppelklammern gebraucht Cauchy später einfache eckige. Auf den Begriff Residuum kommen wir zurück.

Gauss und Cauchy.

16. Ob die Bemerkungen von Gauss zu seinem dritten Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra (s. oben), welche alle die von Cauchy über diese Materie entwickelten Gedanken im Keime enthalten, auf die Abfassung der Fussnoten zu der Abhandlung (2) einen Einfluss geübt haben, oder ob diese nur die Fortsetzung von Cauchy's Gedankengang darstellen, muss dahin gestellt bleiben. Jedenfalls entstammen sie bereits einer tieferen Einsicht in die Führung von Integralen durch das imaginäre Gebiet. Denn die obige Gleichung 3) drückt klar aus, dass der Endwert des Integrals, das von einem Eckpunkte des Rechtecks zum gegenüberliegenden führt, von der Wahl des Seitenpaars, über das man integrirt, nicht abhängt. In der That fallen die Noten in dasselbe Jahr, aus welchem die Abhandlung (3) herrührt, und gehen der Abhandlung (5), in welcher der Gedanke weiter ausgeführt wird, kurz voraus.

Von jener Abhandlung (3), zu der wir uns nunmehr wenden, sagt der Biograph von Cauchy, der sich bei der Abfassung des zweiten Teils: „Les Travaux de Cauchy" der Mitwirkung von Männern wie Hermite und Puiseux zu erfreuen hatte: „Ce Memoire peut être considéré comme le plus important des travaux de Cauchy, et les hommes compétents n'hésitent pas à le comparer à tout ce que l'ésprit humain a jamais produit de plus beau dans la domaine des sciences".

Demgegenüber muss es auffallen, dass Cauchy die Bedeutung seiner eigenen Schrift lange Zeit nicht gebührend gewürdigt zu haben scheint. Denn Moigno, der ganz unter seiner Leitung arbeitete, hat in seinen Leçons (6) nicht einmal eine Andeutung über ihren Inhalt gegeben; dagegen aufs nachdrücklichste die frühere Abhandlung (2) über bestimmte Integrale zur Lectüre empfohlen. — Die Bedeutung der Abhandlung (3) wurde eben erst durch spätere Anwendungen — zum Teil in den Händen Anderer — in das richtige Licht gesetzt.

Die Schrift (3) handelt von dem Werte, den ein einfaches bestimmtes Integral mit complexen Grenzen erhält, wenn man es auf einem Wege führt, der jene complexen Grenzwerte verbindet, und von der Wertänderung, welche das Integral bei einer Verschiebung jenes Weges erfährt. Wir fanden den Grundgedanken dieser Abhandlung schon in dem Briefwechsel zwischen Gauss (s. Nr. 9) und Bessel mit aller wünschenswerten Deutlichkeit dargelegt. Cauchy giebt ihm die analytische Form, indem er zwischen den Grenzwerten x_0+iy_0, $X+iY$ eines Integrals Zwischenwerte einschaltet, die auf einer durch jene Endpunkte gehenden Curve:

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t)$$

liegen, wo t eine reelle Variable ist, und verwandelt mittelst dieser Gleichungen das Integral in ein solches in t mit reellen Grenzen. Es zeigt sich dann, dass eine Variation der Curve hinsichtlich ihrer Gestalt den Wert des Integrals nicht ändert, solange bei gleichbleibenden Grenzen ein Unstetigkeitspunkt der Function unter dem Integralzeichen bei der Deformation der Curve nicht überschritten wird.

Residuencalcul.

17. Liegt nun aber zwischen zwei verschiedenen solchen Integrationswegen an der Stelle $z_1=a+ib$ ein Pol*) der Function $f(z)$, so lässt sich die Differenz der den beiden Wegen zugehörigen Integrale vermöge eines „Residuums" darstellen: $2i\pi\mathfrak{f}$, wo das Residuum $\mathfrak{f}$ mit $f(z)$ in der Beziehung steht, dass für sehr kleine Werte von ε:

$$\mathfrak{f}=\lim[\varepsilon\,.\,f(z_1+\varepsilon)]$$

ist. Wenn aber dieser Wert dadurch unendlich gross wird, dass die Gleichung:

$$\frac{1}{f(z)}=0$$

in $a+ib=z_1$ mehrere (m) gleiche Wurzeln besitzt, so hat $\mathfrak{f}$ den Wert:

$$\mathfrak{f}=\frac{1}{(m-1)!}\lim\left[\frac{d^{m-1}\varepsilon^m f(z_1+\varepsilon)}{d\varepsilon^{m-1}}\right].$$

Wir schalten hier ein Wort über den in Cauchy's Schriften vielbenutzten Begriff des Residuums ein.

Die mit $\mathfrak{f}$ bezeichnete Grösse hat Cauchy in den (Anciens) Exer-

---

*) Wir gebrauchen dieses Wort (nach dem Vorgang von Briot und Bouquet) für eine solche Unstetigkeitstelle der Function $f(z)$, wo $1/f(z)$ „holomorph" ist, d. h. stetig und eindeutig ist und einen Differentialquotienten besitzt (Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques, 2. édit. Paris 1875, pp. 15, 49), und nennen mit Weierstrass singuläre Stellen von $f(z)$, wo $1/f(z)$ nicht holomorph ist (wie z. B. $\sin z$, e^z für $z=\infty$), wesentliche Unstetigkeiten.

cises de Mathématiques I. S. 11 (1826) unter dem Namen „résidu de la fonction f(x) relatif à la valeur particulière $z_1 = a+ib$“ in die Wissenschaft eingeführt, und zwar mit der Bezeichnung ((6). I. 41. leç.):

$$\mathrm{E}\,\frac{(z-z_1)f(z)}{[z-z_1]} = \mathrm{E}\,\frac{\mathfrak{f}(z)}{[z-z_1]} = \mathfrak{f}(z_1),$$

beziehungsweise (der obere Index bei $\mathfrak{f}$ bedeutet eine Ableitung):

$$\mathrm{E}\,\frac{(z-z_1)^m f(z)}{[(z-z_1)^m]} = \mathrm{E}\,\frac{\mathfrak{f}(z_1)}{[(z-z_1)^m]} = \frac{\mathfrak{f}^{(m-1)}(z_1)}{1.2.3\ldots(m-1)},$$

jenachdem $\lim(z-z_1)f(z) = \mathfrak{f}(z_1)$ oder erst $\lim(z-z_1)^m f(z)$ für $z = z_1$ einen endlichen (von Null verschiedenen) Wert annimmt. — Später schreibt Cauchy kürzer:

$$\mathfrak{f}(z_1) = \mathrm{E}[f(z)]_{z_1}.$$

Man kann das Residuum von f(z) hinsichtlich z_1 in jedem Falle auch als den Coefficienten der (-1)ten Potenz in der Entwicklung von f(z) nach aufsteigenden Potenzen von $(z-z_1)$ erklären.

Eine weitere Interpretation des Residuums gab später die Entwicklung der Integration durchs Imaginäre an die Hand. Vorgreifend bemerken wir, dass ((18) des Litter. verzeichn. in Nr. 20):

$$\mathrm{E}[f(z)]_{z_1} = \frac{1}{2i\pi}\int f(z)\,dz$$

ist, wo das Integral rechts zu nehmen ist auf einem kleinen Kreis (mit dem Radius r) um den Unstetigkeitspunkt $z = z_1$, also:

$$2i\pi\mathrm{E}[f(z)]_{z_1} = \int f(z)\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} f(z_1+re^{i\varphi})re^{i\varphi}.id\varphi;$$

und wo im Falle, dass für $z = z_1$ erst das Product: $f(z)(z-z_1)^m$ (und seine Differentialquotienten) einen endlichen Wert annimmt, eine $(m-1)$-malige partielle Integration nach φ zu dem Ausdruck führt:

$$\int f(z)\,dz = \frac{2i\pi}{(m-1)!}\lim\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[f(z)(z-z_1)^m] = 2i\pi.\mathrm{E}[f(z)]_{z_1}.$$

Das Symbol:

$$\mathop{\mathrm{E}}_{x\,y_0}^{XY}[f(z)]$$

bedeutet das Gesamtresiduum (résidu intégral. E ist „entier“), d. h. die Summe der Residuen, genommen in Bezug auf alle Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{1}{f(z)} = 0,$$

die in dem Rechteck Xx_0Yy_0 gelegen sind. Fehlen die Grenzen, so erstreckt sich E über die ganze Ebene. — Demnach ist z. B. wenn

$\varphi(x) = (x-a)(x-b)(x-c)\ldots$ und $\psi(x)$ ganze Functionen sind:

$$\mathrm{E}\frac{\psi(x)}{[\varphi(x)]} = \frac{\psi(a)}{\varphi'(a)} + \frac{\psi(b)}{\varphi'(b)} + \frac{\psi(c)}{\varphi'(c)} + \cdots$$

(Wegen der Beziehung des Residuums zum „isotropen Mittel" vergl. C. R. XLI, S. 41.)

Die Abhandlung über Complementärfunctionen (7) entwickelt ein Hülfsmittel, das später in der Hand von Riemann, Weierstrass u. A. der Functionentheorie noch wichtige Dienste leisten sollte. „Eine algebraische oder transcendente Function lässt sich [und zwar mit Hülfe des Residuencalculs] oft durch eine Summe von rationalen Brüchen [in endlicher Anzahl] ersetzen, deren jeder für einen Werth der Variabeln, der die gegebene Function unendlich macht, selbst unendlich wird, oder doch durch eine solche Summe, vermehrt um eine andere Function, die ich Complementärfunction nenne, und welche die bemerkenswerte Eigenschaft besitzt, für alle endlichen Werte der Variabeln immer endlich zu bleiben."

Cauchy verwendet diese Zerlegung einer Function in Elemente, die Einzeleigenschaften derselben besitzen, zum Beweise von Sätzen über Functionen, die in der ganzen Ebene endlich sind und im Unendlichen noch gewisse Bedingungen erfüllen.

Man weiss, dass Weierstrass diesen Satz auf die Darstellung einer allgemeinen „analytischen Function" mit nur einer im Unendlichen gelegenen wesentlich singulären Stelle ausgedehnt hat (Berl. Monatsber. 1880).

Ueberführung von Flächen- in Randintegrale. Integrale auf geschlossenem Weg, der einen Pol umgiebt. Unstetigkeit längs Linien

18. Das nächste Ziel, das mit den besprochenen Abhandlungen über Integrale Cauchy im Auge hatte, lassen die zahlreichen Anwendungen der Theorie auf die Auswertung bestimmter Integrale erkennen. Aber keine dieser Abhandlungen verfolgt weiter jene Beziehung, die Cauchy in den Noten zu (2) 1825 zwischen dem längs einer teilweisen Begrenzung eines Flächenstücks geführten Randintegral und gewissen Flächenintegralen gefunden hatte. Erst zwanzig Jahre später, in der Note (8), vereinigt Cauchy zwei Linienintegrale, die von einem Punkte der imaginären Ebene zu einem anderen führen (die er z. B. in (5) auf den Seitenpaaren eines Rechtecks hinerstreckt hatte) zu einem das Flächenstück begrenzenden Randintegral, betrachtet also einen geschlossenen (sich selbst nicht schneidenden) Integrationsweg von beliebiger Gestalt, indem er den Satz ausspricht, dass, wenn X, Y im Innern des umgrenzten Flächenstücks continuirliche Functionen von x, y sind, die Gleichung besteht:

$$\int (X\,dx + Y\,dy) = \pm \iint \left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \right) dx\,dy,$$

wo sich das Integral links auf die Umgrenzung, das rechts auf das Innere des [einfach zusammenhängenden] Flächenstücks der imaginären Ebene erstreckt, für das jene Voraussetzung für X, Y zutrifft. Ist $X\,dx + Y\,dy$ ein vollständiges Differential, so lässt sich hiernach der Integrationsweg auf Null zusammen ziehen; treten aber „Pole" der Function unter dem Integralzeichen links im Innern des Flächenstücks auf, so lässt sich der Integrationsweg auf kleine jene Pole einschliessende Linien (Kreise) zusammen ziehen.

Ob Cauchy zu dieser neuen folgereichen Formulirung früherer Sätze nicht vielleicht durch die Bekanntschaft mit den (schon 1828 publicirten) Green'schen Sätzen angeregt worden ist — wie man dies u. A. aus dem Umstand schliessen könnte, dass er seine Sätze auch für krumme Flächenstücke formulirt —, muss dahin gestellt bleiben.*)

Die volle Allgemeinheit hat dem Satze übrigens erst Riemann (s. Rf. IV.) gegeben, indem er ihn auch auf mehrdeutige, also die imaginäre Ebene mehrfach überdeckende Functionen X, Y ausdehnt, welche nur in der nach Riemann genannten Fläche innerhalb eines ein Stück derselben begrenzenden Linie eindeutig und stetig sein müssen.

Das Ziel, welches sich Cauchy's Arbeiten stecken, ist inzwischen in den vierziger Jahren ein wesentlich anderes geworden. Statt bestimmte Integrale zu behandeln, weist Cauchy auf den Nutzen seiner Sätze für die Theorie der algebraischen Gleichungen, die Convergenz der Reihen u.s.w. hin, und erweitert sie, indem er diese Anwendungen weiter verfolgt, zu einer Grundlage für die Theorie der Functionen überhaupt. In der Note (9) stellt Cauchy zunächst die Ergebnisse einer früheren Abhandlung (5) über Integrale:

$$S = \int f(z)\,dz,$$

welche längs der Umgrenzung eines Rechtecks in der imaginären Ebene geführt sind, in der durch die neuen Vorstellungen der Note (8) modi-

---

*) Ueber den Zusammenhang der Residuentheorie mit der Integration durch das Imaginäre, sowie über den „calul des indices" und den „calcul des limites" berichtet eingehender Casorati, Teorica delle funzioni di variabili complesse, Pavia 1868, S. 102 ff. Mit Recht findet er, dass Cauchy in der Einführung neuer Namen für einfache Ausbildungen gewisser Zweige der Analysis hätte zurückhaltender sein können, zumal wenn er eine rasche Ausbreitung seiner Ideen wünschte.

ficirten Gestalt dar, indem er an Stelle des Rechtecks eine beliebige geschlossene Linie treten lässt. Befinden sich Pole (s. oben, Nr. 17 Note) innerhalb des eingeschlossenen Flächenstücks, so erhält man, wenn die Linie auf Umkreisungen der Pole zusammen gezogen wird, als Wert dieser Randintegrale um kleine Kreise jene Residuenausdrücke, die Cauchy schon in (5) gefunden hatte; und das Integral wird gleich ihrer Summe:

$$1) \qquad S = 2i\pi E[f(z)],$$

wo das Zeichen E rechts sich auf die Residuen der in der Fläche enthaltenen Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{1}{f(z)} = 0$$

erstreckt. Später, in der Note: Conditions sous lesquelles subsistent les principales formules du calcul des résidus (C. R. XXXII, p. 704, 1851), dehnt er die Gleichung 1) auf den Fall einer von beliebigen geschlossenen Curven (innen und aussen) begrenzten Fläche aus, innerhalb deren sich Pole von f(z) befinden. Cauchy geht in (9) dann über auf den Fall, dass die Function unter dem Integralzeichen längs einer Linie, die im Inneren jener Fläche liegt, unstetig wird, wie z. B. $\log x$ beim Ueberschreiten des negativen Theils der reellen Axe der imaginären Ebene um die Grösse $2i\pi$ plötzlich sich ändert (l. c. S. 559). Zu dem Residuenzuwachs des früheren Falls tritt dann noch ein längs dieser Linie erstrecktes Integral hinzu. Die Ausführung dieser Bemerkung ist der Gegenstand der Note (10).

Periodicitätsmoduln der Integrale eindeutiger und mehrdeutiger Functionen.

19. Die Note (10) gehört zu dem Hervorragendsten, was Cauchy auf dem Gebiete der Functionentheorie geschaffen hat: der Begriff der Periode einer Function erscheint im Lichte der Integration durch das Imaginäre. Zwar der erste Theil, der sich auf Integrale eindeutiger Functionen bezieht, geht nicht weit über das hinaus, was schon Gauss in jenem Brief an Bessel von den Perioden solcher Functionen aussagt, die sich, wie $\log x$, $\operatorname{arctg} x$, als Integrale rationaler Functionen darstellen lassen. Denn auch Gauss bemerkt schon l. c. (s. oben Gauss): „Uebrigens ist es hieraus klar, wie eine durch $\int \varphi x . dx$ erzeugte Function für einerlei Werte von x mehrere Werte haben kann, indem man nämlich beim Uebergange dahin um einen solchen Punkt, wo $\varphi x = \infty$, entweder gar nicht, oder einmal, oder mehreremale herumgehen kann. Definirt man z. B. $\log x$ durch $\int \frac{dx}{x}$, von $x = 1$ anzufangen, so kommt man zu $\log x$ entweder ohne den Punkt $x = 0$ einzuschliessen, oder durch ein- oder mehrmaliges Umgehen desselben; jedesmal kommt dann die

Constante $+2\pi i$ oder $-2\pi i$ hinzu: so sind die vielfachen Logarithmen von jeder Zahl ganz klar." Und fast derselbe Gedankengang findet sich bei Cauchy.

Aber was nun Cauchy anschliesst, und worin er wesentlich original ist, das ist der für unsere Theorie zumal bedeutsame Uebergang auf mehrdeutige Functionen unter dem Integralzeichen. Nichts hindert, sagt Cauchy, etwa auch Wurzeln einer algebraischen oder transcendenten Gleichung unter dem Integralzeichen einzuführen, die, wenn der in der Ebene bewegliche Punkt an die Ausgangsstelle zurückgekommen ist, in eine andere Wurzel derselben Gleichung übergegangen sein können. In diesem Falle wird der Werth des Integrals über den geschlossenen Weg von der Wahl der Ausgangsstelle nicht unabhängig sein; auch wird öftere Wiederholung des Weges verschiedene Werte des Integrals $\int f(x)dx$ liefern. „Wenn aber, nach einer gewissen Zahl von Wiederholungen $f(x)$ den Anfangswerth wieder erhält, wird von da ab sich alles wiederholen, und zwar unabhängig von der Ausgangsstelle. Alsdann ist die durch die Differentialgleichung:

$$dt = f(x)dx$$

definirte Function x eine periodische Function von t. Die Periodicitätsmoduln (indices de périodicité) sind dann nicht mehr wie im Fall einer eindeutigen Function $f(x)$ durch Residuen darstellbar", sondern durch die in der Note (9) bezeichneten Integrale längs gerader Linien, die sich zwischen den Discontinuitäts-[kritischen] Punkten erstrecken. — Bei dieser Andeutung lässt es indessen Cauchy vorerst auch bewenden. Erst nachdem er von der Abhandlung von Puiseux (Rf. II. D) Kenntniss genommen hatte, rückt er voran in der Erkenntnis derjenigen „points isolés", die man heute als „kritische Punkte" bezeichnet (solchen Punkten der imaginären Ebene, wo zwei oder mehrere im allgemeinen verschiedene Functionswerte zusammen gefallen sind, s. Briot et Bouquet, Théor. des fonct. ellipt. 2. éd. p. 50), über denen also ein „Verzweigungspunkt" der Riemann'schen Ebene gelegen ist (s. unten Nr. 34).

Eine Bestimmung aber der von einander unabhängigen Perioditätsmoduln der Integrale allgemeiner algebraischer Functionen (auch nur ihrer Anzahl) hat weder Cauchy noch Puiseux jemals gegeben.

Die Abhandlung (10) ist deshalb bahnbrechend gewesen, weil durch sie eine grundlegende Eigenschaft der Umkehrungsfunctionen der Integrale algebraischer Functionen: die mehrfache Periodicität der elliptischen und Abel'schen Transcendenten, die durch die Arbeiten von Abel und Jacobi in den Mittelpunkt des Interesses der Analysten, wenigstens in

Deutschland, gerückt waren, dem Verständnis erschlossen worden ist. Namentlich war die Schwierigkeit beseitigt, die Jacobi in der Umkehrung eines hyperelliptischen Integrals gefunden hatte, wenn man, wie dies in späteren Noten Cauchy's (1851) geschieht, den Integrationsweg in der Ebene durch „lignes d'arrêt“ beschränkte (s. unten Nr. 34), welche den Periodenzuwachs regeln. Casorati (les fonct. d'une seule variable à un nombre quelconque de périodes. Milan 1885) drückt diesen Umstand so aus: die obere Grenze eines hyperelliptischen etc. Integrals ist keine eindeutige (uniforme), wohl aber eine analytische [unendlich vieldeutige] Function des Integrals.

Die Einführung der irrationalen Functionen hängt mit einer anderen Gruppe von Untersuchungen Cauchy's zusammen, die wir nun zunächst in Betracht ziehen werden.

Litteratur zu Cauchy 2. Gruppe: Lagrange'sche Reihe und Potenzentwicklung im Allgemeinen.

20. Litteratur: **Zweite Gruppe.**

Darstellung der Wurzeln einer Gleichung mit veränderlichem Parameter und die Lagrange'sche Reihe.

(12) Mémoire sur divers points d'analyse: Mém. de l'Acad. VIII, 1827, S. 97—129.

(13) Mémoire sur le développement de $f(\zeta)$ suivant les puissances ascendentes de h: ζ étant une racine de l'équation: $z - x - h\varpi(z) = 0$, ebd. S. 130—138.

(14) Extrait d'une Lettre à M. Coriolis, C. R. IV, 1837, S. 216.

(15) Lettre sur la résolution des équations de degré quelconque, ibd. S. 805.

(16) Lettre sur la détermination complète de toutes les racines des équations de degré quelconque, ebd. S. 773.

(17) Considérations nouvelles sur la théorie des suites, Exercises d'Analyse et de Physique mathématique, I, 1840, S. 269—287.

(18) Résumé d'un mémoire sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites, ebd. II, 1841, S. 41—98.

(19) Mémoire sur la nature et les propriétés des racines d'une équation qui renferme un paramètre variable, ebd. II, S. 109—136.

(20) Moigno, Leçons etc. (wie oben Nr. 14), I. Introduction. 17. 18. leçon.

(21) Sur les caractères à l'aide desquels on peut distinguer entre les diverses racines d'une équation celle qui se développe en série convergente par le théorème de Lagrange, C. R. XXIII, 1846. S. 493—501.

(22) (23) Mémoires sur les fonctions irrationelles, C. R. XXXII, 1851, S. 68, S. 126.

(24) Sur les fonctions de variables imaginaires, ebd. S. 160.

(25) Mémoire sur l'application du calcul des résidus à plusieurs questions importantes d'analyse ebd. S. 207.

(26) Sur les fonctions monotypiques et monogènes, ebd. S. 184.
(27) Rapport sur un Mémoire présenté à l'Académie par M. Puiseux et intitulé: Recherches sur les fonctions algébriques. Cauchy rapporteur, ebd. S. 276; desgl.: R. sur un Mémoire de M. Puiseux: Nouvelles recherches sur les fonctions algébriques, ebd. S. 493.

Zu vergleichen:

(28) E. Lamarle, Note sur le théorème de M. Cauchy relatif au développement des fonctions en séries. Liouv. Journ. d. Math. XI, 1846, S. 21. — Note sur le développement etc. par Cauchy, ebd. S. 313 (Antwort auf die Note von L.).
(29) P. A. Laurent, Extension du théorème de M. Cauchy relatif à la convergence du développement d'une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable, C. R. XVII, 1843, S. 938.
(30) Chio, Recherches sur la série de Lagrange. Savans étrangers XII, 1854 (prés. 1846).

Die Tendenz der Arbeiten der zweiten Gruppe und ihr Ursprung.

21. Von den Absichten, die Cauchy mit dieser zweiten Gruppe von Arbeiten verfolgt, und seinen Ergebnissen erhält man eine Vorstellung, wenn man die Vorrede zu (18) liest. Er setzt darin die Unzuträglichkeiten auseinander, welche sich bei dem bisherigen Verfahren der Entwicklung einer Function — auch nur von einer Variabeln x — in Potenzreihen einstellen. Zwar bei einer explicit gegebenen Function liesse sich, wenn man der Mac Laurin'schen Reihe den Rest, etwa in der Form, die Lagrange angegeben hat, beifügt, allenfalls die obere Grenze der Moduln der reellen oder imaginären Werte von x, für welche die Reihe convergirt, auch mit den bisherigen Mitteln noch angeben, wenn auch die Rechnung oft sehr mühsam wird, zumal sobald der nte Differentialquotient eine verwickelte Form annimmt.

Aber mit den impliciten Functionen war es bisher schlecht bestellt. Hatte man auch die Entwicklung, etwa nach der Methode der unbestimmten Coefficienten, aufgestellt, so wusste man doch nicht, ob die Reihe convergirte, und konnte noch weniger sagen, in welchem Umfang sie galt. Man wusste ferner nicht, ob dieselbe wirklich die gewünschte Function selbst darstellt, weil es vorkommen kann, dass eine convergente Reihe der Function nicht gleich ist, für die man sie aufstellt (S. oben Lagrange, II A). Cauchy fährt dann fort: „Es ist mir gelungen, für die Entwicklung der Functionen, sowohl der expliciten wie der impliciten, allgemeine Grundsätze aufzustellen, mit deren Hülfe sich die Reihenform und die Bedingung ihrer Existenz streng beweisen, und vermöge deren sich die Grenze der Fehler feststellen lässt, die bei Vernachlässigung des Restes eintreten." Die Anwendungen auf die Mechanik des Himmels, von denen Cauchy dann spricht, hatten sich ihm aber

nicht etwa gelegentlich dargeboten. Vielmehr muss man aus der Reihenfolge seiner Entdeckungen schliessen, dass die Reihe von Lagrange, ihre Anwendung auf die Kepler'sche Gleichung u. s. w., geradezu der Ausgangspunkt für diese bedeutenden Untersuchungen überhaupt gewesen ist.

Die Reihe von Lagrange.

22. Denn seine erste Arbeit (12) über Reihen schliesst an jene Gleichung an (Lagrange, théorie des fonctions, § 97):

$$z - x - h . \varpi(z) = 0$$

(wo h, x reelle Veränderliche, $\varpi(z)$ eine von Cauchy nicht näher definirte, aber in allen Beispielen stetige, endliche Function von z ist), deren Wurzel z Lagrange in eine nach Potenzen von h aufsteigende Reihe mit dem allgemeinen Glied entwickelt hatte:

$$s_n = \frac{h_n}{1.2\ldots n} \frac{d^{n-1}\varpi^n(x)}{dx^{n-1}}.$$

In einem besonderen Fall hatte Laplace die Bedingung für die Convergenz dieser Reihe — wenn auch noch in umständlicher Form — ermittelt.

Cauchy sucht durch eine andere Führung des Convergenzbeweises dieses Resultat zu verallgemeinern. Er stellt jenes nte Glied, oder vielmehr die Grösse $S_n = n s_n$ für $h = 1$, durch ein bestimmtes Integral, auf imaginärem Integrationsweg geführt, dar. Es ist nämlich, wie man durch partielle Integration leicht erkennt:

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varpi^n(x + re^{i\varphi})}{(re^{i\varphi})^{n-1}} d\varphi.$$

Aber andererseits lässt sich für grosse Werte von n dieses Integral direct auswerten, und durch passende Verfügung über die noch völlig willkürliche Grösse r in die Form bringen ((12), S. 107):

$$a \frac{R^n}{\sqrt{n}},$$

wo a von n unabhängig ist und R den absoluten Betrag („Modul" bei Cauchy) der Grösse:

$$\psi = \frac{\varpi(x + t)}{t}$$

für denjenigen complexen Wert von t bedeutet, für welchen dieser Bruch ein Maximum maximorum wird, d. h. den grössten Wert sowohl hinsichtlich r wie φ erhält ($t = re^{i\varphi}$).

Dieser Wert, den Cauchy den „Hauptmodul von ψ" nennt, entspricht, wie Cauchy ((12), S. 109) bemerkt, einer gewissen Wurzel der Gleichung:

$$\frac{d\psi}{dt} = 0.$$

Hiernach ist „die Reihe mit dem allgemeinen Glied S_n convergent oder divergent, jenachdem der „module principale" von ζ grösser oder kleiner als 1 ist."

Somit ist eine Bedingung gefunden, die sich der gegebenen Gleichung selbst entnehmen lässt. — Man kann dieselbe übrigens, wie Cauchy später in ((16) oder (17), S. 279) bemerkt hat, auf folgende Form bringen:

Das Ergebnis der Elimination von h aus:

$$F(z, h) = z - x - h\varpi(z) = 0$$

und:

$$F'(z) = 0$$

liefert den Grenzwert x, für den die Lagrange'sche Reihe, die der gegebenen Gleichung genügt, aufhört zu convergiren. Der Ursprung des berühmten Satzes von Cauchy über den Convergenzkreis kann hiernach auf jene wenig bekannte Abhandlung (12) zurückgeführt werden.

Die anschliessende Abhandlung (13), in der man die Wurzel z jener Gleichung in die Lagrange'sche Reihe entwickelt findet, ist bemerkenswert wegen des Entwicklungs-Verfahrens, das weder den Taylor'schen Satz noch die Methode der unbestimmten Coefficienten verwendet, sondern an die elementare Reihe für den Logarithmus anknüpft.

Die Turiner Abhandlungen.

23. (14) bis (19). Die Zeit, die zwischen den vorigen und den nächsten Publicationen lag, hatte Cauchy eine unfreiwillige Musse gewährt, in der die Sätze über Convergenz der Reihen, vielleicht seine bedeutendste Leistung, gereift sind. Durch die Julirevolution war Cauchy, ein warmer Anhänger der Bourbons, zur Flucht aus der Hauptstadt und zu mehrjährigem Aufenthalt im Ausland, erst in Turin, dann in Prag, gezwungen worden. Die Untersuchungen aus dieser Zeit haben deshalb keine ordnungsmässige Publication erfahren. Diejenigen über Reihen erschienen zunächst in drei lithographirten Abhandlungen: Mémoire sur la mécanique céléste et sur un nouveau calcul, appelé calcul des limites 1831—33, denen sich zwei andere lithographirte Abhandlungen: sur le calcul des résidus et le calcul des limites, Turin 1831—32 anreihen. Diese Abhandlungen, auf die Cauchy später, namentlich in den Exercises d'analyse, wo er Auszüge (17) (18) aus denselben giebt, immer wieder zurückverweist, sind uns sämtlich unzugänglich gewesen. Auch Valson, dem Biographen Cauchy's, scheinen sie (nach seinen nicht ganz übereinstimmenden Citaten zu urteilen) nicht alle vorgelegen zu haben. Sogar zur Zeit ihres Erscheinens müssen sie nach Paris teilweise nur in wenigen Exemplaren gekommen sein, weil noch 1837 sich Sturm

und Liouville (C. R. IV, p. 724) beklagen: „le mémoire de 1833 ne nous est point parvenu; il ne parait pas même, qu'aucun des principaux géomètres de Paris ait reçu ce mémoire“. Einen ersten Bericht über seine Resultate hat Cauchy der Pariser Academie im IV. Band der Comptes rendus in Form von Briefen an verschiedene Mitglieder vorgelegt. Ausführungen sind dann in den ersten Bänden der Exercises d'analyse („Nouveaux“ Exercises) 1840 ff. erschienen, wo der wesentliche Inhalt der Turiner Abhandlungen mit der einen Abänderung reproducirt wird, dass neuerdings Cauchy neben der Stetigkeit der in eine Reihe zu entwickelnden Function (was ihm noch 1837 genügt hatte) auch diejenige der ersten Derivirten fordert (Ex. d'analyse I. p. 32 und II. p. 50), ohne indessen doch von der Notwendigkeit dieser Forderung ganz durchdrungen zu sein.' Hiervon weiter unten (Nr. 36).

Ueber die vorerwähnte Serie von Arbeiten Cauchy's, auf deren Inhalt er selbst später in vielfach variirter Form immer wieder zurückkommt, glauben wir ausführlicher berichten zu sollen, teils wegen ihrer Wichtigkeit für die Theorie der algebraischen Functionen, teils um die Modificationen und Erweiterungen, welche die vorgetragenen Sätze später von anderer Seite erfahren haben, ins Licht setzen zu können.

Den Fundamentalsatz der Cauchy'schen Reihentheorie enthält die Note (14) in den Comptes rendus von 1837. Der Satz lautet in wörtlicher Uebertragung des Textes:

Der Satz über den Convergenzbereich einer Potenzreihe, die eine gegebene Function darstellt.

24. „Eine Function y ist in eine aufsteigende Potenzreihe nach x entwickelbar, solange der Modul [absolute Betrag] von x kleiner ist als der, für den die Function“ [„oder ihre erste Derivirte“, spätere Fassung (18)] „aufhört, endlich und stetig zu sein.“ Hierfür werden in der Turiner Abh. von 1832 (Liouv. Journ. XI, S. 313, 1846) die Beispiele $\cos x$, e^x angezogen, die in allenthalben convergente Reihen nach aufsteigenden [ganzen] Potenzen von x entwickelbar sind, ferner $(1+x)^{\frac{1}{2}}$, $1/1-x$ etc., für die der Modul < 1 sein muss, wenn die Reihen convergiren sollen; $e^{1/x}$, $\cos(1/x), \ldots$ die überhaupt nicht in dieser Weise entwickelbar sind. In (14) definirt nun weiter Cauchy — mit einem Hinweis auf den Cours d'analyse, der übrigens nicht ganz zutrifft, weil die Fassung dort einen wesentlichen Punkt übersieht —: „Stetig ist eine Function in gegebenen Grenzen, wenn innerhalb derselben jedem Werte der Variabeln ein einziger und endlicher Werth der Function zugehört, und dieser sich mit der Variabeln allmählich ändert. Eine Function, die nicht unendlich wird, wird daher unstetig nur, wenn sie vielfach wird („en devenant multiple“). Die Wurzel einer Gleichung, die von einem Parameter abhängt, den die Glei-

chung enthält, hört also [?] im Allgemeinen nur dann auf, eine stetige Function desselben zu sein, wenn sie mehrfache Wurzel der Gleichung wird. Ich nenne Hauptwerte (valeurs principales) die Werte des Parameters, für welche die Gleichung mit ihrer abgeleiteten gemeinsame Wurzeln hat. Demnach ist jede Wurzel entwickelbar nach aufsteigenden Potenzen des Parameters, solange der Modul desselben unterhalb des Moduls aller Hauptwerte bleibt. Dieses Theorem ist bereits in meiner Turiner Abhandlung von 1832 enthalten".

Man sieht, es handelt sich hier nicht mehr, wie noch in (12), um jene eine nach der Lagrange'schen Reihe entwickelbare Wurzel einer Gleichung, sondern um alle impliciten Functionen.

Von dem weiteren Inhalt der Note berichten wir weiter unten (Nr. 27).

(17) (18). Der Wert, den Cauchy diesen Sätzen und Begriffen beimass, drückt sich in den Worten aus: „ils réduisent la loi de convergence à la loi de continuité" (Einleitung zu (17)). Er versteht darunter die Erkenntnis, dass, wenn eine Function x implicit gegeben ist durch die Gleichung $f(x, t) = 0$, die Entwicklung derselben nach t, solange sie convergirt, eine Wurzel der Gleichung wirklich darstellt, sofern überhaupt $f(x, t)$ selbst eine in dem betrachteten Wertgebiet eindeutige, stetige Function ist ((18), (19) Einleitung § 1).

Der Satz vom isotropen Mittel und die Cauchy'sche Integralformel; Beweis des Convergenztheorems.

25. Der Beweis des ersterwähnten Haupttheorems gründet sich auf einen Mittelwertsatz (17), den man als den Vorläufer des Satzes über geschlossene Integrationswege (s. oben Nr. 18) ansehen kann, und der aussagt, dass das arithmetische Mittel aus allen Werten, die eine Function $f(z)$ auf der Peripherie eines Kreises um den Ursprung der imaginären Ebene als Mittelpunkt ($z = re^{i\varphi}$) annimmt*), denselben Wert behält, wenn man den Radius dieses Kreises innerhalb solcher Grenzen r_0 und R sich ändern lässt, dass innerhalb dieses Kreisrings $f(z)$ und die erste Derivirte $f'(z)$ nicht aufhören stetig [eindeutig] und endlich zu sein. Gilt dies für $f(z)$ und $f'(z)$ in den Grenzen 0 und R, so ist, über den Kreis R integrirt:

$$1) \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} f(z)\, d\varphi = 2\pi f(0),$$

woraus weiter folgt (für $|x| \leqq |z|$):

*) Dieses Mittel, „la moyenne isotropique" $\mathfrak{M}$ der späteren Aufsätze von Cauchy, wird in der Potentialtheorie (vergl. Pockels, Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta^2 u + k^2 u = 0$, III. Tl. (S. 215)) durch den Mittelwert der Potentialfunction auf einer Kugel ersetzt. Der Satz hat in beiden Theorien denselben Inhalt. S. unten IV. A.

$$2) \qquad 0 = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{z(f(z)-f(x))}{z-x} d\varphi = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{zf(z)}{z-x} d\varphi - 2\pi f(x).$$

Die Beziehung 2) rechts, die den Mittelwertsatz auf einen beliebigen Punkt x der Ebene überträgt, hat den Namen der Cauchy'schen Integralformel erhalten (vgl. z. B. Serret-Harnack, Diff. und Int.-Rechn. II, § 500). Man erhält andererseits, wenn ausser f(z), f'(z) auch noch die 2., 3., ... nte Derivirte $f^{(n)}(z)$ in jenem Kreise stetig und endlich bleiben, durch fortgesetzte partielle Integration:

$$3) \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{f(z)}{z^n} d\varphi = \frac{1}{n!} \int_{-\pi}^{+\pi} f^{(n)}(z) d\varphi = \frac{2\pi f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Den Beweis der Mittelwertformel 1) führt Cauchy in (17) und (18) verschieden: in (18) erst für ganze Functionen f(z) mit den gewöhnlichen Hülfsmitteln der Integralrechnung, dann für stetige überhaupt; wir gehen darauf nicht ein. Um zu dem Convergenztheorem selbst zu gelangen, schliesst, in die heutige Ausdrucksweise übertragen, Cauchy dann weiter so (Einleitung zu (18)):

Der absolute Betrag $|f(z)|$ von f(z) nimmt auf der Peripherie jenes Kreises R irgendwo einen Maximalwert $\max|f(z)|$ an. Gesetzt nun, es bestehe die Mac Laurin'sche Entwicklung von f(x) nach Potenzen von x innerhalb dieses Kreises, also für $|x| \leqq |z|$, so lässt sich von dem Coefficienten der nten Potenz von x: $1/n!\, f^{(n)}(0)$ wegen 3) behaupten, dass er dem Modul nach kleiner ist als:

$$\frac{1}{|z|^n} \cdot \max|f(z)|.$$

Daher ist der Modul des nten Terms der Entwicklung kleiner als:

$$\left|\frac{x}{z}\right|^n \cdot \max|f(z)|;$$

der Rest der Reihe überschreitet also nicht die Grösse:

$$\left|\frac{x}{z}\right|^n \cdot \max|f(z)| \cdot \frac{1}{1-\left|\frac{x}{z}\right|},$$

und demnach convergirt die Reihe noch innerhalb jedes Kreises, dessen Halbmesser kleiner ist, als derjenige, auf dessen Peripherie eine Stelle liegt, für die $\max|f(z)|$ selbst einen Maximalwert annimmt, der also bis zur nächsten „Verzweigungsstelle" reicht. Die Frage, wie sich die Reihe verhält, wenn man den Kreis über diese Stelle hinaus ausdehnt, wird jedoch nicht erörtert.

Den Beweis für die Mac Laurin'sche Form der Potenzreihe führt

Cauchy dadurch, dass er in Formel 2) auf der rechten Seite unter dem Integralzeichen $1/(z-x)$ in eine Potenzreihe nach x/z entwickelt und dann die Formel 3) anwendet.

Eine Fortsetzung dieser Untersuchungen für den Fall, dass jene Voraussetzung über $f(z)$ nicht erfüllt ist, hat Cauchy zugleich mit der Anzeige des Laurent'schen Satzes gegeben (s. unten Nr. 33).

Potenzreihen für implicite Functionen.

26. Die Abhandlung (18) geht dann näher auf die Entwicklung impliciter Functionen ein. Liegt die Gleichung vor:

$$f(x, y) = f(x, b+z) = 0, \quad \text{wo} \quad f(0, b) = 0$$

ist, so entwickelt Cauchy: α) eine Wurzel y in der Umgebung von $x = 0$ $(y = b)$: β) die Summe von m solchen Wurzeln y_i, für welche die Moduln der zugehörigen Werte von z [wir bezeichnen sie mit $|z|$] unterhalb einer Grenze Z liegen; endlich γ) die Summe von m gleichartigen Functionen $F(x, y_i)$ nach aufsteigenden Potenzen von x, alles unter der Voraussetzung, dass $f(x, b+z)$ — im letzten Fall auch $F(x, b+z)$ — endlich und stetig ist für $|x| < X$, $|z| < Z$; ferner, dass, wenn $|\zeta| = Z$, das Verhältniss:

$$1) \qquad \frac{\chi(x, b+\zeta)}{f(x, b+\zeta)}, \quad \text{wo} \quad \chi(xy) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

ist, innerhalb der Grenze $|x| < X$ in eine Reihe nach ganzen Potenzen von x entwickelbar ist. Man erhält zunächst, z. B. für y, ein nach x zu entwickelndes bestimmtes Integral:

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \zeta(b+\zeta) \frac{\chi(x, b+\zeta)}{f(x, b+\zeta)} d\zeta,$$

wo ζ auf dem Kreise vom Halbmesser Z zu führen ist.

Das $n$te Glied dieser Entwicklung, das man durch die Entwicklung von χ/f erhält, heisst:

$$U_n = \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \zeta \cdot \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \left[\frac{\chi(\xi, b+\zeta)}{f(\xi, b+\zeta)} (b+\zeta) \right] d\zeta,$$

wo zu $z = \zeta$, $x = \xi$ gehört.

Alle diese Beziehungen beruhen auf einem Satze, der die Bedingung angiebt, unter der die Gleichung $f(x, b+z) = 0$ ebensoviele Wurzeln z in der Nähe des Wertes $z = 0$ (genauer, in dem Kreise Z) enthält, als die Gleichung $f(0, b+z) = 0$ Wurzeln z in der Nähe von $z = 0$ (demselben Kreis) besitzt; Bedingungen, die im Wesentlichen den Umfang von $|x|$ dahin begrenzen, dass eben der Quotient 1) noch in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ (d. h. nach ganzen positiven Potenzen von x) entwickelbar ist.

Anwendung auf die Theorie der algebraischen Gleichungen, insbes. solche mit nur reellen Wurzeln.

27. Bevor wir von den weiteren Schritten berichten, die Cauchy und jüngere Landsleute von ihm in der Vervollkommnung seiner Theorie machten, ist es nöthig, der Anwendungen zu gedenken, durch die der Erfinder die Brauchbarkeit seiner Sätze darzuthun bemüht war, und auf die er augenscheinlich nicht geringen Wert legt, da er immer wieder darauf zurückkommt. Neben Aufgaben der angewandten Mathematik, so namentlich auf dem Gebiete der Astronomie, auf die wir hier nicht eingehen wollen, richtet sich sein Augenmerk namentlich auf die Auflösung der gewöhnlichen algebraischen Gleichungen durch Reihenentwicklung. Unter Einführung eines willkürlichen Parameters t, der später den Wert 1 erhält, kann man jeder Gleichung die Form geben:

$$\pi(z) - t\varpi(z) = 0,$$

so dass jetzt eine Reihenentwicklung von z nach Potenzen von t Platz greifen kann. Liegen alle „valeurs principales“ (s. oben Nr. 24) von t ausserhalb eines Kreises vom Halbmesser 1, so darf man $t = 1$ setzen (14), (15), ohne dass die Reihe aufhört zu convergiren, während, wenn sie alle innerhalb dieses Kreises liegen, die Entwicklung nach $1/t$ zu erfolgen hat.

Einen dieser Versuche, der bezeichnend ist für die Wendungen, durch die Cauchy die erwähnte Frage seiner Methode zugänglich macht, wollen wir näher betrachten. Es handelt sich in (15) um eine algebraische Gleichung nten Grades $f(x) = 0$ mit lauter reellen ungleichen Wurzeln, sonst übrigens allgemeinen reellen Coefficienten; nur der von x^n ist $= 1$. Um convergente Entwicklungen für die Wurzeln zu finden, betrachtet Cauchy zunächst die Gleichung:

$$1) \qquad f(x) - pi = 0,$$

wo p eine reelle Grösse ist, $i = \sqrt{-1}$. Setzt man hier $x = 1/z$, so kommt

$$f(x) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\varphi(z)}{z^n} = pi,$$

oder:

$$\sqrt[n]{\varphi(z)} = \varpi(z) = z\sqrt[n]{pi} = \frac{z}{\lambda}.$$

Die Gleichung $\lambda\varpi(z) = z$ hat aber die Lagrange'sche Form, gestattet also die Anwendung der Lagrange'schen Reihe, die, wenn man die n Wurzeln der Gleichung $1/\lambda = \sqrt[n]{pi}$ benutzt, für genügend kleine λ, also grosse p, sämtliche n Wurzeln von 1) in Reihen nach aufsteigenden Potenzen von $\lambda = \frac{1}{\sqrt[n]{pi}}$ ergiebt. Setzt man jetzt $p = k' - k$ und

zieht k'i zu f(x), so sind andererseits (Nr. 24) die n Wurzeln der Gleichung:

$$2)\qquad i.f(x)+k' = k$$

nach positiven ganzen Potenzen von k entwickelbar (ebenfalls etwa mittelst der Reihe von Lagrange), wenn die Verzweigungswerte der linken Seite grössere Moduln haben, als k. Aber diese Verzweigungswerte bestimmen sich mit Hülfe von $f'(x) = 0$, einer Gleichung mit reellen Wurzeln, wenn $f(x) = 0$ lauter solche hat. Daher sind die verschiedenen Werte, die vermöge dieser reellen Wurzeln die Grösse

$$\sqrt{f^2(x)+k^2}$$

annimmt (also die Moduln der Verzweigungswerte des Ausdrucks $if(x)+k'$ für $k' = k$) grösser als k. Die ersten Glieder dieser Entwicklungen von x nach k aus 2), welche, wenn man $k' = k$ setzt, die n Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ darstellen, werden mit denen der Wurzeln von 1) nach $p^{1/n}$ für $p = k' = k$ übereinstimmen. — Diese Methode, die übrigens die reellen Wurzeln in zunächst imaginärer Gestalt giebt, ist überhaupt auf die reellen Wurzeln einer Gleichung mit reellen Coefficienten anwendbar, versagt aber bei den imaginären Wurzeln. Die Surrogate, die Cauchy für diesen Fall entwickelt (deren eines z. B. auf die Spaltung der Gleichung in vier andere mit Wurzelgruppen von besonderen Eigenschaften hinausläuft), scheinen ihm selbst nicht zu genügen (l. c. p. 820). Erst das Theorem von Laurent (29) hat diesem Bemühen ein Ziel gesteckt.

Zunächst ist, wohl im Zusammenhang mit der eben erörterten Gedankenfolge, die grosse Arbeit (19) entstanden, die sich im wesentlichen mit Gleichungen beschäftigt von der Form:

$$\varpi(x) = t,$$

wo $\varpi(x)$ eine gebrochene rationale und reelle Function von x ist.

In Bezug auf x aufgelöst kann eine solche Gleichung für ein reelles t nur unter gewissen Bedingungen bloss reelle Wurzeln haben: Es dürfen sich 1. die Grade von Zähler und Nenner höchstens um eine Einheit unterscheiden. 2. Die Linearfactoren von Zähler und Nenner müssen reell und ungleich (nicht „égales", p. 110 l. c.) sein und, der Grösse nach geordnet, abwechselnd dem einen und dem anderen Polynom angehören, u. s. w.

Die Richtigkeit dieser und der Zwischensätze, die zu ihnen hinleiten, sind, wenn man obige Gleichung durch eine Curve darstellt, geometrisch so evident und die Sätze alsdann teilweise so trivial, dass man sich

wundert, dass Cauchy auf diese Interpretation nicht wenigstens aufmerksam gemacht hat.

Wurzeln, die in einem Verzweigungs-(kritischen) Punkt zusammengefallen sind.

28. Von Wichtigkeit dagegen für die allgemeine Theorie ist der im Eingange dieser Abhandlung (19) bewiesene Satz: Wenn vermöge einer Gleichung:

$$F(x, t) = 0,$$

wo F eine im Allgemeinen stetige Function von x und t ist, einem Wert von t ein oder mehrere Werte von x entsprechen, so entsprechen einem benachbarten Wert von t ebensoviele Nachbarwerte von x, als vorher Wurzeln zusammengefallen waren. Der Beweis dieses Satzes (der dem oben Nr. 26 erwähnten verwandt ist) wird auch in heutigen Lehrbüchern (z. B. Briot et Bouquet, Théor. des fonct. ellipt. 2. éd. p. 31) nach Cauchy reproducirt. Man erkennt, wie nahe er mit dieser Bemerkung an den Untersuchungen war, die später Puiseux ausführte.

Der Satz über die Zahl der Wurzeln in einem abgegrenzten Gebiet der imaginären Ebene.

29. Wir wollen Cauchy's Anwendungen seiner Theorie auf die Algebra nicht verlassen, ohne an den schon erwähnten grundlegenden Satz zu erinnern, der die Anzahl der in einem geschlossenen Gebiet der imaginären Ebene gelegenen Wurzeln einer algebraischen Gleichung $f(z) = 0$ bestimmt. Ist $f(x + iy) = t + iu$, wo t, u reelle Functionen von x, y sind, so drückt sich jene Anzahl durch die halbe Differenz der Zahl der Zeichenwechsel aus, welche beim Durchgang durch Null in der einen und in der anderen Richtung stattfinden, wenn das Verhältnis u/t die Wertereihe längs der Begrenzung des Gebietes durchläuft.

Dieser Satz enthält den Fundamentalsatz der Algebra als Corollar. Ueber den ursprünglichen Beweis des letzteren, der auf der Integration durchs Imaginäre beruht (s. oben Nr. 9), berichtet Valson (La vie et les travaux du Baron Cauchy, T. II, p. 84) aus den Turiner Abhandlungen (1831). Später hat ihn Cauchy durch den calcul des indices (Journ. école polyt. Cah. 25, 1837) auf rein algebraische Grundlage gestellt.

Die Verzweigungspunkte bereiten Schwierigkeiten.

30. Die Vorlesungen Cauchy's, von Moigno herausgegeben (6), enthalten in T. I, leçons 17, 18, Auszüge eines begeisterten Schülers aus den oben besprochenen Arbeiten. Es gilt auch für sie — was an des Meisters eigener Formulirung auszustellen ist —, dass nämlich hinsichtlich der Convergenzkriterien ein Unterschied zwischen „kritischen“ (Verzweigungs-)Punkten und Polen (Unendlichkeitspunkten), s. oben XX. 17, 24, der impliciten Functionen nicht gemacht wird. In dem Bestreben, seine Voraussetzungen möglichst allgemein zu halten, unterlässt es

Cauchy, besonders auf die algebraischen Functionen einzugehen, die zu dieser Unterscheidung geführt hätten, wiewohl die Anregung auch hierzu nicht fehlte. Lamarle (28) findet nämlich Cauchy's Formulirung der Stetigkeitsbedingung in (14) für die Entwickelbarkeit einer Function in eine Reihe, die nach ganzen Potenzen aufsteigt, nicht hinreichend. Er sieht den Grund dafür, dass z. B. $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ nicht in dieser Weise darstellbar ist, in einer Unterbrechung der Stetigkeit von f(x) längs irgend einer von dem Ursprung ins Unendliche gehenden Linie [einem „Verzweigungsschnitte" der Riemann'schen Fläche]. Wenn man $x = re^{i\varphi}$ setzt, so nimmt f(x) einen anderen Wert in $\varphi = 0$, wie in $\varphi = 2\pi$ an. Der Begriff der Stetigkeit verlange also eine Modification. Cauchy (Liouv. Journ. XI, p. 317, 1846) verweist dagegen auf eine von ihm schon gegebene modificirte Fassung dieses Begriffs (C. R. XVIII, S. 116, § III, 1844), wo Stetigkeit sowohl hinsichtlich des Moduls, als auch des Arguments verlangt wurde (wo auch zum ersten mal das Integral längs einer Unstetigkeitslinie auftritt, welches die Stelle des Residuums im Falle von Unstetigkeitspunkten ersetzt). Cauchy zeigt aber zugleich an dem Beispiel $f(x) = (1+x)^{p|q}$, dass Unstetigkeit des Arguments nicht (wie dies Lamarle behauptet hatte) nothwendig die Entwickelbarkeit nach ganzen Potenzen von x in Frage stelle.

Eine Aufklärung aller dieser Verhältnisse gab, soweit sie nicht schon in Cauchy's Abhandlung (16), über die wir sogleich berichten werden, enthalten war, erst Puiseux, indem er zeigte, dass die Entwicklung einer Function von x in einem kritischen Punkt (Verzweigungspunkt) $x = a$, wo zwei oder mehrere Functionswerte zusammen gefallen sind, nach gebrochenen Potenzen von $x - a$ fortschreitet.

Die Fläche der Moduln des Parameters in einer Gleichung und ihre Niveaucurven. Entwicklung nach gebrochenen Potenzen. Glieder mit negativen Exponenten.

31. (16). Inzwischen hatte jedoch Cauchy selbst noch von einer anderen Seite her in wirksamster Weise der Theorie von Puiseux den Weg geebnet. Die Abhandlung (16) entwickelt für die Abhängigkeit von t und z, zwischen denen die Gleichung besteht:

$$\Pi(z) + t\varpi(z) = 0$$

(wo Π und ϖ ganze Functionen sind), ein neues geometrisches Bild, das entsteht, indem man den Modul T von t über der imaginären z-Ebene als Lot aufträgt. Es entsteht so eine krumme Oberfläche, deren Horizontalschnitte constanten Werthen von T entsprechen. Projicirt man diese Schnitte in die z-Ebene, so entsteht ein Curvensystem mit dem Parameter T:

$$T = \text{mod}\,\frac{\Pi(x+iy)}{\varpi(x+iy)}.$$

Den Grenzwerten 0 und ∞ von T entsprechen die durch $\Pi = 0$ und $\varpi = 0$ definirten Punkte. Bei wachsendem T entwickeln sich aus den ersteren sie umschliessende Ovale. Diese dehnen sich aus, vereinigen sich und zwar immer dann, wenn t einen der „Hauptwerte" (s. oben Nr. 24) annimmt, wobei Doppel- oder mehrfache Punkte an den Vereinigungsstellen entstehen. „Kreuzungspunkte", wie sie später F. Klein (Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale, Leipzig 1882) genannt hat, die dann also Verzweigungswerten von z entsprechen. Dann schnüren sich wieder Ovale ab, die sich zuletzt auf die durch $\varpi = 0$ dargestellten Punkte zusammenziehen. Das einem gegebenen Wert von T entsprechende System von Curven giebt nun Anlass zu einer Gruppirung der Wurzeln in solche, die sich einzeln, und solche, die sich nur in einer symmetrischen Gruppirung mit anderen, welche demselben Oval angehören, nach aufsteigenden Potenzen von z entwickeln lassen. Cauchy bemerkt, dass zwei oder mehrere Zweige von T = const. sich in den Kreuzungspunkten unter gleichen Winkeln begegnen, und dass, wenn man $t = e^{S+Pi}$ setzt, die Curven S = const. und P = const. sich allenthalben rechtwinklig schneiden. Er erwähnt, dass in dem Fall, wo $\Pi(z)$ von niedrigerem Grad in z ist, als $\varpi(z)$, man auch die für $t = 0$ unendlich gross werdenden Wurzeln nach aufsteigenden Potenzen von t entwickeln könne, dass aber eine endliche Anzahl von Gliedern mit negativen Exponenten vorausgehen müsse. — Er bemerkt ferner, dass, falls eine der Gleichungen $\Pi = 0$, $\varpi = 0$ gleiche Wurzeln hat, eine Entwicklung von z nach auf- bezw. absteigenden Potenzen von $t^{1/m}$ stattfindet, die wieder je inner- oder ausserhalb eines Kreises convergirt, der den nächsten „Hauptwert" aus- bezw. einschliesst (l. c. p. 779). Den Uebergang von der Gleichung mit linear auftretendem Parameter zu der allgemeinen Gleichung $f(t, z) = 0$ macht Cauchy in der oben erwähnten Abhandlung (C. R. XVIII. 1844) „Sur les fonctions continues". Aber wie hier so ist auch in allen späteren Arbeiten von Cauchy für die tiefere Einsicht hinderlich, dass er sich auf die Entwicklung von z nach Potenzen von t und von $1/t$ (statt nach solchen von $t-a$) beschränkt, also überall den Mac Laurin'schen statt des Taylor'schen Satzes der Darstellung zu Grunde legt und so das Verhalten der Function im Ursprunge des Coordinatensystems der imaginären Ebene auszeichnet.

Divergenz der Mac Laurin'schen Reihe bei Ueberschreitung des Kreises.

32. (21).(30). Noch näher an die volle Erkenntnis des Sachverhaltes streift Cauchy in der Note (21), die er aus Anlass der Arbeit (30) von Chio veröffentlicht. Er verwendet dort die in (16) entwickelte geometrische Darstellung, um diejenige Wurzel der Gleichung:

1) $$a - z + t \cdot \varpi(z) = 0,$$

[illegible] deren den nächsten Verzweigungspunkt geht.

welche speciell die Reihe von Lagrange liefert, und deren Entwicklung mit $z = a + \cdots$ beginnt, von den übrigen [die alle in einem Verzweigungspunkt in $t = 0$ zusammenhängen] zu unterscheiden. Er dehnt diese Bemerkung auf alle diejenigen Entwicklungen aus, die der Gleichung:

2) $$H(z) + t \cdot \varpi(z) = 0$$

genügen und mit einer der Wurzeln der Gleichung $H(z) = 0$ beginnen. Chio hatte in seiner zweiten Abhandlung über die Lagrange'sche Reihe (30) die Bemerkung gemacht, dass die nächste Stelle, wo die Wurzel $z = a + t \cdot \mathfrak{P}(t)$ (wegen der Bez. s. Nr. 26) von 1) mit einer der übrigen Wurzeln zusammenfällt, nicht nur den Radius $|t|$ des Kreises liefert, innerhalb dessen die Entwicklung convergirt, sondern dass von diesem Modul $|t|$ ab, was übrigens auch Cauchy schon in (12) bemerkt hatte, Divergenz eintritt. Chio unterlässt jedoch, darauf hinzuweisen, dass Divergenz nicht eintritt, wenn der Modul einen kritischen Punkt überschreitet, in welchem zwei Wurzeln, die von der entwickelten verschieden sind (also anderen Blättern der Riemann'schen Fläche zugehören), zusammenfallen.

Auf diesen Umstand kommt Cauchy in seinem Referat (C. R. XXXIV. S. 311, 1852) zu sprechen. Schon in demjenigen über die erste Abhandlung von Chio (C. R. XXIII. S. 496 ff. 1846) hatte Cauchy an der Hand der Abbildung, die wir in Nr. 31 besprochen haben, dargelegt, dass bis zu der Stelle, wo die entwickelte Wurzel $(z = a + \cdots)$ mit einer anderen zusammenfällt, diese Entwicklung convergirt. In dem neuen Referat hebt er hervor, dass von da ab dann aber auch Divergenz eintritt. Er wendet diese Regel auf den von Lagrange betrachteten Fall eines Polynoms fx mit reellen Coefficienten an, was ihn wieder auf die von Chio gegebene Bedingung (s. o. Nr. 5, Lagrange) führt, dass die Coefficienten alle dasselbe Vorzeichen besitzen müssen. Man vergleiche hiermit: Mémoire sur l'application du calcul infinitésimal à la détermination des fonctions implicites (C. R. XXXIV. p. 265), wo die Frage der Entwicklung solcher Functionen in convergente Reihen und des Beginnes der Divergenz auf diejenige nach den Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt wird, die gegebene Anfangswerte besitzen, also auf eine Aufgabe, die in einer berühmten Abhandlung (Ex. d'Analyse I. p. 327) Cauchy bereits behandelt hatte. — Ausführlicher berichtet über die Arbeiten Cauchy's zur

Theorie der durch Differentialgleichungen definirten Functionen Casorati (Teorica delle funzioni di variabili complesse (Pavia 1868) S. 84 ff.).

Reihen nach auf- und absteigenden Potenzen der Veränderlichen.

33. Fünf und zwanzig Jahre lang hatte Cauchy das Feld der von ihm 1821 so glücklich inaugurirten Functionentheorie fast ganz allein bearbeitet. Von 1844 an beginnt die Mitwirkung seiner Landsleute bei Ausgestaltung der von ihm teilweise noch unvollendet gelassenen Sätze und Begriffe. Der Satz über die Entwickelbarkeit einer Function nach aufsteigenden Potenzen der Veränderlichen in (14) bot, z. B. auf die Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit Parameter angewandt, das Unbefriedigende, dass die Entwicklung der Wurzeln immer nur für einen beschränkten Teil der Ebene Geltung hat. Der Bereich erweitert sich allerdings, wenn man anstatt einer einzelnen Wurzel symmetrische Functionen von Wurzelgruppen darstellt, und Cauchy's Anstrengungen auf diesem Gebiet zeugen von dem Wert, den er dieser Fragestellung beilegte. Aber er verliess sie sofort, als Laurent jenen bekannten Satz gefunden hatte, der die Cauchy'sche Theorie in einem so wesentlichen Punkt ergänzt.

(29) P. A. Laurent erkennt, dass eine nur in einzelnen Punkten unstetige Function auch an solchen Stellen der imaginären Ebene, die der Entwicklung nach nur auf- oder nur absteigenden Potenzen unzugänglich waren, eine Entwicklung zulässt, wenn man die gemischte Darstellung nach auf- und absteigenden Potenzen der Veränderlichen anwendet. Wenn nämlich eine Function nebst ihrem Differentialquotienten statt im Inneren eines Kreises in den Punkten einer Kreisringfläche, deren Mittelpunkt der Nullpunkt ist, stetig [und eindeutig] ist, so ersetze man das Integral, das früher (Nr. 25, Gl. 2)) auf dem Kreisumfang R geführt, den Wert Null ergab, jetzt durch ein solches, das auf den beiden Grenzkreisen des Rings (in entgegengesetztem Sinne) geführt wird, während x einen Punkt im Inneren der Fläche des Ringes bedeutet. Das Ergebnis ist — ähnlich abgeleitet wie dort — eine im Inneren des Kreisrings gültige Entwicklung der Function f(x) nach gemischten Potenzen. Auch die Coefficienten dieser Doppelreihe bestimmen sich, wie früher, durch das „isotrope Mittel“ (C. R. XVIII, 1844, p. 989; XX, 1845, S. 120).

Durch Laurent's Satz wird für zusammenhängende Bereiche der ganzen Ebene die Darstellung jeder Wurzel einer algebraischen Gleichung mit Parameter in Potenzreihenform ermöglicht, und damit ein altes Problem von Cauchy erledigt.

Points d'arrêt und lignes d'arrêt gegenüber den Verzwei-

34. Um das Jahr 1851 wird Cauchy mit einem Teil der Untersuchungen von Puiseux, über die wir sogleich berichten werden, bekannt. Sie regen ihn dazu an, in (22) die Integrationswege in der ima

zungspunkten und Querschnitten der Riemann'schen Fläche.

ginären Ebene für nicht eindeutige Functionen dadurch zu eindeutigen zu gestalten, dass er von allen Punkten (points d'arrêt) aus, in denen entweder eine Wurzel der Gleichung $f(u, z) = 0$, durch welche die Function u definirt ist, unendlich wird, oder wo einige Wurzeln zusammenfallen, also sowohl von den Polen wie von den kritischen Punkten (XX. 17. 24.) aus gerade Linien ins Unendliche zieht, die von dem Weg, auf dem das Integral $\int u dz$ geführt wird, nicht überschritten werden dürfen, wenn dasselbe stetig sich ändern soll. Der Zuwachs, den es dagegen erfährt, wenn der Integrationsweg, der jene Linien schneidet, eine geschlossene Curve ist, auf der ein Wurzelwert von u wieder in sich selbst übergeht, setzt sich aus Einzelzuwächsen zusammen, die erstens aus Integralen längs gerader Verbindungslinien zwischen den points d'arrêt c, c'... bestehen, wenn nämlich $(z-c)u$, $(z-c')u$, ... für $z = c$, $z = c'$... verschwinden (vergl. Puiseux, Recherches etc. § 50), und zweitens aus Residuenausdrücken, die solchen points d'arrèt entsprechen, wo die Producte $(z-c)$ etc. diese Bedingung nicht erfüllen.

Diese Unterscheidung zwischen kritischen und Unstetigkeitspunkten, die Cauchy wohl auch nur aus Puiseux' Recherches etc. § 50 entlehnt, zeigt die Richtung an, in der sich nun die Theorie zu bewegen hatte, um zu einer Unterscheidung der Integrale nach Gattungen und zur Bestimmung ihrer Periodicität zu gelangen. Die kurzen Andeutungen der Note können in dieser Hinsicht jedoch nicht genügen.

Der in (23) gegebene Ausdruck für die Anzahl der verschiedenen Perioden eines Integrals $\int u dz$ ist denn auch (welche Deutung man auch den nur flüchtig erklärten Bezeichnungen beilegt) mit der Riemann'schen Zahl nicht in Uebereinstimmung zu bringen.

Da wir später auf Cauchy's lignes d'arrèt nicht mehr zurückkommen werden, so mögen hier einige vergleichende Bemerkungen Platz finden, die vorgreifend von der Riemann'schen Fläche handeln, mit der sich mancher Mathematiker nicht so leicht befreundet, wie mit den points d'arrèt. Und doch bieten die lignes d'arrèt, ebenso wie die wesentlich gleich bedeutenden „coupures" von Hermite (Journal f. Math. Bd. 91, S. 62), keinen gleichwertigen Ersatz für die „Querschnitte" der Riemann'schen Fläche.

Die über der imaginären Ebene n-blättrig ausgebreitete Riemann'sche Fläche T verdankt ihren Ursprung dem Bedürfnis, für die Functionszweige einer n-wertigen algebraischen Function einen geometrischen Ort zu besitzen, in welchem sie eindeutig verläuft. Ueber denjenigen Stellen der imaginären Ebene, wo Wurzeln einander gleich werden, hat

sie Verzweigungspunkte, d. h. Stellen, wo zwei oder mehrere Blätter zusammenhängen, und wo man, wegen der Puiseux'schen Cyclen, (unten Nr. 42) diesen Zusammenhang sich als eine schraubenförmige Verbindung (von jenen zwei oder mehreren Blättern), die in sich selbst zurückläuft, zu denken hat. Die von einem Verzweigungspunkt ausgehende Selbstdurchsetzung der Fläche T erstreckt sich bis zu einem anderen als „Uebergangslinie" („Verzweigungsschnitt", vergl. Lüroth, Math. Ann. IV, S. 183 und Münch. Abh. 1885) und dient, wie etwa die Doppelcurve einer algebraischen Fläche, zur Verbindung verschiedener Blätter, so dass man, um von einem Blatt in ein anderes zu gelangen, notwendig eine Uebergangslinie passiren muss.

Wir gehen hier nicht auf die verschiedenen möglichen Anordnungen ein, die man bei gegebener Structur der Cyclen in den Verzweigungspunkten diesen Linien noch geben kann (s. Rf. V, Nr. 46)*).

Die Riemann'schen Fläche T hat im allgemeinen einen mehrfachen „Zusammenhang" — ein der Analysis situs entnommener Begriff, wegen dessen wir auf Riemann's Dissertation verweisen. Ist sie (2p+1)-fach zusammenhängend, so hat man nach Riemann 2p Querschnitte herzustellen, um sie in eine einfach zusammenhängende T' zu verwandeln. Dieser Process dient dazu, die allenthalben endlichen Integrale der in der Fläche eindeutigen algebraischen Functionen in der zerschnittenen Fläche T' eindeutig führen zu können. Die Ueberschreitung eines solchen Querschnitts liefert einen Periodenzuwachs; die Zahl der linear unabhängigen Perioden eines Integrals erster Gattung ist so gross, wie die Zahl dieser Querschnitte. Auch die Anordnung der Querschnitte kann bei gegebener Fläche noch auf verschiedene Arten vorgenommen werden.

Aber die Zerschneidung spielt auch eine Rolle gegenüber der conformen Abbildung der Fläche T', wie sie z. B. durch ein solches Integral erster Gattung w vermittelt wird. Die Fläche T' geht vermöge dieser Abbildung in eine die w-Ebene ein- oder mehrfach bedeckende Fläche über, deren Ränder den Rändern dieser Fläche eindeutig entsprechen, so dass jeder einzelne Querschnitt vermöge seiner Ränder

*) Ein anschauliches Bild von dem Verlauf einer Riemann'schen Fläche in der Nähe der Verzweigungspunkte gewähren die von H. A. Schwarz construirten Modelle; ein Bild der Fläche selbst, für gewisse einfache Functionen, ebensolche von Dyck, die durch Auftragen bloss des reellen (imaginären) Bestandteils der Function über der imaginären Ebene entstanden sind.

zugleich zwei — im Allgemeinen an verschiedenen Stellen gelegene — Grenzeurven der neuen, übrigens ebenfalls einfach zusammenhängenden Fläche liefert.

Ausser diesen Querschnitten benutzt nun Riemann als Querschnitte noch gewisse „Linien l" in der Fläche T, wenn es sich um Integrale mit logarithmischen Unstetigkeitsstellen oder andere in der Fläche T′ nicht eindeutige Functionen handelt. Sie führen je von einem logarithmischen Unstetigkeitspunkte der Function in der Fläche T′ bis zu einem Punkte des früheren Querschnittsnetzes, und werden so zu dem Querschnittsnetze von T′ zugezogen, mit dem zusammen sie eine wiederum einfach zusammenhängende Fläche T″ bilden, in welcher das betreffende Integral dritter Gattung u. s. w. wieder eindeutig verläuft. Auch die Ränder der Fläche T″ ordnen sich paarweise den Querschnitten zu und trennen sich bei einer conformen Abbildung von T″.

Beim Ueberschreiten eines Riemann'schen Querschnittes ändert sich also die algebraische Function nicht, ein Integral derselben aber um einen (längs dieses Querschnitts constanten) Zuwachs, der (je nach dem Integrale) bei den Linien l auch gleich Null sein kann; die Querschnitte dienen also zur Isolirung der Integralwerte, nicht aber der Werte der algebraischen Function selbst. Im Gegensatz hierzu beziehen sich die Cauchy'schen lignes d'arrêt und die mit ihnen wesentlich identischen „coupures" von Hermite überhaupt nur auf die imaginäre Ebene. Sie errichten in dieser Ebene Schranken, über die zunächst weder die Function selbst, noch deren Integral hinweggeht. Sie sind lediglich analytischen Charakters. Würde man einen Verzweigungsschnitt der Fläche T in die imaginäre Ebene projiciren, so würde er eine ligne d'arrèt ergeben, aber eben implicite für alle Blätter, während doch gewisse Wurzelausdrücke diese Schranke ohne Unstetigkeit überschreiten können. Das Gleiche gilt von den Querschnitten. Und zwar ergeben die Projectionen der Verzweigungsschnitte das ausreichende System aller derjenigen lignes d'arrèt, welche die algebraische Function zu einer eindeutigen machen, diejenigen der Querschnitte alle für die Integrale u. s. w. erforderlichen lignes d'arrèt auf der Ebene. Die Querschnitte liefern also notwendig lignes d'arrèt, aber nicht umgekehrt.*)

*) Man vergl. wegen dieser Unterscheidung auch Casorati's Abhdlg. Sopra le „coupures" in Annali di mat. Ser. 2, XV, XVI, wo übrigens die hier berührten Gesichtspunkte nicht deutlich genug hervortreten.

Uebrigens hat Lüroth (d. Rf. V, Nr. 46) gezeigt, dass man die Vorstellung der Riemann'schen Fläche bei Herstellung der Querschnitte und bei dem Studium der Periodenverhältnisse entbehren kann, wenn man ausser den lignes d'arrêt (den „Absonderungsschnitten“) noch die Gruppirung der Wurzeln in der Nähe der Verzweigungspunkte kennt. Ja auch diese Herstellung lässt sich schliesslich durch tabellarische Operationen ersetzen.

Productentwicklungen.

35. Gesammtresiduen mit unendlich vielen gegen Null convergirenden Gliedern in der imaginären Ebene benutzt Cauchy (25) zu Partialbruch- und daran anschliessend zu Product-Entwicklungen transcendenter Functionen. Die letzteren werden in nachfolgenden Noten des 32ten Bandes der C. R. namentlich für Kreis- und elliptische Functionen weiter ausgeführt (S. 267, 345) nach einer Methode, deren man sich mit vielem Vorteil auch später (Briot et Bouquet. Théor. des fonct. ellipt.) bedient hat.

Allgemeines zur Theorie der Functionen complexer Veränderlichen. Der erste Differentialquotient.

36. Die Abhandlungen (24), (26) und folgende enthalten allgemeine Begriffsbestimmungen zur Theorie der Functionen. Durch die Untersuchungen, über die wir berichtet haben, hatte sich Cauchy's Kenntnis der Functionen beträchtlich über das Niveau des Cours d'Analyse erhoben. Nicht nur der Kreis der bekannten Functionen hatte sich durch die mehrfach periodischen Functionen erweitert; durch die Fortsetzung der Variabeln in das imaginäre Gebiet wurde auch die Darstellung der einzelnen Functionszweige, ihr Verhalten an Unstetigkeitsstellen u. s. w. geklärt. Zunächst giebt (24) eine neue Auffassung des Differentialquotienten einer Function nach der complexen Variabeln, und schliesst damit eine Reihe von Zweifeln und Discussionen ab, die sich zwischen Cauchy, Sturm und Liouville über die Frage erhoben hatten, ob die Stetigkeit einer Function für deren Entwickelbarkeit ausreiche, oder ob noch die des Differentialquotienten mit zu verlangen sei.

Cauchy macht in (24) die Bemerkung, dass die Function u einer complexen Grösse $z = x + iy$ (er gebraucht hier und in (22), (23) die Gauss'sche Bezeichnung $i = \sqrt{-1}$), welche mit z durch die Gleichung:

$$f(u, z) = 0$$

verbunden ist, wo f „eine immer stetige Function“ von u und z ist, die Eigenschaft besitzt, dass ihre erste Ableitung nach z von der Fortschreitungsrichtung dy/dx in der Ebene unabhängig ist, und dass alsdann immer die partielle Differentialgleichung erfüllt ist: $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$. Cauchy schliesst die Bemerkung an, es gehe daraus hervor, dass er Recht gehabt habe, wenn er für die Entwickelbarkeit einer Function in eine Potenzreihe (bei complexem Argument) die Stetigkeit der ersten Ableitung

mit forderte; denn man könne sonst in $u = v + iw$ die beiden Functionen v, w von x, y von einander ganz unabhängig annehmen. — Riemann hat denn auch später u nur dann eine Function von $z = x + iy$ genannt, wenn eben jene Bedingung hinsichtlich der Fortschreitungsrichtung in der imaginären Ebene erfüllt ist. Diese eine Bedingung der „Monogenität", also der Existenz des ersten Differentialquotienten, aber im complexen Gebiete, grenzt übrigens ein beschränkteres Gebiet von Functionen ab, als die der Existenz aller Differentialquotienten auf reellem Gebiet, welche bekanntlich die Entwickelbarkeit in eine Potenzreihe nicht sichert (vgl. Pringsheim, Math. Ann. Bd. 44, S. 57).

Neue Bezeichnungen.

37. Diese neuen Begriffe und Sätze nötigten (26) zur Einführung neuer Bezeichnungen. Eine Function $f(z)$ wird von Cauchy „monotypique", später „monodrome", von anderen „monotrope" (Briot et Bouquet, Fonct. ellipt. 2. éd. § 11) oder „uniforme" (Hermite, Cours pr. à la faculté des sciences, lithogr., 3. éd. 1887, 6. leç.) [in einem Teile der Ebene] genannt, wenn sie [daselbst] für jeden Wert von $z = x + iy$ nur einen einzigen Wert besitzt („eindeutig" ist). Sie ist „monogen", wenn sie für jedes z nur einen Differentialquotienten besitzt (24), d. h. wenn der Differentialquotient einer selbst monodromen Function auch monodrom ist (C. R. XXXIV, S. 266).

Auf diese Bezeichnungen kommt Cauchy in späteren Noten zurück (C. R. XXXIV, 1852, S. 266) und ergänzt sie durch das Wort „synectique", das eine monodrome, monogene Function bezeichnet, die nicht unendlich wird. Es mag bemerkt werden, dass die französischen Schriftsteller heute statt „synektisch" mit Briot und Bouquet (Fonct. ellipt. 2. éd. §§ 15, 16) „holomorph" (in dem betreffenden Teile der Ebene) sagen; „meromorph", wenn die Function dort noch „Pole" besitzt, eine Bezeichnung, die teilweise auch deutsche Schriftsteller adoptirt haben, während andere mit Weierstrass von einer synektischen oder holomorphen Function sagen, dass sie „den Charakter einer ganzen rationalen Function besitze", der meromorphen den Character einer gebrochenen rationalen Function zuerkennen. — Wir müssen uns jedoch versagen, in vorliegendem Referat auf den Inhalt der erwähnten Werke von Briot und Bouquet über elliptische Functionen und des Cours von Hermite über Functionentheorie, die in Auffassung und Anordnung der Cauchy'schen Theorie manches Neue bringen, einzugehen, weil diese Werke den Anwendungen auf algebraische Functionen ferner stehen. Auch werden dieselben zugleich mit Liouville's Vorlesungen über diesen Gegenstand in der ausführlichen historischen Einleitung zu dem Werk von Casorati

„Teorica delle funzioni di variabili complesse" Pavia 1868 (Vol. I, der einzige erschienene Band) besprochen (p. 111ff.), auf das wir bei diesem Anlass als eine treffliche Ergänzung zu unserem Bericht hinzuweisen nicht unterlassen wollen.

Uebersicht über die Anwendungen der Sätze zur Functionentheorie in verschiedenen Gebieten.

38. In zahllosen Berichten über Abhandlungen, die in den Exercises oder sonstwo erscheinen sollten, in Noten, die meist damit anfangen, längst bekannte Sätze und Begriffe in voller Ausdehnung — zuweilen sogar mit Beweisen — zu wiederholen, hat Cauchy die vorgetragenen Grundgedanken vielfach reproducirt, aber freilich sie oft auch mit neuen und überraschenden Bemerkungen und Anwendungen versehen. Sätze und Beweismethoden, die sich auf die Grundlagen der Functionentheorie beziehen (C. R. XIX, S. 1338), auf Herstellung der Productentwicklung für periodische Functionen (25); auf den Beweis des Abel'schen Theorems mittels Residuencalculs (C. R. XII, 1841. S. 872, S. 1029) und eine Erweiterung desselben; auf die trigonometrischen Reihen, die als Potenzreihen nach e^{ix} Cauchy's Theorie zugänglich sind (C. R. XII, 1841, S. 871, ferner in C. R. XXXIV, 1852, SS. 70, 122, 156, wo abbrechende, auch divergente Reihen zur Berechnung der Coefficienten der Fourier'schen Reihen herangezogen werden); ferner Methoden zur angenäherten Berechnung der Wurzeln numerischer Gleichungen (C. R. V, 1837, S. 357; XXIX, 1849, S. 250; XXXIV, 1852, S. 345, équations trinomes) u. s. w. füllen die 43 ersten Bände der Comptes rendus, und zeugen von Cauchy's unerschöpflicher Fruchtbarkeit und Schaffenskraft — keineswegs auf dem hier berührten Gebiete allein; freilich auch von fast ängstlichem Bemühen, den Ruhm der Entdeckung, auf den er Anspruch zu haben glaubt, sich ungeschmälert zu erhalten. — Unter jenen Anwendungen nehmen den grössten Raum diejenigen ein, die sich auf die Theorie der Störung der Planetenbahnen beziehen. Indem Cauchy die Function, um deren Entwicklung in Reihen es sich handelt, in gewisse Factoren spaltet, sucht er diese stärker convergent und das Restglied einer Schätzung zugänglich zu machen (C. R. XX, SS. 212, 357, 907, u. s. w. und spätere Bände).

Wir begnügen uns hier mit einem Hinweis auf diese Abhandlungen, die mit unserem Thema nur die Grundlage teilen, und bemerken nur, dass sie alle von dem wohlberechtigten Bestreben Zeugnis ablegen, die gewonnenen abstract theoretischen Sätze mit anderen Wissensgebieten, namentlich mit solchen der angewandten Mathematik in Beziehung zu setzen; unzweifelhaft mit dem Erfolg, dass sie auf diese Weise eine erhöhte Bedeutung erhielten, vielleicht auch in der Absicht, aus den Anwendungen neue Anregung zu theoretischen Fragestellungen zu schöpfen.

39. Wir wenden uns nun zu einer Besprechung der Arbeiten eines Landsmannes von Cauchy, der die Theorie der Potenzentwicklung implicit gegebener Functionen erst zum Abschluss brachte, indem er seine Untersuchungen speciell auf algebraische Functionen richtete und hier sie vertiefte. Denn Cauchy fehlte noch die Einsicht in die Frage, in welcher Weise die Wurzeln einer Gleichung mit variabelm Parameter sich mit einander vertauschen, wenn der Weg des Parameters zwischen zwei Punkten der imaginären Ebene sich verschiebt, und dabei solche Stellen überschreitet, wo zwei oder mehrere Wurzelwerte einander gleich werden. Die Mittel zur Untersuchung dieser Frage lagen bereit: aber es bedurfte:

Die Lücken der Cauchy'schen Theorie.

α. einer strengen Sonderung dieser Verzweigungswerte (kritischen Punkte) von den Unstetigkeitspunkten (Polen) der Function;

β. einer Verschiebung des Mittelpunktes des Convergenzkreises aus dem Nullpunkt der imaginären Ebene heraus an veränderliche Stellen;

γ. der Untersuchung auch höherer Singularitäten der Function, die neben einfachen Verzweigungsstellen und Polen auftreten können — wofür seit einem Jahrhundert (in den Schriften der Geometer) das Hülfsmittel bereit lag in dem Newton'schen Parallelogramm (dem Cramer-De Gua'schen algebraischen Dreieck).

Dies sind die Gesichtspunkte, durch die sich zunächst und wesentlich die zwei Puiseux'schen Arbeiten von denen Cauchy's unterscheiden. In dem ersten „Rapport" (27), den über sie Cauchy der Academie erstattet, berichtet er zwar mehr über seine eigene, als über die vorgelegte Arbeit. Indessen ist doch die Zusammenstellung der Resultate des Referenten, an welche zunächst Puiseux angeschlossen hat, von Interesse; sie ermöglicht zugleich eine klare Scheidung der Besitzansprüche beider Autoren.

D. **Victor Puiseux** [1850—1851].

(1) Recherches sur les fonctions algébriques, Liouville Journ. de Mathém. XV. 1850.

(2) Suite; ibd. XVI, 1851.
Beide Abhn. deutsch von Fischer: V. Puiseux' Untersuchungen über die algebraischen Functionen, Halle, 1861.

40. Wir haben oben (Nr. 19) bei Besprechung der ersten Gruppe der Arbeiten Cauchy's über eine Note (10) aus dem Jahre 1846 berichtet, in der er durch die imaginäre Ebene ein Integral führt, welches eine mehr-

Die algebraische Function und ihre Wandlung längs

einer Linie der imaginären Ebene.

deutige Function unter dem Integralzeichen enthält. In grossen Umrissen giebt er dort einige Eigenschaften dieses Integrals an und bespricht die Aenderungen, die es erfährt, wenn Unstetigkeitspunkte dieser Function innerhalb des geschlossenen Integrationsweges liegen. Aber Cauchy fehlte noch die genauere Einsicht in diese Wertänderungen. Denn die naheliegende Aufgabe, die Wandlung der Function selbst — ganz abgesehen von dem Integral — längs eines solchen Weges zu untersuchen, also vom Studium der transcendenten Function zu dem der algebraischen herabzusteigen, um die Hülfsmittel für die Behandlung des Integrals zu beschaffen, hatte Cauchy nicht in Angriff genommen.

Hier greift nun Puiseux ein. Er beschränkt sich ((1), I. Teil) von vorn herein auf algebraische Functionen, indem er eine Grösse u betrachtet, die mit der Variabeln z durch die Gleichung verbunden ist:

$$1) \qquad f(u, z) = 0,$$

wo f eine ganze Function von u und z ist. Führt man eine Wurzel u_1 dieser Gleichung längs eines Weges, den die unabhängige Variable z in der imaginären Ebene von einem Punkt zu einem anderen beschreibt, so lässt sich zunächst wieder beweisen, dass der Endwert von u_1 nicht von dem Weg abhängt, sofern die Aenderung dieses Weges so erfolgt, dass keine der Stellen überschritten wird, wo u_1 unendlich wird (Pole), und keine der Stellen, wo u_1 mit einer anderen Wurzel von 1) zusammenfällt (kritische Punkte). Die scharfe Unterscheidung dieser beiden Fälle begründet wesentlich den Fortschritt, den Puiseux' Theorie einleitet (Vergl. die anerkennenden Worte von Cauchy in C. R. XLII, 1846, S. 664).

Die ineinander übergreifenden Convergenzkreise.

41. Auf dem Wege, den schon Cauchy in (18) eingeschlagen hatte, erhält dann Puiseux eine Entwicklung für eine Wurzel u nach ganzen Potenzen nicht von z, wie bei Cauchy, sondern von z—c, und deshalb gültig für alle Punkte im Innern eines Kreises, der c zum Mittelpunkt hat, und der die beiden Arten von Ausnahmepunkten (A, A′, A″, ... 𝔄, 𝔄′, 𝔄″ ...) ausschliesst. Den Mittelpunkt c lässt Puiseux wandern, indem er ihn der Reihe nach auf verschiedene Punkte eines Linienzugs verlegt, derart, dass je zwei consecutive Kreise sich überschneiden, und also die Entwicklung aus einem Kreis in den anderen sich fortsetzen lässt. Mit Hülfe dieses Verfahrens kommt man in jeder Stelle der Ebene mit einem Werte von u an, der ganz bestimmt ist, wenn der Ausgangswert bekannt und jener Linienzug gegeben ist.

Die Entwicklung in der Um-

42. Der zweite Teil der Abhandlung bezieht sich auf die Aenderungen, die u_1 erfährt, wenn der Weg, längs dessen z geführt wird,

über einen der kritischen (Verzweigungs-)Punkte A, A', A''... verschoben wird, wo nämlich neben einander die Gleichungen bestehen:

gebung der Verzweigungspunkte.

$$f(u, z) = 0; \quad f'(u) = 0; \quad f''(u) = 0; \quad \ldots; \quad f^{(p-1)}(u) = 0,$$

wo also p—1 weitere Wurzeln u mit der Ausgangswurzel u_1 zusammenfallen. Die Unstetigkeitspunkte 𝔄, 𝔄', ... (Pole) beseitigt er vorerst durch die Annahme, dass der Coefficient der höchsten Potenz von u nicht von z abhängt. Jene Verschiebung lässt sich nun auf Umkreisungen der Punkte A zurückführen. Ist nämlich in einem Punkt A, wo die obigen Gleichungen bestehen, nicht zugleich $f'(z) = 0$, so geht bei einer Umkreisung desselben der Wert β_1 von u an der Ausgangsstelle (nahe bei A, wo $z = \alpha$ sein möge) in $\beta_2 = \varepsilon\beta_1$ über, wo ε eine pte Wurzel der Einheit ist. Jede neue Umkreisung liefert den Factor ε nochmals, bis nach pmaligem Umgang der Ausgangswert β_1 wieder erreicht wird. „C'est là surtout ce qui constitue la nouveauté et l'importance de son travail" (Cauchy's Rapport s. oben (27)). Die Werte $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ bilden das, was Puiseux ein „cyklisches System" nennt. Er zeigt, dass für $u_1, u_2, \ldots, u_p$ in der Umgebung von $z = \alpha$ Reihenentwicklungen existiren, die nach ganzen Potenzen von $(z-\alpha)^{1/p}$ fortschreiten (§ 21) und innerhalb des bis zum nächsten Punkt A', A''... reichenden Kreises convergiren.

43. Verschwindet aber in A neben der Ableitung $f'(u)$ auch die $f'(z)$, so hat man es mit einer Stelle zu thun, die, kurz gesagt [Puiseux hebt dies nicht hervor], mit den von Newton, De Gua, Cramer für die singulären Punkte einer Curve entwickelten Hülfsmitteln zu behandeln ist. Denn wenn man $f(u, z) = 0$ als Gleichung einer ebenen Curve mit den Cartesischen Coordinaten u, z auffasst, so ist in diesem Fall A ein mehrfacher Punkt derselben, und die Ordinaten der verschiedenen Zweige sind nach ganzen oder gebrochenen Potenzen der Abscissen in der früher (s. Newton, Cramer etc.) auseinandergesetzten Art, nämlich auf Grund des (nötigenfalls wiederholt angewendeten) Newton'schen Parallelogramms entwickelbar. Die Reihen, welche dieses ergiebt, gruppiren sich in „Klassen", deren jede einer Seite des gegen den Nullpunkt convexen Teiles des Polygons im Parallelogramm entspricht, und genau so wie vorher bildet jede Klasse*) für sich ein cyklisches System von Werten u, die sich bei Umkreisung des Punktes z um A untereinander, aber nicht mit denen einer anderen Klasse, vertauschen, indem

Singuläre Stellen und Anwendung des Newton'schen Parallelogramms; Klassen von Reihenentwicklungen.

*) Dass schon vor ihm Minding (s. d. Ref. III) für die Entwicklung von u nach absteigenden Potenzen z den gleichen Begriff aufgestellt hatte, erwähnt Puiseux gleichfalls nicht.

einem solchen singulären Punkt mehr als ein cyklisches System entsprechen kann. Hiernach zerlegt sich jeder beliebige geschlossene Weg in der Ebene, der von einem Punkt O aus wieder dahin zurückführt, in:

α. Wege von O nach den eingeschlossenen Ausnahmepunkten A, A′, ...

β. ein- oder mehrmalige Umkreisungen derselben.

Wenn, wie angenommen, unter den Punkten A keine sind, wo u unendlich wird, lässt sich hiernach bei gegebenem Anfangswert von u in O genau bestimmen, mit welchem Wurzelwert u man zuletzt an der Ausgangsstelle wieder anlangt. Die Wege OA, OA′, ..., jeder zusammen mit den zugehörigen Umkreisungen von A, A′, ... und dem Rückweg AO, A′O, ... nennt Puiseux „Elementarcurven" (Clebsch und Gordan (s. d. Ref. V, D) „Schleifen", Briot und Bouquet, Théor. des fonct. ell., ebenso „lacets").

Unendlichkeitsstellen.

44. Der Fall von Unendlichkeitsstellen 𝔄, 𝔄′, ... von u tritt ein, wenn in $f(u, z) = 0$ der Coefficient der höchsten Potenz von u eine ganze Function $N(z)$ von z ist. Puiseux führt ihn durch die Transformation:

$$u = \frac{v}{N(z)}$$

auf jenen ersten zurück, wo dann die Entwicklungen von v wieder nur nach ganzen oder gebrochenen positiven Potenzen fortschreiten. In der Entwicklung von u werden demnach, wie schon Cauchy im Fall einer Gleichung mit linear auftretendem Parameter bemerkt hatte (s. oben Nr. 31) ausser den positiven noch negative Potenzen, letztere in endlicher Anzahl, auftreten.

Die Integrale algebraischer Functionen und ihre Periodicitätsmoduln.

45. (1) III. Theil. Mit Hilfe des Vorstehenden lässt sich nun auch der Wert des Integrals $\int u_1 dz$ auf vorgeschriebenem Weg genau ermitteln, indem man in den sich folgenden Convergenzkreisen die Reihen für u Glied für Glied integrirt. Die Elementarintegrale, die einer Umkreisung der verschiedenen Ausnahmepunkte entsprechen, stehen mit einander in Beziehungen, von denen man eine erhält, wenn man einen geschlossenen Weg, der alle Punkte A, 𝔄 einschliesst, durch Schleifen ersetzt, und das Integral einmal auf dem (ins Unendliche ausdehnbaren) ganzen Weg, das andere Mal auf den Teilwegen führt. — „Perioden" [genauer „Periodicitätsmoduln"] des Integrals einer algebraischen Function u entstehen, wie schon Cauchy angedeutet hatte, nur auf solchen geschlossenen Wegen (§ 48), die u wieder zum Anfangswert zurückführen. Sie lassen sich als Summen von Elementarintegralen darstellen und sind von der Lage des Anfangspunktes unabhängig. In den Beispielen, die sich auf hyperelliptische Integrale, wie auf solche mit mten Wurzeln beziehen,

werden die nach den Punkten A gehenden Elementarintegrale paarweise zu geradlinigen Integralen zwischen diesen Punkten zusammengefasst.

Es erhebt sich hierbei die Frage nach den linear unabhängigen Periodicitätsmoduln eines Integrals. Puiseux beantwortet sie, unter Bezugnahme auf Jacobi, der zuerst solche Integrale betrachtet hatte (s. Rf. III C.), für das Integral $\int u\,dz$, wenn u der binomischen Gleichung:

$$\varphi(z)\,u^m - H^m = 0,$$

genügt, und φ, H ganze Functionen (H gegen φ teilerfremd) sind. Ist φ eine solche nten Grades ohne vielfache Factoren, so findet Puiseux (indem er die $m-1$ von den Unendlichkeitspunkten von u $(z=\infty)$ herrührenden logarithmischen Perioden zurechnet) für die Anzahl der linear unabhängigen Perioden: $(m-1)(n-1)$ (bez. $(m-1)(n-2)$, wenn n durch m teilbar und der Grad von $H < n/m - 1$ ist), übrigens ein Ergebnis, das als specieller Fall in Abel's damals allerdings noch gänzlich unbekannter, wenn auch bereits seit Jahren veröffentlichter Preisschrift (Rf. III Nr. 13), sowie in Publicationen von Minding u. A. enthalten war. Dass die Behandlung bei Puiseux noch schwerfällig erscheint, rührt davon her, dass er statt des allgemeinen Integrals $\int u\,dz$ (wie Riemann) die m Integrale $\int u_i\,dz$ gesondert betrachtet.

Zu einer Theorie auch nur der Integrale der jener binomischen Gleichung genügenden algebraischen Functionen fehlte indessen immer noch viel. Vor allem, dass Puiseux, statt nach dem Vorgang von Legendre und Abel, Integrale von der Form $\int\psi(u,z)\,dz$ (ψ eine rationale Function von u und z) simultan zu betrachten und auf Integrale verschiedener Gattungen zu reduciren, wie dies Broch, Minding, Jürgensen u. s. w. gethan hatten, nur immer das Integral $\int u\,dz$ betrachtet und so verschiedenartige Perioden vermischt, was ihn zur Unterscheidung wesentlich identischer Fälle nötigt. — Eine weitere Klärung sollte erst die Behandlung des Umkehrproblems geben.

Die Abhandlung (2) ergänzt die eben besprochene durch folgende wichtige Bemerkungen: α. Wenn eine algebraische Function von z allenthalben einwertig ist, so muss sie rational sein — wo „einwertig" in dem Sinne von „monodrom" („uniforme") gebraucht ist, also eine Function, die auf jeder geschlossenen Curve den Anfangswert wieder annimmt.

46. β. Man kann von jeder Wurzel u_1 der algebraischen Gleichung $f(u, z) = 0$ durch passende Wahl eines in der Z-Ebene geschlossenen Weges zu jeder anderen u_2, die derselben Ausgangsstelle wie u_1 entspricht, gelangen, wenn f eine irreductible Function ist. Dieser Satz giebt ein Mittel an die Hand, um durch eine endliche Anzahl von Ope-

Kriterium der Reductibilität der Gleichung, die eine algebraische Function definirt.

rationen die Irreductibilität einer Gleichung zu erweisen, und im Falle der Zerlegbarkeit die Grade der Factoren zu ermitteln. Er ist übrigens auch, was Puiseux dort nicht hervorhebt, für die Gültigkeit der Sätze des III. Teiles von (1) Voraussetzung.

E. Rückblick auf die Periode der Entwicklung einer Functionentheorie.

Rückblick auf den zweiten Abschnitt: Lagrange, Gauss, Cauchy, Puiseux.

47. Durch die Arbeiten, über die wir in diesem Abschnitt berichtet haben, ist zunächst der Functionsbegriff in doppelter Richtung weiter ausgebildet worden.

Die angewandten Disciplinen: Mechanik und Physik waren veranlasst, mit dem Wort Function auch solche Abhängigkeitsverhältnisse zu bezeichnen, die eine explicite Darstellung der abhängigen Grösse durch die unabhängige (reelle) nicht unmittelbar oder erst nachträglich zuliessen, wozu die Eigenschaften der Fourier'schen Reihe die Mittel boten.

Andererseits bedurften die Grundlagen der Analysis, die der Schaffensdrang der vorhergehenden Periode auszubilden vernachlässigt hatte, zumal nachdem die imaginären Grössen zu Recht gekommen waren, einer durchgreifenden Prüfung und Umgestaltung. Hinsichtlich der Infinitesimalrechnung hatte dies zwar Lagrange versucht, aber der Ausgangspunkt, den er nahm, die Potenzreihen, war nicht minder unsicher begründet, als das, was er damit ersetzen wollte; und Gauss' strenge Darstellung des Fundamentalsatzes der Algebra liess die Grundlagen selbst unberührt. Erst Cauchy's Cours d'analyse lieferte die erwünschte zusammenfassende Darstellung der Grundbegriffe und -sätze der Analysis in folgerichtiger Anordnung und genauer Umgrenzung des Inhaltes und wurde, indem das Buch auch den complexen Grössen Bürgerrecht verlieh, zur Grundlage der heutigen Functionentheorie. Von der hiermit geschaffenen festen Basis aus ging aber Cauchy weiter über zur Untersuchung auch bestimmter Integrale zwischen imaginären Grenzen und der Abhängigkeit des Integrals von den Zwischenwerten, welche die Veränderliche durchläuft: einer fundamentalen Frage, die auch Gauss, wiewohl er nie etwas darüber veröffentlichte, mit nicht geringerem Erfolg wie Cauchy angegriffen hatte, während allerdings die Ausführung des Gedankens, die Durchbildung der Begriffe, namentlich des anschliessenden Begriffes „Residuum", Cauchy's bleibendes Verdienst ist.

Dies war das eine der Hülfsmittel, mit denen Cauchy die Functionentheorie wesentlich bereichert hat. Das andere war sein Satz über die Potenzreihen.

Von gewissen Reihen, welche die Astronomen ihren Berechnungen

zu Grund legten, wie von der Entwicklung des Radius vector einer Planetenbahn nach aufsteigenden Potenzen der Excentricität, kannte man nicht den Umfang ihrer Gültigkeit. Wie sehr man dies empfand, zeigen die Anstrengungen, die Laplace machte, die Frage durch complicirte Kunstgriffe zu beantworten. Seine Lösung war jedoch nichts weniger als principiell. Es handelte sich vielmehr darum, den Convergenzbereich einer Potenzreihe, die eine Function darstellt, welche einer gegebenen Gleichung genügt, nicht aus dem $n$ten Glied der Reihe, sondern aus dieser Gleichung selbst zu bestimmen. Die Beschäftigung mit dieser Frage führte Cauchy auf einen Mittelwertsatz, der übrigens bereits in Green's Gleichung implicite enthalten war, und auf jenen grundlegenden Satz — das Hauptergebnis dieser Periode —, vermöge dessen sich der Convergenzbereich aus den reellen und imaginären Unstetigkeits- und Verzweigungswerten der zu entwickelnden Function in einfachster Weise bestimmt. Wegen der Rolle, welche die imaginäre Ebene in diesem Satze spielt, kann man ihn als den Vereinigungspunkt der zwei Richtungen bezeichnen, denen Cauchy gleich von Anfang an sein Hauptinteresse zugewendet hatte: der Theorie der bestimmten Integrale und der Potenzreihen; wie dies auch der Beweis des Satzes zeigt. Das Theorem selbst aber bedurfte noch wichtiger Ergänzungen, die Cauchy selbst nur zum kleinsten Teile lieferte. Die erste, die sich auf solche Reihen bezieht, welche nach positiven und negativen Potenzen fortschreiten, gab Laurent in einem einfachen aber eleganten Zusatz zu Cauchy's Theorem. Eine zweite, weit wichtigere, handelt von den Reihen mit gebrochenen Exponenten an Verzweigungsstellen und wurde von Puiseux gegeben. Endlich führte erst die genaue Unterscheidung der Zusammenhänge der Wurzelwerte, wie sie Puiseux lieferte, zu einer scharfen Abgrenzung des Convergenz- und Divergenzbereiches, die dann Cauchy selbst noch zufügte.

Durch seine bedeutenden Untersuchungen über die mehrdeutigen algebraischen Functionen und ihre Verzweigungsstellen in der imaginären Ebene sowie über die Integrale solcher Functionen und deren Periodicitätsmoduln hat Puiseux das Werk von Cauchy, die Begründung einer allgemeinen Functionentheorie, zu einem gewissen Abschluss gebracht. Freilich beginnen die Schwierigkeiten für die Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale eben da, wo Puiseux' Abhandlungen schliessen, nämlich erst hinter der Lehre von den hyperelliptischen Integralen, für welche die Wandlungen sich noch leicht verfolgen lassen, die der Functionswert in der imaginären Ebene erfährt.

Hier schliessen, zeitlich sowohl als dem Gegenstande nach, Riemann's Arbeiten an. Aber die Grundlagen für die Forschung des deutschen Gelehrten sind so völlig anderer Natur wie die der Cauchy'schen Schule, der Ausgangspunkt liegt für sie auf einem so ganz verschiedenen Feld, dass weder in der Fragestellung noch in den Hülfsmitteln der Anschluss unmittelbar zu erkennen ist.

Denn inzwischen hatten in Deutschland die Arbeiten von Abel und Jacobi über die mehrfach periodischen Functionen die Anstrengungen der Mathematiker auf einen Punkt gerichtet, der in jenen Arbeiten kaum gestreift worden ist: den Ausbau der Theorie der Abel'schen Functionen, die für die ganze Theorie der Functionen überhaupt, zumal aber für die der algebraischen, von epochemachender Bedeutung werden sollte. Die Hülfsmittel zur Beherrschung dieses immensen und schwierigen Stoffes boten sich in den Traditionen der Gauss'schen Schule für den genialen Blick Riemann's in so ausreichendem Umfange dar, dass Cauchy's Ergebnisse für seine Zwecke zunächst nur in untergeordnetem Masse in Betracht kamen.

Indem wir uns nunmehr anschicken diese Gruppe von Arbeiten zu besprechen, sind wir genötigt, den Fortgang unserer Darstellung zunächst zu unterbrechen und um ein paar Jahrzehnte zurückzugreifen, um festzustellen, dass aus einer Stelle der Institutiones calculi integralis von Euler, und aus einer seinerzeit wenig beachteten französischen Quelle, den Exercises de calcul intégral von Legendre, die Anregung zu dieser Forschung erflossen ist.

III. Abschnitt.

Das Abel'sche Theorem und das Umkehrproblem der hyperelliptischen Functionen: Abel bis Weierstrass.

A. Niels Henrik Abel [1825—1829].

1. In dem Briefe an Legendre, in welchem Jacobi (Corresp. math. entre L. et J., Journ. f. Math. Bd. 80, Werke I, S. 447) der Nachricht von dem Tode Abel's gedenkt, giebt er einen Ueberblick über die Probleme, deren Lösung Abel sich vorgesetzt habe. Es seien die folgenden gewesen:

Jacobi über Abel.

α. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Auflösbarkeit einer Gleichung durch Wurzelzeichen anzugeben:

β. ebenso für die Darstellbarkeit eines Integrals durch geschlossene Ausdrücke;

γ. die Erforschung allgemeiner Eigenschaften der Integrale algebraischer Functionen.

„Alles eigenartige Fragestellungen, an die vor Abel Niemand zu denken gewagt hatte."

Uns beschäftigt hier vor den anderen die an dritter Stelle erwähnte. Dank den vortrefflichen Ausgaben der Werke Abel's, die wir besitzen:

(1) Oeuvres complètes de N. H. Abel par Holmboe, 2 voll. Christiania 1839.

(2) Oeuvres complètes de N. H. Abel p. par L. Sylow et S. Lie, 2 voll. 1881 (mit Noten der Herausgeber),

und den Biographien von Holmboe (Vorrede zu (1)) und Bjerknes (N. H. Abel. Paris 1885) sind wir über die Hülfsmittel, die Abel bei seinen frühesten Studien zur Verfügung standen, genau genug unterrichtet, um die Quellen zu erkennen, aus welchen Abel bei der Conception jener Probleme geschöpft hat, die aus der ersten Periode seiner überhaupt nur sechsjährigen productiven Thätigkeit stammen.

Ursprung des Abel'schen Theorems: Bernoulli, Fagnano, Euler.

2. Am frühesten beschäftigten ihn Euler's Schriften, die er zusammen mit Holmboe (s. d. Biogr.) las. Vergegenwärtigen wir uns den Kreis von Vorstellungen, die ihm von dorther zuflossen.

Den Stand der Integralrechnung vor Euler bezeichnen treffend die Worte, mit denen Legendre seine Exercises de calcul intégral (1811) einleitet: „Nachdem die Differential-Ausdrücke, die sich algebraisch oder durch Kreisbögen und Logarithmen integriren lassen, erschöpft waren, beschäftigte man sich mit der Aufsuchung solcher Differentiale, welche durch Ellipsen und Hyperbelbögen sich ausführen lassen." Fast dieselbe Wendung findet sich schon in Mac Laurin's Treatise on fluxions*). Wenn man so allgemein die Zurückführung eines Integrals auf Kegelschnittbögen bereits als eine Lösung der Aufgabe ansah, so konnte es nicht fehlen, dass ebenso, wie man die Bögen eines Kreises durch die Ausdrücke für $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin 2\alpha$, u. s. w. mit einander verglich, dies auch mit den Bögen, welche derselben Ellipse, Hyperbel oder Lemniscate (einer Fusspunktcurve der gleichseitigen Hyperbel) angehören, versucht wurde. Bei der cubischen Parabel war die Vergleichung schon Johann Bernoulli 1698 (Opera I, S. 252, vergl. auch die Bemerkung über das Additionstheorem der Kreisfunctionen in einem Briefe an Leibniz, L. Math. Schr. her. v. Gerhardt III, S. 186) gelungen. Die Eigenschaft dieser Curve „mit sich selbst verglichen rectificirbar zu sein", d. h. „von der man zwei Bögen angeben könne, deren Differenz construirbar ist", rühmt er als eine „proprietas perelegantissima", auf die er durch Zufall gekommen sei. 1714 entdeckte Fagnano eine ähnliche Eigenschaft bei der Lemniscate (Abh. in dem Giornale de' Litterati d'Italia, XXII, 1714 u. ff., Venezia, gesammelt in: Produzioni matematiche di Fagnano, Pesaro 1750)**). Euler leitet seine erste hieran anschliessende Abhandlung (Nov. Comm. Petrop. VI, 1761), der bald eine Reihe von anderen folgen sollte, in denen er das berühmte Additionstheorem der elliptischen Functionen begründet, mit folgenden bemerkenswerten Worten ein: „Wenn man die mathematischen Speculationen auf ihren Nutzen ansieht, so kann man sie in zwei Klassen teilen: einmal solche, die dem gewöhnlichen Leben oder anderen Wissenszweigen

*) Vergl. hierzu Felix Müller, Studien über M. Laurin's geom. Darstellung ellipt. Integrale. Progr. Realsch. Berl. 1875; zur Geschichte des Additionstheorems überhaupt: Casorati, Teorica etc. (Rf. II, 37) S. 4 ff.

**) Man vergl. Enneper, Elliptische Functionen, Theorie und Geschichte. 1. Aufl. Halle 1876, Noten VI, VII.

einen hervorragenden Vorteil gewähren, und deren Wertschätzung daher nach der Grösse dieses Vorteils bemessen zu werden pflegt. Die andere Klasse umfasst diejenigen Speculationen, die, ohne directen Vorteil zu gewähren, doch wertvoll sind, weil sie geeignet sind, die Grenzen der Analysis auszudehnen und die Kräfte unseres Geistes zu üben. Da nämlich viele Forschungen, von denen man sich grossen Nutzen versprechen könnte, wegen der Unzulänglichkeit der Analysis verlassen werden müssen, so ist wohl denjenigen Speculationen kein geringer Wert beizumessen, die einen nicht unbeträchtlichen Zuwachs für die Analysis versprechen. Diesem Zweck scheinen aber zumal solche Bemerkungen zu dienen, die, gelegentlich gemacht und a posteriori entdeckt, zu directer Auffindung a priori wenig oder keine Aussicht hatten. Nachdem man aber ihre Richtigkeit erkannt hat, lassen sich leichter Methoden finden, die zu ihnen hinführen, und es unterliegt keinem Zweifel, dass eben durch die Aufsuchung solcher neuer Methoden das Gebiet der Analysis nicht wenig erweitert wird. — Bemerkungen dieser Art, die auf einer bestimmten Methode nicht beruhen und deren innerer Grund verborgen scheint, sind mir in einer jüngst publicirten Abhandlung [Euler meint wohl die Gesammtausgabe der Werke] des Grafen Fagnano aufgestossen."

Das Additionstheorem der elliptischen Integrale 1. Gattung.

3. Euler entnimmt dann auch zunächst den „Produzioni" nicht mehr als die Thatsache, dass der Gleichung:

$$1)\qquad \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}}$$

durch den Wert: $x = -\sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}}$ genügt werde. Fagnano hatte auf diesen Umstand seine berühmte Theilung des Lemniscatenbogens gegründet. Aber Euler gewinnt dem Ergebnis eine Seite ab, deren Bedeutung im weiteren Verlauf ins Ungemessene gewachsen ist. Ihm ist jene Gleichung, in rationaler Form: $x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$, ein „particuläres Integral" der Differentialgleichung 1), wie die Gleichung $x = y$ auch eines ist. Das „vollständige" Integral, welches eine willkürliche Constante involvirt, muss so beschaffen sein, dass es beide umfasst. Euler gelangte zu demselben, wie es scheint, durch Probiren. Differentiirt man die Gleichung (l. c. p. 50):

$$2)\qquad 0 = \alpha + 2\beta(x+y) + \gamma(x^2+y^2) + 2\delta xy + 2\varepsilon xy(x+y) + \zeta x^2y^2$$

in zweckmässiger Anordnung, so lässt sich das Differential mit Hülfe von 2) in die Form bringen:

$$3)\qquad \frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0.$$

wo X eine ganze Function vierten Grades ist, aus deren vier Coefficienten sich die fünf in 2) mit Zuhülfenahme von einer willkürlichen Constanten zusammensetzen lassen. Die Relation 2) ist also das vollständige Integral von 3) und geht, wenn sich 3) auf 1) reducirt, in:

$$x^2+y^2+c^2x^2y^2 = c^2+2xy\sqrt{1-c^4}$$

über. „Es erscheint wunderbar", sagt Euler in der Anzeige seiner Abhandlung (l. c. Summarium p. 8), „dass, wiewohl ein solches Integral weder durch Kreis- noch logarithmische Functionen auswertbar ist, doch allgemein der Differentialgleichung 3) durch eine algebraische Relation genügt werden kann." Mit anderen Worten: der trivialen Integralgleichung:

$$4)\qquad \int\frac{dx}{\sqrt{X}}+\int\frac{dy}{\sqrt{Y}}=\int\frac{db}{\sqrt{B}},$$

wo b eine willkürliche Constante ist, tritt die mit ihr vollkommen gleichwertige algebraische Beziehung 2) zur Seite. Führt man die Constante b in 2) ein, so erhält diese Gleichung, wie Euler später bemerkt, eine in x, y, —b symmetrische Gestalt, wenn man alle Irrationalitäten beseitigt. Insbesondere tritt für $X = A+Cx^2+Ex^4$ an Stelle von 2) die Gleichung (Instit. calc. integr. I, § 612):

$$A^2(x^4+y^4+b^4)-2A^2(x^2y^2+x^2b^2+y^2b^2)-2AEx^2y^2b^2(x^2+y^2+b^2)$$
$$-4ACx^2y^2b^2+E^2x^4y^4b^4 = 0.$$

Dasselbe für Integrale höherer Gattung.

4. Aber Euler bleibt hierbei nicht stehen. Wie ihn die Vergleichung von Lemniscatenbögen auf die der allgemeinen elliptischen Integrale erster Gattung geführt hat, so dient ihm die ebenfalls von Fagnano geleistete Vergleichung von Ellipsenbögen zur Aufstellung des Additionstheorems der Integrale zweiter Gattung.

Euler formulirt Fagnano's Entdeckung folgendermassen: der Differential-Ausdruck:

$$5)\qquad dx\sqrt{\frac{1-nx^2}{1-x^2}}+dy\sqrt{\frac{1-ny^2}{1-y^2}}=dV$$

lässt sich durch Annahme einer gewissen algebraischen Relation zwischen x und y in integrable Form bringen. Setzt man nämlich:

$$6)\qquad \frac{1}{y}=\sqrt{\frac{1-nx^2}{1-x^2}},\quad\text{und also:}\quad \frac{1}{x}=\sqrt{\frac{1-ny^2}{1-y^2}},$$

so verwandelt sich, wenn man 6) rational macht und differentiirt, dV in $dx/y+dy/x = n\,d(xy)$ (Act. N. Petr. VI, p. 60). Also ist umgekehrt 6) ein particuläres Integral der Differentialgleichung $dV = n\,d(xy)$.

Aber schon in dem folgenden Aufsatz (l. c. T. VII) hat er (wohl

mit der Bemerkung, dass die Gleichung 6) in 2) einbegriffen ist) den endgültigen Ausgangspunkt auch für diese Gattung von Fragen gefunden, indem er die Aufgabe stellt: unter der Voraussetzung, dass die Gleichungen 2) und 3) bestehen, mit ihrer Hülfe das Differential*) $d\Pi(x)+d\Pi(y)=dV$, wo:

$$\Pi(x)=\int\frac{r(x)dx}{\sqrt{X}}$$

und $r(x)$ eine ganze Function ist, in „integrable Form" zu bringen, d. h. als Differential eines algebraischen [rationalen] und logarithmischen Ausdrucks oder von Kreisfunctionen [symmetrisch in x und y] darzustellen. Euler findet, dass bei dieser erweiterten Fassung $r(x)$ überhaupt keiner weiteren Bedingung unterliegt, dass es also immer möglich ist, eine Function V von den angegebenen Eigenschaften zu finden, derart, dass

$$\Pi(x)+\Pi(y)=\Pi(b)+V$$

wird.

Wir haben dem Theorem gleich die erweiterte Fassung gegeben, in der es Euler in seinen Institutiones calculi integralis (Vol. I, § 645) reproducirt, welchen es Abel entnahm.

Soweit Euler, der wiederholt die Wichtigkeit des Gegenstandes betont. Er hält jedoch (§ 640) eine Ausdehnung seiner Methode auf höhere als Quadratwurzeln oder auf Functionen von höherem Grade unter dem Wurzelzeichen, als dem vierten, nicht für thunlich, indem er auf den Fall hinweist, dass die Wurzel ausziehbar ist, und alsdann unter Umständen zwischen Logarithmen und Kreisfunctionen eine algebraische [in der Sprache jener Zeit selbstverständlich zugleich: reelle] Beziehung bestehen müsste, was doch unmöglich anginge. Vorgreifend bemerken wir gegenüber diesem Bedenken, dass sich von selbst die zu 4) analoge Relation zwischen den Integralen in zwei und mehr linear unabhängige zerlegt, wenn an Stelle jener einzelnen 2) ein System von algebraischen Relationen tritt.

Umgestaltung der Euler'schen Relation zwischen den oberen Grenzen der elliptischen Integrale.

5. Mit dem Vorstehenden haben wir den Gedankenkreis und die Probleme umgrenzt, die nun Abel's Erfindungskraft herausforderten. Die Brücke aber, die von Euler zu Abel hinüberführt, glauben wir in einer gewissen Umgestaltung zu erkennen, welche Abel mit der zwischen x, y, b bestehenden algebraischen Gleichung (oben Nr. 3) vornahm.

Euler hatte diese Gleichung bereits in eine hinsichtlich dieser drei Grössen symmetrische Gestalt gebracht. Nun waren bekanntlich die Fort-

*) Functionszeichen wie $\Pi(x)$, $r(x)$ kommen bei Euler nicht vor. Wir gebrauchen sie zur Abkürzung.

schritte, welche die Theorie der Gleichungen seit Euler gemacht hatte, für Abel nicht verloren gegangen. Ihm lag der Gedanke nahe, jene zwischen den symmetrischen Functionen von x, y, b bestehende Relation zur Bildung derjenigen Gleichung dritten Grades zu verwenden, die für eine dieser Grössen, etwa x, besteht, welcher dann aber auch y und b genügen müssen. Man erhält sie sogleich, indem man die identische Gleichung, deren Wurzeln x, y, b sind, mit Hülfe jener Relation umformt.

Diese Gleichung nun ist es, die der Kernpunkt der Entdeckung Abel's gewesen zu sein scheint. Sie lässt sich in die Form bringen:

$$1) \qquad vx.\sqrt{X'} - v'x\sqrt{X''} = 0,$$

wo $X'X'' = X$ ist, und vx, $v'x$ ganze Functionen von x sind, von solchem Grad, dass 1), auf rationale Form gebracht, den dritten Grad nicht übersteigt. Die Coefficienten in v, v' hängen von y und b, oder vielmehr von zwei symmetrischen Functionen dieser Grössen ab, und sind durch y, b bestimmt. Man kann aber auch die (zwei) wesentlichen Coefficienten in v, v' (v ist vom ersten Grad, v' constant, wenn X' vom ersten, X'' vom dritten Grad ist) als gegebene Grössen ansehen; sie sind mit y, b durch die Relationen verbunden:

$$2) \qquad \begin{cases} vy.\sqrt{Y'} - v'y.\sqrt{Y''} = 0 \\ vb.\sqrt{B'} - v'b.\sqrt{B''} = 0. \end{cases}$$

Jene Gleichung 1) besteht nun zunächst auch im Falle beliebig vieler elliptischer Integrale. Denn die Zahl der Integrale, welche mit einander verglichen werden, vermehrt sich einfach dadurch, dass man den Grad der Functionen vx, v'x, erhöht, wobei zugleich die Zahl der willkürlich annehmbaren Grössen in 1) entsprechend zunimmt. Aber eines bleibt: die Eigenschaft der Integralsumme, durch eine algebraische und logarithmische Function der Coefficienten von v, v' ausdrückbar zu sein. Denn wie im einfachsten Falle vermöge der Gleichungen 1), 2) die irrationale Differentialsumme durch ein rationales Differential symmetrischer Functionen von x, y, b darstellbar ist, so lässt sich hier wieder die Summe durch symmetrische Functionen der neuen oberen Grenzen rational ausdrücken, die man erhält, wenn man die Summanden unter Benutzung der Gleichungen 1), 2) und ihrer Differentiale umformt, indem man die symmetrischen Functionen der Grenzen durch die Coefficienten ersetzt.

Ausdehnung auf hyperelliptische Integrale: Abel.

6. Alle diese Schlüsse sind aber auch, wie man ohne Weiteres einsieht, durchaus nicht an den Grad von X gebunden; auch der Zähler rx der Integranden braucht nur allgemein eine rationale Func-

tion zu sein. So beseitigt der Gedanke Abel's, die Gleichung 1) an Stelle der zwischen den oberen Grenzen bestehenden Relation zum Ausgangspunkt zu wählen, die Schwierigkeiten, die sich Euler gegenübergestellt hatten, als er zu den hyperelliptischen Integralen aufsteigen wollte.

Diese Gleichung giebt sofort Anlass zu einer weiteren wichtigen Bemerkung, die Abel in seiner Pariser Arbeit (unten Nr. 8 (1)) sorgfältig verfolgt und zu einer neuen bedeutenden Fragestellung erhebt.

Weil nämlich, wenn X eine Function vom Grade 2m oder 2m—1 ist, die Gleichung 1), rational gemacht, mindestens bis zum Grade $m+\alpha-1$ ansteigen muss, wenn α Wurzeln willkürlich annehmbar sein sollen, so ist die Summe der zugehörigen α Integrale darstellbar als Summe von mindestens m—1 anderen (durch sie bestimmten), wozu noch jene logarithmische und algebraische Function V der Coefficienten von vx, v'x kommt. Es existirt also eine Minimalzahl von Integralen, auf die man eine gegebene Integralsumme zurückführen kann. Daraus erklärt sich die Schwierigkeit, auf die Euler's Formulirung bei hyperelliptischen Integralen stossen musste: die in der transcendenten Gleichung auftretende Integrationsconstante war nicht, wie bei der elliptischen Integralsumme, durch ein, sondern nur durch zwei oder mehr hyperelliptische Integrale ersetzbar, ein merkwürdiger Umstand, der sich nicht entfernt voraussehen liess, und den in expliciter Form später Jacobi zur Grundlage seines Umkehrproblems umgestaltete.

Im Besitze aller damals flüssigen Hülfsmittel der Theorie der algebraischen Gleichungen blieb jedoch Abel auch bei dieser Verallgemeinerung nicht stehen.

Wenn man die für hyperelliptische Integrale bestehende Gleichung:

$$1) \qquad vx.\sqrt{X'} - v'x.\sqrt{X''} = 0,$$

wo $X'X'' = X$ ist, durch die zwei simultanen ersetzt:

$$y^2X'' - X' = 0$$
$$y.vx - v'x = 0,$$

wo die veränderlichen Parameter nun bloss in die zweite Gleichung eingehen, und infolge dessen das vorliegende Integral die Form annimmt (rx eine rationale Function von x):

$$\int \frac{rx.dx}{\sqrt{X}} = \int f(x, y)dx.$$

so stellt sich das erweiterte Problem:

7. Gegeben seien zwei algebraische Gleichungen zwischen den Va-

Integrale algebraischer Functionen.

riabeln x und y

$$3)\qquad \begin{cases} \chi(x, y) = 0 \\ \Theta(x, y) = 0, \end{cases}$$

wo $\chi(x, y)$ eine ganze Function mit gegebenen Coefficienten, $\Theta(x, y)$ eine solche mit (veränderlichen) willkürlichen Coefficienten darstellt: zu untersuchen, ob eine Summe von Integralen der Form:

$$\psi x = \int f(x, y)\,dx,$$

wo $f(x, y)$ eine rationale Function von x und y ist, als logarithmische und algebraische Function V der Coefficienten von Θ (und χ) darstellbar ist, wenn die oberen Grenzen der Summanden von allen Wertepaaren $x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_\mu, y_\mu$ gebildet werden, die zugleich beiden Gleichungen 3) genügen. Es zeigt sich, dass der Gang der Untersuchung keinerlei Abänderung gegen früher zu erfahren braucht: die bejahende Antwort auf die Frage ist der Inhalt des berühmten „Abel'schen Theorems", das sich also darin ausdrückt, dass zu jenen Gleichungen 3) die folgende hinzutritt:

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = V.$$

Die Stelle der Gleichung 1) vertritt die Resultante aus den Gleichungen 3), die durch Elimination von y entsteht; y ist vermöge $\chi(x, y) = 0$ als die allgemeinste algebraische Function von x definirt; dieser Begriff wird hier zum ersten Mal in den Bereich eines Satzes einbezogen und erhält dadurch Leben und Bedeutung. In diesem Sinne ist Abel der Begründer der Theorie der algebraischen Functionen.

Aber auch die Frage nach der Minimalzahl von Integralen, auf die eine gegebene Integralsumme reducirbar ist, bleibt hier als Cardinalfrage bestehen: sie veranlasst Abel zu jenen ausgedehnten und mühsamen Abzählungen, die das Hauptergebnis seiner grossen Pariser Arbeit ausmachen, und die ihn lange vor Riemann in den Besitz des Begriffes „Geschlecht" eines algebraischen Gebildes setzen.

Wir geben nun einen Ueberblick über diejenigen Abhandlungen Abel's, die jenes Theorem behandeln und besprechen dann den Inhalt der grössten, der Pariser Abhandlung.

Abel's Abhandlungen in Bezug auf das nach ihm benannte Theorem.

8. Mit dem Theoreme, welches auf Jacobi's Vorschlag*) das Abel'sche genannt worden ist, dem „monumentum aere perennius" nach Le-

*) Consid. gen. etc. Journ. f. M. IX. Werke II, S. 7; vorher in Anz. v. Legendre's Traité des f. ellipt. Journ. f. M. VIII, Werke I, S. 373.

gendre*), tritt Abel, erfüllt von dessen Tragweite, in drei verschiedenen Publicationen hervor. Die erste grösste hat er in Paris vollendet und 1826 der Pariser Academie eingereicht. Sie führt den Titel:

(1) Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendentes, prés. à l'Acad. 30. oct. 1826. Mém. prés. par divers sav. étr. t. VII, Paris 1841. Oeuvres éd. Sylow et Lie I, p. 145—211.

Eine Mitteilung des Satzes nebst Beweis enthält ferner die Note mit dem fast gleichlautenden Titel:

(2) Démonstration d'une propriété générale etc. Cr. Journ. f. Math. IV, 1829. Oeuvres S. et L. I, p. 515—517.

Die Abhandlung:

(3) Remarques sur quelques propriétés etc. Cr. J. f. M. III, 1828. Oeuvres S. et L. I. p. 444—456,

spricht denselben Satz aus unter Beschränkung auf hyperelliptische Integrale, aber mit Angabe der Form, in welcher die logarithmische und algebraische Function auftritt, und ist im Wesentlichen eine Reproduction eines Teiles der Pariser Abhandlung. Endlich findet man in einem hinterlassenen Manuscript, dessen Abfassung der Reise Abel's nach Paris vorausgeht, also wohl in das Jahr 1825 fällt:

(4) Sur la comparaison des fonctions transcendentes. Oeuvr. S. et. L. II, p. 55—66,

wieder den allgemeinen Satz bewiesen. Abel wendet dort seine Aufmerksamkeit der Bestimmung der Constanten in der Gleichung zwischen den Integralen zu und geht dann auf den Fall über, dass y eine rationale Function von x ist, woran sich die Auswertung zahlreicher symmetrischer Functionsausdrücke (in Bruchform) reiht.

Die Pariser Abhandlung. Darstellung der algebr. und log. Function, der die Integralsumme gleich wird.

9.* Aus dieser Uebersicht geht hervor, dass es genügt, allein den Inhalt der Pariser Schrift (1) zu analysiren. Dies scheint aber um so mehr erforderlich, als sie wegen ihrer verspäteten Publication nur wenig bekannt geworden ist und, obwohl sie auf die nächstfolgende Production keinen Einfluss geübt hat, doch zum ersten Mal wesentliche Begriffe der Theorie der Abel'schen Functionen entwickelt, die in anderen Abhandlungen Abel's nicht auftreten**).

---

*) Brief an Crelle, Journ. f. M. VIII (Jac. Anz. v. Legendre's Traité; wohl nach der Aeusserung in L.'s Brief an J. vom 4. Juni 1829, J. f. M. Bd. 80).

**) Die oben erwähnte zweite Ausgabe der Werke Abel's enthält zu der nicht leicht geschriebenen Pariser Abhandlung vortreffliche Noten von Sylow, die, teils kritisch, teils erläuternd, dunkle Stellen besprechen. Von Arbeiten, die direct an diese Abhandlung anschliessen, sind uns nur noch folgende be-

Mit dem summarischen Beweise des Theorems, den Abel später in (2) reproducirt, leitet die Abhandlung (1) ein (§§ 1, 2), geht aber dann sogleich auf die wirkliche Darstellung (§ 4) der logarithmischen und algebraischen Function V über, durch die sich die Integralsumme:

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \cdots + \psi x_\mu = V$$

ausdrücken lässt, wenn $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ die Wurzeln der Gleichung:

$$r(x) = 0$$

sind, die durch Elimination von y aus den Gleichungen:

$$\chi(x, y) = y^n + y^{n-1} p_{n-1} + y^{n-2} p_{n-2} + \cdots + p_0 = 0$$
$$\Theta(x, y) = y^{n-1} q_{n-1} + y^{n-2} q_{n-2} + \cdots + q_0 = 0$$

entsteht. Hier sind die p, q ganze Functionen von x von irgend welchen Graden, wobei in die q noch willkürliche Constanten $a, a', a'', \ldots$ linear eingehen [wir werden sie „Parameter" nennen]. Die rechte Seite V der transcendenten Gleichung stellt sich als algebraische und logarithmische Function dieser Parameter dar (s. No. 6).

Von den gemeinsamen Wertsystemen der Gleichungen $\chi = 0$, $\Theta = 0$ kann eine Anzahl von den Parametern $a, a', a'', \ldots$ unabhängig sein. Dann scheidet sich aus der Resultante rx ein von diesen unabhängiger Factor $F_0 x$ aus, so dass in:

$$rx = F_0 x . Fx$$

nur Fx noch von den $a, a' \ldots$ abhängt.

Bedient man sich der später von Clebsch eingeführten geometrischen Interpretationsweise, so ist $\chi = 0$ die Gleichung einer festliegenden Curve mit den Cartesischen Coordinaten x und y, $\Theta = 0$ die einer anderen Curve, deren Lage und Gestalt mit den Parametern a sich ändert, so zwar, dass ein Teil ihrer Schnittpunkte mit der „Curve χ" (der Curve, deren Gleichung $\chi = 0$ ist) fest ist, ein Teil mit den Parametern in Θ sich ändert („beweglich" ist). Die Abscissen der festen sind durch $F_0 x = 0$, die der beweglichen durch $Fx = 0$ gegeben. Wir werden diese wegen ihrer kurzen Ausdruckweise bequeme Interpretation in der Folge oft gebrauchen.

---

kannt geworden: 1) Ein grösserer Aufsatz von Rowe: On Abel's Theorem (Philos. Trans. 172, 1881), Mai 1880, reproducirt den Inhalt in der heutigen Darstellungsweise, geht aber nicht auf alle schwierigen Partien ein. 2) Die unmittelbar anschliessende Arbeit von Cayley „Addition to Rowe's Memoir" bezieht sich auf die Berechnung der (s. unten) Abel'schen Zahl γ mit den in Rf. VI Nr. 20 entwickelten Hülfsmitteln. 3) Eine jüngst erschienene Abhandlung von Baker (Cambr. Trans. XV, Part. IV, im Auszug Math. Ann. 45 S. 133) enthält Vorschläge zu einer graphischen Ermittlung der Zahl γ.

Für das zu Grunde gelegte Integral wählt nun Abel die folgende Form:

$$\psi x = \int f(x, y)\,dx = \int \frac{f_1(x, y)\,dx}{f_2 x \cdot \chi' y},$$

wo f_1, f_2 ganze Functionen der beigesetzten Variabeln, $\chi' y$ die Ableitung von χ nach y ist. Diese letztere in den Nenner zu setzen, scheint für Abel zunächst kein anderer Anlass vorhanden gewesen zu sein, als die Analogie mit einfacheren Fällen. Wenn z. B. χy die Form hat: $y^2 + p_1 y + p_2 = 0$, so führt die Verallgemeinerung des elliptischen Integrals 1. Gattung mit Notwendigkeit darauf (s. Jacobi „De theor. Ab. observatio", Journ. f. M. III. Werke II. S. 3), die Discriminante (in irrationaler Form $\chi' y$) in den Nenner zu setzen. — In der That wird der Ausdruck für V ebenso einfach, wenn man $\chi' y$ weglässt, wie dies die Ergebnisse von Jürgensen und Minding (s. unten III. B) zeigen: die irrationale Form von V lässt sich auch so nicht vermeiden. Wir kommen darauf übrigens unten noch einmal zurück (Nr. 11). Abgesehen von einer additiven Constanten C setzt sich nun die rechte Seite $V = P + Q + C$ aus zwei Teilen zusammen, deren einer die Form hat:

$$P = -\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{f_1(x, y_i)}{f_2 x \cdot \chi' y_i} \log \Theta(x, y_i)\right]_{x^{-1}},$$

wo $[\;]_{x^{-1}}$ den Coefficienten der (-1)ten Potenz der Entwicklung des Klammerausdrucks nach absteigenden Potenzen von x bedeutet. Der andere hat in einer der heutigen Ausdrucksweise angepassten Form und nach Verbesserung eines von Sylow (A. Oeuvr. II, S. 296) angegebenen Rechenfehlers die Gestalt ($\Gamma\nu_k = 1 \cdot 2 \ldots (\nu_k - 1)$):

$$Q = \sum_{n=1}^{\alpha}{}' \frac{1}{\Gamma\nu_k} \frac{d^{\nu_k - 1}}{dx^{\nu_k - 1}} \left(\frac{(x-\beta_k)^{\nu_k}}{f_2 x} \sum_{i=1}^{n} \frac{f_1(x, y_i)}{\chi' y_i} \log \Theta(x, y_i) \right),$$

wo die Summe $\sum'$ sich auf alle diejenigen Unendlichkeitsstellen $x = \beta_1$, $\beta_2, \ldots \beta_\alpha$ des Integranden $\frac{f_1(x, y)}{f_2 x \cdot \chi' y}$ erstreckt, wo dieser, entweder in Folge von $f_2 = 0$ oder für solche Nullpunkte von F_0, für die zugleich $\chi' y = 0$ ist, in den Ordnungen bezw. $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\alpha$ (ganze Zahlen) unendlich wird.

Die Integralsumme gleich einer Constanten. — Die Zahl γ der Constanten des Integrals, für welches dies eintritt.

10. Von Interesse ist nun vor Allem der Fall (§ 5), dass sich die logarithmische und algebraische Function V, der die Integralsumme gleich ist, für beliebige a, a′, a″ ... auf eine Constante reducirt. Aus der Form, die man für V im allgemeinen Fall gefunden hat, lässt sich, zunächst unter Annahme von $F_0 x = 1$, d. h. unter der Annahme bloss beweglicher Schnittpunkte von χ mit Θ, ein Schluss ziehen auf die Form,

welche alsdann die Functionen f_2 und f_1 in dem Ausdruck für ψx annehmen müssen. Abel findet:

1) Es muss $f_2 x = 1$ sein, weil nur so (zugleich mit allen ν) das Glied Q verschwindet, ohne dass Beziehungen zwischen den a, a', ... stattfinden. Wir bemerken gleich hier, dass Abel dabei den Fall übersieht, dass auch durch Relationen zwischen den β der Ausdruck Q unabhängig von den a zu Null werden kann; $f_2 x = 1$ ist also nicht notwendiges Erfordernis dafür, dass $Q = 0$ ist (vgl. Clebsch-Gordan, Abel'sche Functionen § 13, 6) (S. 49)).

2) Für $f_1(x, y)$ findet Abel aus $P = 0$ die Bedingung, dass die Entwicklung von

$$\frac{f_1(x, y)}{\chi' y}$$

nach absteigenden Potenzen von x (also für die unendlich fernen Punkte der Curve χ) mit einem Glied $Ax^{-\alpha}$ beginnen müsse, wo $\alpha > 1$ ist. Dies giebt für den Grad von $f_1(x, y)$ hinsichtlich y und den Grad der Coefficienten p in χ hinsichtlich x je eine gewisse obere Grenze, die Abel genau bestimmt. Die so definirte Function f_1 hat nun noch eine Anzahl γ von willkürlichen Constanten, die linear und homogen eingehen, und es zeigt sich, dass diese Zahl γ abhängt (§ 5, Formel (62)) bloss von den bei der Entwicklung von y nach absteigenden Potenzen von x auftretenden Exponenten, also von Eigenschaften der Function $\chi(x, y)$ allein. Der so gefundene Ausdruck für γ setzt indessen voraus (§ 5, F. (50)), dass jene Entwicklungen von y in den ersten Gliedern nicht übereinstimmen, geometrisch gesprochen, dass die unendlich fernen Zweige der Curve χ keine Berührung mit einander eingehen, und dass keine „superlinearen" (Cayley) Zweige mit mehr als einem „kritischen" Exponenten (s. Ref. über Sing. Punkte VI Nr. 13) vorkommen (wie z. B. $y = x^{-2} + x^{-5/2}$).

Feste Schnittpunkte der beweglichen mit der festen Curve.

11. In dem bisher ausgeschlossenen Fall, dass $F_0 x$ sich nicht auf eine Constante (§ 5, a. E.) reducirt, sind die Bedingungen für die Zählerfunction $f_1(x, y)$ zu modificiren (während $f_2 x = 1$ beibehalten wird). Ist nämlich $x = \beta$, $y = B$ ein Wertepaar, für welches, unabhängig von den Parametern a, a', ..., zugleich χ und Θ verschwinden, so muss, wenn die Integralsumme sich wieder auf eine Constante reduciren soll, der Quotient:

$$(x - \beta)\frac{f_1(x, y)}{\chi' y}$$

für $x = \beta$, $y = B$ zu Null werden*). — Durch die vorstehende For-

*) Abels Bedingung lautet so: es darf $\frac{f_1(x, y)}{\chi' y}$ für $x = \beta$, $y = B$ nicht

derung wird das Verhalten von f_1 in solchen Stellen regulirt, wo neben χ und Θ auch noch die partiellen Differentialquotienten von χ verschwinden; geometrisch, für solche singuläre Punkte der Curve $\chi = 0$, durch die $\Theta = 0$ hindurch geht. — Es mag hier ferner bemerkt werden, dass (vgl. z. B. Clebsch und Gordan, Ab. F. § 13) die Forderung $\Sigma\psi(x) = \text{const.}$ das Integral $\psi(x)$ noch nicht zu einem Integral erster Gattung im Sinne Riemann's macht. Vielmehr genügen dieser Gleichung auch Integrale dritter Gattung von der Form:

$$\psi(x) = \int \frac{f_1(x, y)}{\chi' y}\, dx,$$

welche nur in singulären Punkten von $\chi = 0$ unendlich werden, durch die $\Theta = 0$ nicht hindurch geht. Erst die Integrale dieser Art zusammen mit den eigentlichen Integralen erster Gattung bilden den Inbegriff der von Abel gefundenen linear unabhängigen Integrale $\psi(x)$, für die $\Sigma\psi = \text{const.}$ ist. Diese Abzählung zeigt die Vorzüge der von Abel benutzten Integralform. Ohne die Annahme, dass $\chi' y$ im Nenner des Integranden auftritt, war die Zahl γ bei den erschwerenden Voraussetzungen, die hinsichtlich der Ausdrücke χ und Θ Abel sich auferlegt, wohl nicht aufzustellen, wie auch der Umstand zeigt, dass keiner von denen, die später Abel's Mitbewerber wurden, ohne es zu wissen, wie Jürgensen, Minding u. s. w., diese Fragestellung für den allgemeinen Fall in Angriff genommen haben, obwohl sie dieselbe kannten, weil sie unzweckmässige Integrandenformen benutzten.

Wieviele Integrale sind durch die anderen mindestens mit bestimmt? Charakter der Zahl $\mu - \alpha$.

12. Von den μ Wertepaaren $x_i y_i$, die den Gleichungen $\Theta = 0$, $\chi = 0$ genügen, kann man soviele (α) als willkürlich gegeben annehmen, als Θ Parameter $a, a', a'' \dots$ enthält, und die übrigen $\mu - \alpha$ durch sie bestimmen (§ 6). An diese Bemerkung knüpft der für die Theorie der algebraischen Functionen wichtigste Teil der Untersuchung an (§ 7), in welchem nämlich die Frage erhoben wird nach dem Grad desjenigen Factors der Resultante rx von χ und Θ, welcher die $\mu - \alpha$ durch die übrigen mitbestimmten Wertepaare $x_i y_i$ ergiebt, und zwar sowohl in dem Falle, dass $F_0 x = 1$ ist, also dass α gleich der Zahl aller Coeffi-

---

unendlich werden. Hiernach müsste aber z. B. an jeder Stelle, wo zugleich $\chi = 0$, $\Theta = 0$, $\chi' y = 0$ ist, f_1 verschwinden. Das wäre zuviel verlangt. — In der That rührt die Forderung Abel's von einer ungenauen Darstellung der Function V in F. (37), (38) her, die Sylow in den Noten zu der Ausgabe von S. und L. verbessert hat, und die auch an der Formel (69) eine Correctur nötig macht, woraus dann die obige Bedingung anstatt der von Abel behaupteten folgt.

cienten in Θ ist, als auch dann, wenn $F_0 x$ eine Function von x ist, wo dann sogar einige (A) der Factoren von $F_0 x$ durch die anderen mitbestimmt sein können. Abel beantwortet diese Frage auf algebraischem Weg durch Substitution der Werte y in das irrationale Product:

$$r = \Theta y_1 \Theta y_2 \dots \Theta y_n,$$

indem er für $y_1 y_2 \dots$ die früher erwähnten Reihen nach absteigenden Potenzen von x (die sich aus $\chi = 0$ ergeben) einsetzt und findet, dass im Allgemeinen der Grad $\mu - \alpha$ unter die im § 5 bestimmte Zahl γ nicht herabsinken kann. Durch passende Verfügung über die Grade der Coefficienten $q_0, q_1, \dots q_{n-1}$ in Θ lässt sich $\mu - \alpha$ gleich γ machen (Formel (91)). In zwei besonderen Fällen kann indessen $\mu - \alpha$ kleiner als γ werden, nämlich:

1) Wenn die Bedingungen, die den Coefficienten $a, a', a'' \dots$ in Θ aufzuerlegen sind, damit der Factor $F_0 x$ aus der Resultante rx sich ausscheidet, an Zahl kleiner sind, als der Grad von $F_0 x$ (§ 7, F. (75)), oder in geometrischer Ausdrucksweise: wenn gewisse auf der Curve $\chi = 0$ angenommene feste Schnittpunkte von $\Theta = 0$ von selbst noch andere nach sich ziehen.

2) Wenn durch passende Verfügung über einige der $a, a' \dots$ der Grad der Resultante rx um mehr Einheiten erniedrigt wird, als dadurch willkürliche Constante in Θ absorbirt werden; geometrisch: wenn mehr Schnittpunkte der Curven $\chi = 0$, $\Theta = 0$ im Unendlichen auftreten, als Bedingungen hierfür zu erfüllen sind.

Ist A der Ueberschuss der Schnittpunkte von $\Theta = 0$ und $\chi = 0$ über die Zahl der Bedingungen für die im Endlichen gelegenen, B für die unendlich fernen, so ist (§ 7 Formel (107)):

$$\mu - \alpha = \gamma - A - B.$$

Anmerkung: Eine Andeutung Abel's darüber, wie er sich denkt, dass der eine und andere der angeführten Fälle eintreten kann, findet sich nicht. Sylow hat in den Noten zu den Oeuvres de N. H. Abel. éd. S. et L., II S. 298) die Zahl A erklärt durch das mögliche Vorkommen von vielfachen Punkten der Curve $\chi = 0$ im Endlichen, die Zahl B durch das Auftreten von im Unendlichen sich berührenden Zweigen von $\chi = 0$. In der That tritt beidemal der obige Fall ein, wenn die Curve $\Theta = 0$ durch jene vielfachen Punkte geht, bezw. auch ihrerseits die betreffenden unendlichen Zweige von $\chi = 0$ berührt. Auch weist Abel's später zu besprechendes Beispiel (§ 10) jenes erste Vorkommnis wirklich auf.

Indessen lässt sich die mögliche Differenz von γ und $\mu - \alpha$ auch

noch in andrer Weise deuten. Wenn etwa an Stelle von Θ der Zähler eines Integrals erster Gattung tritt, so sind bekanntlich $p-1$ oder weniger Schnittpunkte der Curven $\chi = 0$, $\Theta = 0$ durch die übrigen bestimmt, wenn p das Geschlecht von $\chi = 0$ ist (vgl. z. B. Rf. V Nr. 43). In diesem Falle unterscheiden sich also die Zahlen $\mu - \alpha (= p-1)$ und γ um mindestens eine Einheit.

Nimmt man z. B.

$$\chi \equiv y^4 + y^2 a_2 + y b_2 + c_2, \quad \Theta \equiv y a_1 + b_1$$

an (wo die Indices den Grad in x angeben), so reducirt sich, wenn man nun a_1 durch eine Constante a_0 ersetzt, der Grad von rx um zwei Einheiten, während die Zahl der willkürlichen Coefficienten in Θ bloss um eins abnimmt.

Bei der Verallgemeinerung, die das Haupttheorem dadurch erfährt, dass etwa mehrere Schnittpunkte zusammenfallen, hält sich Abel nicht lange auf (§ 9).

Anwendung auf den Fall, dass die Irrationalität eine nte Wurzel ist.

13. Um so eingehender behandelt er (§ 10) den Fall der hyperelliptischen, oder vielmehr allgemein der binomischen Gleichungen:

$$\psi x = \int \frac{f_3 x \,.\, dx}{f_2 x \,.\, y^m},$$

wobei die Gleichung $\chi(x, y) = 0$ in der Gestalt $y^n + p_0 = 0$, oder ausgeführt:

$$y^n - r_1^{\mu_1} r_2^{\mu_2} \ldots r_\varepsilon^{\mu_\varepsilon} = 0,$$

angenommen wird. Hier bedeuten r_1, r_2, ... ganze Functionen von x mit je nur verschiedenen Linearfactoren; u. μ_1, μ_2, ... ganze positive Zahlen. $\Theta(x, y)$ hat die früher angegebene Gestalt. Diese Annahme über die ganze Function p_0 involvirt — was vorher ausser Betracht geblieben war — im Endlichen gelegene vielfache Punkte der Curve $\chi = 0$ auf der X-Axe. Die Frage nach der Minimalzahl $\mu - \alpha$ von Integralen, durch welche α gegebene ausdrückbar sind, erhält durch diese Annahme ein neues Interesse; die oben mit A bezeichnete Zahl, durch die sich γ von $\mu - \alpha$ unterscheidet, muss nun genau bestimmt werden. Zu dem Zweck macht Abel über die Form der Coefficienten q_0, q_1, ..., q_{n-1} in $\Theta(x, y) = 0$ eine Annahme, die er zwar in keiner Weise begründet (§ 10, Formeln (142), (143)), die aber bewirkt, dass sich aus $\Theta(x, y)$, nach Substitution von $y = (-p_0)^{1/n}$, Glied für Glied eine Potenz jedes der Factoren $r_i^{1/n}$ als Factor ausscheiden lässt. Diese Potenz erreicht in Folge der Annahme mindestens die Höhe der in y^{n-1} enthaltenen ganzen Potenz von r_i. Der Erfolg ist der, dass die Zahl $\mu - \alpha$ auf den-

jenigen Wert herabsinkt, den man erhalten würde, wenn man (nach dem heutigen Ausdruck) die Function Θ zu „adjungirtem Verhalten" (Rf. V, 55) in jenen singulären Stellen auf der X-Axe nötigen würde. Nur muss zugefügt werden, dass dies auch mit einem geringeren Aufwand an Bedingungen, wie die in jener Annahme enthaltenen, gelungen wäre.

Die erhaltene Zahl $\mu - \alpha$ hängt bloss von der Zahl n, der Zahl der Factoren in p_0 und ihrer Vielfachheit ab und reducirt sich für den Fall hyperelliptischer Integrale, wo $n = 2$, p_0 eine ganze Function 2mten oder (2m—1)ten Grades ist, auf $\mu - \alpha = m$.

Mit einer diesem Fall und dem $n = 3$ entsprechenden Darstellung der logarithmischen und algebraischen Function, der die Integralsumme gleichkommt, wobei die elliptischen Integrale kurz betrachtet werden, schliesst die Abhandlung.

Fortschritte, die Abel's Arbeit eingeleitet hat.

14. Da die Pariser Abhandlung erst vierzehn Jahre nach erfolgter Vorlage der Oeffentlichkeit übergeben wurde, so floss das reiche Gedankenmaterial, das sie enthält, der Wissenschaft nur langsam zu. Zwar hatte Abel noch kurz vor seinem Tode durch Publication der Note (2) dafür gesorgt, dass wenigstens die Grundidee seines allgemeinen Satzes nicht verloren ging; und ihre Bedeutung sogleich erkannt und in das rechte Licht gerückt zu haben ist Jacobi's bleibendes Verdienst. Aber ein grosser Teil des Inhaltes der Arbeit ist infolge jenes Umstandes nie zur verdienten Geltung gelangt. Indem wir uns zur Besprechung der Fortschritte wenden, die Abel's Arbeit eingeleitet hat, müssen wir auch diejenigen Partien dieser Arbeit ins Auge fassen, die bei anderer Constellation der Dinge auf die Entwicklung der Wissenschaft beträchtlichen Einfluss hätten ausüben können.

Vor allem ist es Abel's Ruhm, die Integrale mit höheren Radicanden, vor denen selbst Euler's Scharfsinn Halt gemacht hatte, in den Bereich der zugänglichen Bildungen gezogen und zu den elliptischen Functionen in so nahe Beziehung gebracht zu haben, dass ihre völlige Beherrschung bloss noch eine Frage der Zeit war. Aber sie bildeten für Abel nur den Durchgangspunkt auf dem Wege zu einer Gattung von Integralen, an die vor ihm überhaupt noch Niemand gedacht hatte.

Den Begriff des Integrals einer algebraischen Function hat Abel, wie wir sahen, aus der Verallgemeinerung eines Satzes von Euler geschöpft, die ihm die Einsicht in die Theorie der Gleichungen an die Hand gegeben hatte. Für die Functionentheorie bedeutete die Conception dieses Begriffs einen beträchtlichen Zuwachs an Material und eine solche Erweiterung des Gesichtskreises, dass dem jungen Wissens-

gebiete, das eben Cauchy durch strenge Methoden begründet hatte, ein weites Arbeitsfeld und damit eine Periode kräftiger Entwicklung gesichert war.

Entsprach die Einführung dieser Transcendenten der Auffassung, die Leibniz und seine Anhänger vertreten hatten, als sie die durch die Integralrechnung eingeführten neuen Functionen der besonderen Aufmerksamkeit empfahlen, so geschah dies durch Abel doch wieder in einem Sinne, der Newton Recht gab, als er vor Anderen das Studium der algebraischen Gleichungen und Curven bevorzugte. Und wenn ein Begriff in der Wissenschaft erst dadurch Existenzrecht erhält, dass er mit vertrauten Begriffen in nahe Beziehung tritt, so hat den der „algebraischen Function" nicht Euler, der bloss aus Gründen der Systematik von ihm spricht, sondern erst Abel eingebürgert, dessen Theorem dieser Function durch Beziehungen zur Integralrechnung eine unerwartete Bedeutung verlieh, und das somit auf lange Zeit die Richtung bezeichnete, auf welcher eine Theorie der algebraischen Functionen mit Erfolg sich bewegen konnte. Manche günstige Umstände mussten freilich noch mitwirken; es bedurfte der verständnisvollen Mitarbeit des congenialen Jacobi, der scharf umgrenzenden Analyse eines Weierstrass, der schöpferischen Kraft eines Riemann, bevor aus den Projecten Abel's ein Wissenszweig herauswachsen konnte von dem grossen Zuschnitt der heutigen Theorie der Abel'schen Functionen.

Hinter diesen allgemeinen Begriffsbildungen stehen die speciellen Ergebnisse der Pariser Abhandlung an Bedeutung nicht zurück, die, in die früheren Publicationen nicht aufgenommen, als sie an die Oeffentlichkeit traten, keinen Interpreten mehr wie Jacobi gefunden haben. Sie sind auf diese Weise lange Zeit gänzlich unbeachtet geblieben, und haben auch heute nur noch ein historisches Interesse, nachdem sie Riemann wiedergefunden oder doch seiner Theorie in einem Zusammenhange einverleibt hat, der ihm das Eigentumsrecht für immer sichern wird.

Die Zahlen $\mu-\alpha$, γ und der Geschlechtsbegriff.

15. Das wichtigste dieser Ergebnisse ist der oben erwähnte Satz von der Minimalzahl $\mu-\alpha$ von Integralen, auf die sich eine gegebene Anzahl α von solchen zurückführen lässt, und die wirkliche Berechnung dieser Zahl, die weder von α, noch von dem Ausdruck unter dem Integralzeichen, sondern lediglich von der Beschaffenheit der Gleichung $\chi(x, y) = 0$ abhängt, durch die y als Function von x definirt ist. Es ist dieselbe Zahl, die Riemann als „Klassenzahl" mit dem Zusammenhang seiner Fläche, in welcher y als eindeutige Function von x erscheint,

in Verbindung gebracht hat, und die er gleich der Zahl der allenthalben endlichen Integrale findet, welche dieser Fläche zugehören. Wir werden sie in der Folge mit dem von Riemann eingeführten Buchstaben p bezeichnen und mit Clebsch das „Geschlecht" der Gleichung $\chi(x, y) = 0$ nennen.

Wir haben oben eine Vermutung darüber aufgestellt, wie wohl Abel zu dem Problem gelangt ist, eine Integralsumme durch eine andere von möglichst wenigen Integralen darzustellen und damit den Begriff des Geschlechts zu erfassen. Liegt etwas Ungewöhnliches schon in dieser Fragestellung, deren Beantwortung zudem bei Abel's Annahme über die Gestalt der Gleichung $\chi(x, y) = 0$ sehr intricate Abzählungen verlangte, so ist nicht weniger merkwürdig der Umstand, dass Abel auch bereits die andere Definition des Geschlechtsbegriffes streift, indem er die Constantenzahl γ in demjenigen Integral ermittelt, das für die Integralsumme eine Constante ergiebt. Wenn die Curve $\chi = 0$ keine vielfachen Punkte im Endlichen besitzt, ist diese Zahl γ, wie früher gesagt, gleich derjenigen der linear unabhängigen Integrale erster Gattung. Dass in diesem Falle $\gamma = \mu - \alpha$ ist, hat Abel selbst bemerkt. Aber im Allgemeinen ist ein Integral, für welches die logarithmische und algebraische Function im Abel'schen Theorem wegfällt, keineswegs identisch mit dem Integral erster Gattung. Es blieb Riemann vorbehalten, mit der Bildung des überall endlichen Integrals die Theorie der Abel'schen Functionen auch von der algebraischen Seite her zu erschliessen.

Es erübrigt noch von einigen Arbeiten Abel's zu reden, die, teils wegen ihrer Verwandtschaft mit den oben besprochenen, teils wegen einiger neuer Fragestellungen, in der Geschichte unserer Theorie zu erwähnen sind.

Andere Arbeiten Abel's über algebraische Integrale.

16. Die von Bjerknes, dem Biographen Abel's, als „Mémoire de Freiberg" bezeichnete Abhandlung Sur l'integration de la formule différentielle $\int \frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$ (Oeuvres, éd. L. et S., I, S. 104) beschäftigte ihn zur selben Zeit, wie die über das klassische Theorem, und man hat auch eine innere Verwandtschaft zwischen dem Inhalt der beiden zu erkennen geglaubt. Die Arbeit bezieht sich auf die Frage der Reductibilität eines hyperelliptischen Integrals auf Logarithmen: ein altes Problem, dessen Lösung Abel dadurch wesentlich fördert, dass er zeigt, dass sie an eine periodische Kettenbruchentwicklung des Wurzelausdrucks unter dem Integralzeichen als notwendige und hinreichende Bedingung geknüpft ist.

Auch die Ausdehnung dieser Frage auf höhere Integrale beschäftigte Abel. In einem Brief an Legendre (vom 25. Nov. 1828. Oeuvr. II. S. 271) findet sich folgende Stelle: „Ihre schönen Anwendungen der elliptischen Functionen auf die Integration von Differentialformeln haben mich veranlasst, das sehr allgemeine Problem in's Auge zu fassen:

Die Bedingung dafür zu finden, dass sich ein Integral von der Form: $\int y dx$, wo y irgend eine algebraische Function von x ist, durch algebraische und logarithmische Functionen, sowie elliptische Integrale (in endlicher Zahl) darstellen lässt. Ich bin der Lösung dieses Problems einen Schritt näher gekommen, indem ich zeigte, dass, falls eine Lösung überhaupt existirt, sie die Form annimmt:

$$\int y dx = t + A_1 \log t_1 + A_2 \log t_2 + \cdots + B_1 \Pi_1(y_1) + B_2 \Pi_2(y_2) + \cdots,$$

wo $t, t_1, t_2 \ldots y_1, y_2 \ldots$ rationale Functionen von x und y, $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ elliptische Integrale sind. Ich habe jedoch, wenn y ganz allgemein bleibt, Schwierigkeiten gefunden, die meine Kraft übersteigen, und die ich niemals bewältigen werde. Ich habe mich dann auf den Fall $y = r/\sqrt{R}$ beschränkt, wo r und R ganze Functionen von x sind", u. s. w. In welcher Weise Abel diese Fragestellung noch zu erweitern gedachte, lässt sich aus einem Satze des „Précis d'une théorie des fonct. ell." (Crelle J. f. M. IV, 1829; Oeuvres éd. S. et L. I. S. 549) entnehmen, welcher in sprechender Weise von der Fähigkeit Abel's zeugt, einem Problem diejenige Seite, die einen erfolgreichen Angriff zulässt, abzugewinnen. Abel beweist dort von einem vollständigen Differential von n Variabeln, dessen Coefficienten algebraische Functionen dieser Variabeln sind, während zwischen den letzteren noch algebraische Gleichungen bestehen können, dass, wenn dieses Differential durch algebraische und logarithmische Functionen und elliptische Integrale sich integriren lässt, dies immer in der Form möglich ist:

$$t + A_1 \log t_1 + A_2 \log t_2 + \cdots + B_1 \Pi_1(y_1) + B_2 \Pi_2(y_2) + \cdots,$$

wo $t, t_1, t_2 \ldots y_1, y_2 \ldots$ rationale Functionen der Variabeln und der Coefficienten des Differentials sind.

Vielleicht deutet dieser Satz die Richtung an, in welcher Abel noch eine Verallgemeinerung seines Theorems für möglich hielt.

Die ganze Reihe der erwähnten Theoreme lässt sich zurückführen auf das eine grosse Problem der „Vergleichung der Transcendenten, die als Integrale algebraischer Functionen definirt sind", ein Problem, das Abel die ganze Zeit seines Lebens vorgeschwebt hat, und aus dem er für die Theorie der elliptischen Integrale in dem erwähnten „Précis" alle von ihm behandelten fundamentalen Aufgaben, wie: Reduction

auf die drei Gattungen, Additionstheorem, Transformation und Multiplication u. s. w., ableitet. Auch das Theorem über die Vertauschbarkeit von Argument und Parameter bei Integralen dritter Gattung (Oeuvres éd. S. et L. Bd. I, p. 40—60, sowie hinterlassene Abhandlungen, ibd. II, p. 43; 47) ist unter diesen Gesichtspunkt einzureihen. Dieses Theorem drückt sich durch die elegante und inhaltreiche Formel aus:

$$\sqrt{\varphi a}\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{\varphi x}}-\sqrt{\varphi x}\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{\varphi a}}$$
$$=\Sigma\tfrac{1}{2}(n-m)\alpha_{m+n-2}\int\frac{x^n dx}{\sqrt{\varphi x}}\int\frac{a^m da}{\sqrt{\varphi a}},$$

wo $\varphi x=\alpha+\alpha_1 x+\alpha_2 x^2+\cdots$ ist, eine Formel, die später Weierstrass zu Beziehungen zwischen bestimmten Integralen, deren Grenzen die Nullpunkte des Polynoms φx sind, und zu wichtigen Eigenschaften der allgemeinen Integrale geführt hat (s. unten Nr. 33). Wir müssen uns jedoch versagen, auf diese Materie, die zunächst einer Geschichte der Theorie der elliptischen Functionen angehört, einzugehen.

Die Formulirung des Umkehrproblems durch Abel.

17. Dagegen soll uns noch kurz die hinterlassene Abhandlung beschäftigen (Oeuvr. éd. S. et L. II, S. 40):

Propriétés remarquables de la fonction $y=\varphi x$ déterminée par l'équation:

$$fy\,dy-dx\sqrt{(a-y)(a_1-y)(a_2-y)\ldots(a_m-y)}=0,$$

fy étant une fonction quelconque de y qui ne devient pas nulle ou infinie lorsque $y=a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$.

Diese Arbeit, die nach Holmboe's Zeugnis zu den vor Abel's Reisen geschriebenen gehört, also vor das Jahr 1826 zu setzen ist, enthält wohl die früheste Aeusserung Abel's über die Begriffe der Umkehrung und der Periodicität.*) Er zeigt dort, mit freilich bloss formalen Operationen an Reihen, in wenigen Strichen, dass die obere Grenze y des Integrals:

$$x=\int\frac{fy\,.\,dy}{\sqrt{\psi y}},$$

wo ψy jenes Differenzenproduct ist, als Function des Integrals selbst betrachtet: $y=\varphi x$, die Eigenschaft hat, denselben Wert wieder anzunehmen, wenn man x um eine Grösse zunehmen lässt, deren Hälfte dem bestimmten Integral, zwischen irgend zweien der Wurzelwerte von $\psi y=0$ genommen, gleich ist. — Indessen mögen Bedenken wegen des Convergenzbereiches der benutzten Reihe, oder vielleicht ähnliche, wie sie später Jacobi bei

*) Die erste gedruckte Aeusserung findet man in den „Recherches sur les fonctions elliptiques", 1827. Oeuvres éd. S. et L. I, p. 264.

der Umkehrung des ultraelliptischen Integrals (y vom fünften oder sechsten Grad) beunruhigten, überhaupt wohl die Unfertigkeit der Sache Abel von der Publication dieses Aperçu's abgehalten haben.

Die Note ist ein Beweis dafür, wie frühzeitig die Begriffe der Umkehrung des Integrals und der Periodicität bei Abel entwickelt waren.

Die Geschichte der elliptischen Transcendenten berichtet davon, wie unter den Händen von Abel und Jacobi diese Gedanken zunächst in ihrer Anwendung auf elliptische Functionen sich fruchtbar erwiesen; wie Abel auf sie die Teilung des Integrals in n gleiche Teile gründete; man kennt die denkwürdige Lösung der algebraischen Gleichung, von der das Problem der Periodenteilung abhängt. Man weiss, wie im Wettbewerb mit Abel Jacobi seine Theorie der Transformation der elliptischen Functionen und die der Modulargleichungen schuf; wie Jacobi zur Θ-Function gelangte, die den Schlüssel zur Theorie nicht nur der elliptischen, sondern der höheren Abel'schen Transcendenten überhaupt bildet, indem sie als drittes Glied den Cirkel schliesst, der von der elliptischen Function durch das Integral zweiter Gattung hindurch mit ihrer Hülfe wieder zu der ersteren zurückführt (Jacobi, Zur Geschichte der elliptischen und Abel'schen Transcendenten, hinterlass. Manuscript, veröff. in Jacobi's gesammelten Werken Bd. II., herausgeg. v. Weierstrass, S. 516—521). Die Geschichte dieser grossen Entdeckungen findet man (ausser in dem erwähnten Manuscript) in der inhaltreichen Gedächtnisrede auf Jacobi, die Dirichlet in der Academie der Wissenschaften zu Berlin am 1. Juli 1852 gehalten hat (s. Jacobi's ges. Werke, I. Bd., herausgeg. v. Borchardt, S. 1—28), eingehender in Casorati's Teorica delle funzioni, 1868, S. 18ff.; in Enneper's Theorie und Geschichte der elliptischen Functionen (Halle, 1876, 531 SS.; 2. Aufl. herausgeg. von F. Müller 1890), sowie in Königsberger's Geschichte der Theorie der elliptischen Transcendenten in den Jahren 1826 bis 1829 (Leipzig 1879, 104 SS.) dargestellt.

B. Ch. Jürgensen. O. J. Broch. F. Minding. G. Rosenhain [etwa 1838—1845].

Arbeiten anderer Mathematiker, die gleichfalls das Thema von Abel's Pariser Abhandlung aufnehmen.

18. Bevor wir von der neuen Wendung sprechen, die Jacobi der Theorie der Abel'schen Transcendenten durch die Formulirung des Umkehrproblems gab, müssen wir von einigen Arbeiten berichten, die überhaupt nicht entstanden wären, wenn die Verfasser von Abel's Pariser Abhandlung Kenntnis gehabt hätten, weil diese sie in jeder Hinsicht über-

holt hat. Das Opfer an Mühe und Scharfsinn, das sie aufgewendet haben, ist vergebens verschwendet worden, weil die damaligen Pariser Academiker nicht die Zeit gefunden haben, das unbequem geschriebene grosse Manuscript des jugendlichen Autors zu entziffern.

Nachdem Abel im 4. Bande des Crelle'schen Journals die Ausdehnung seines Theorems auf die allgemeinsten algebraischen Functionen mitgeteilt, aber das Resultat, dass die vorliegende Integralsumme auf eine logarithmische und algebraische Function der symmetrischen Functionen der oberen Grenzen zurückführbar ist, nur in grossen Zügen angegeben hatte, richtete sich die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf die wirkliche Darstellung dieser Function, die in Abel's publicirten Aufsätzen nur für hyperelliptische Integrale gebildet war, und auf die anschliessende Aufgabe, diejenigen Folgerungen, die Abel für diesen Fall hinsichtlich der Minimalzahl von Integralen, durch die eine gegebene Integralsumme ausdrückbar ist, ausgesprochen hatte, auf den allgemeinen auszudehnen. Dieser Arbeiten hier zu gedenken ist nicht nur eine Pflicht den Autoren gegenüber, die von jener Abel'schen Arbeit nichts wussten: der Vergleich mit dieser giebt auch einen Massstab für die Schwierigkeiten, die der Ausdehnung auf die allgemeine algebraische Function im Wege standen, und lässt deutlich diejenigen Stellen erkennen, welche die Erfindungskraft und die Geschicklichkeit Abel's in besonderem Masse in Anspruch nahmen.

Chr. Jürgensen,

(1) Sur la sommation des transcendantes à différentielles algébriques, Journ. f. Math. XIX, S. 113—116. 1838.

(2) Remarques générales sur les transcendantes à différentielles algébriques, Journ. f. Math. XXIII, S. 126—141. 1840.

O. J. Broch,

(1) Sur quelques propriétés d'une certaine classe de fonctions transcendantes. Journ. f. Math. XX, S. 178. 1840.

(2) Mémoire sur les fonctions de la forme etc. ibd. XXIII, S. 145—195; 201—242. 1841.

F. Minding,

(1) Propositiones quaedam de integralibus functionum algebraicarum unius variabilis e principiis Abelianis derivatae, ibd. XXIII, S. 255—274. 1841.

G. Rosenhain,

(1) Exercitationes analyticae in theorema Abelianum de integralibus functionum algebraicarum, ibd. XXVIII, S. 249—278, XXIX, S. 1—18. 1844. 1845.

Jürgensen's Darstellung der logarithmischen und algebraischen Function des Abel'schen Theorems.

19. Die ersten Bemühungen der Genannten galten der wirklichen Darstellung der logarithmischen und algebraischen Function im Abel'schen Theorem. Zunächst führte diese Minding in zwei kleineren Aufsätzen in Bd. X und XI (1833, 34) des Journ. f. Math. für solche algebraische Functionen aus, die einer Gleichung dritten Grades genügen. Jürgensen wendet sich einige Jahre später in (1) der allgemeinen algebraischen Function zu, die der Gleichung:

$$Z = z^m + p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + \cdots + p_m = 0,$$

deren Coefficienten p ganze Functionen von x sind, genügt. Er beginnt damit, eine gebrochene irrationale Function:

$$\frac{P(x, z_1)}{Q(x, z_1)},$$

wo P, Q ganze Functionen sind, z_1 eine Wurzel von $Z = 0$ ist, in eine hinsichtlich der irrationalen Function ganze Form zu bringen:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\lambda(x, z_1)}{\nu(x)},$$

wo λ, ν ganze Functionen der beigesetzten Variabeln sind. Dieselbe Form hatte übrigens vor ihm (Journ. f. M. X. 1833) bereits Liouville in der „Note sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique" angegeben und in den Mém. prés. T. V (1838) aus den Principien der Algebra abgeleitet. Jürgensen betrachtet dann eine Summe von Integralen von der Form:

$$\psi x = \int \frac{\lambda(x, z_k)}{\nu(x)} dx,$$

die Summanden geschrieben in den n Wurzeln $x = x_1, x_2 \ldots x_n$ der Resultante aus Z und aus:

$$\Theta x = q_1 z^{m-1} + q_2 z^{m-2} + \cdots + q_m,$$

wo die q ganze Functionen von x und irgend welche Functionen einer Grösse y sind, welche die Stelle der (veränderlichen) Parameter in der gleichnamigen Gleichung Abel's vertritt. Indem der Verfasser gleichzeitig y variirt und die Wurzeln x_i differentiirt, gelangt er ebenso wie Abel in der Pariser Arbeit zur gewünschten Darstellung der Integralsumme durch eine logarithmische und algebraische Function von y.

Diese Formel dehnt Jürgensen in (2) auf diejenigen Fälle aus, wo der Nenner $\nu(x)$ oder die Resultante aus Z und Θ gleiche Wurzeln besitzen, und erörtert anschliessend das Theorem für die Fälle der hyperelliptischen und der elliptischen Integrale. Daneben geht er in (2) auf die von Abel in seinen Briefen an Legendre berührte Frage nach allen mittelst algebraischer und logarithmischer Functionen ausführbaren

algebraischen Integralen ein (eine gleichfalls schon von Liouville behandelte Frage), indem er den Fall heraushebt, dass die Irrationalität die nte Wurzel aus einer ganzen Function der unabhängig Veränderlichen ist, wo dann die Form des Integrals sich wirklich angeben lässt.

Broch stellt die Minimalzahl von Integralen, auf die eine Integralsumme reducirbar ist, für einen besonderen Fall auf: Minding für den allgemeinen.

20. In demselben Bande des Crelle'schen Journals wie diese Arbeit von Jürgensen finden sich bemerkenswerte Arbeiten von Broch und von Minding über denselben Gegenstand. Broch beschränkt sich zwar auf Integrale von der Form:

$$F(x)x^{\lambda/p}(R(x))^{s/rp}dx.$$

wo $R(x)$ ein Polynom nten Grades ist, $F(x)$ eine rationale Function, r, s, p, λ ganze Zahlen sind, und bildet zunächst wieder die rechte Seite der Formel des Abel'schen Theorems, indem er, um reelle Ausdrücke zu haben, neben den logarithmischen auch cyklometrische Functionen heranzieht. Aber es ist bemerkenswert, dass Broch auch auf jene Frage eingeht, die Abel im III. Bande des Crelle'schen Journals bloss für hyperelliptische Integrale behandelt hatte, die Frage nämlich nach der Minimalzahl von Integralen, durch die, abgesehen von einer logarithmischen und algebraischen Function, eine vorliegende Integralsumme sich darstellen lässt. Er findet, in Uebereinstimmung mit den Ergebnissen von Abel's Pariser Arbeit, diese Zahl gleich:

$$\tfrac{1}{2}[m(rp-1)-r-b+2],$$

wo b der grösste gemeinsame Teiler von $m-r$ und rp ist.

Umfassender noch ist der Gesichtskreis der gleichzeitigen Mindingschen Arbeit, die nach Form und Inhalt sogar viele Aehnlichkeit mit der Pariser Abhandlung von Abel besitzt. Wie diese bezieht sie sich auf den Fall einer allgemeinen algebraischen Function y von x, definirt durch die Gleichung:

$$\chi(x,y) \equiv y^n p_0 + y^{n-1} p_1 + \cdots + p_n = 0,$$

wo die p_i, einschliesslich p_0, (bei Abel $= 1$ gesetzt) ganze Functionen von x bedeuten. Dass Minding p_0 nicht gleich 1 annimmt, während doch durch die Substitution $yp_0 = z$ diese Form leicht zu beschaffen wäre, begründet er damit, „dass dann die Coefficienten der niederen Potenzen von z eine specielle Form annehmen würden, die für die vorliegende Frage nicht ohne Gewicht wäre".

Das betrachtete Integral hat, während bei Abel noch $\chi'(y)$ im Nenner des Integranden steht, die folgende (nicht weniger allgemeine) Gestalt:

$$\int \frac{\varphi_0(x)F(x, yp_0)\,dx}{\varphi(x)};$$

wo $\varphi_0(x)$ und $\varphi(x) = (x - c_1)(x - c_2)\ldots(x - c_r)$ ganze Functionen von x. F eine ganze Function von x und $p_0 y$ ist. Die neben $\chi(x, y) = 0$ bestehende Gleichung lautet:

$$\psi(x, y) = q_1 y^{n-1} + q_2 y^{n-2} + \cdots + q_n = 0.$$

Die μ gemeinsamen Wurzelpaare von $\chi = 0$ und $\psi = 0$ werden bei Minding alle als mit den Coefficienten der q_i veränderlich angenommen (während Abel auch feste Schnittpunkte der Curven $\chi = 0$, $\psi = 0$ zulässt). Hat die Resultante f(x) aus χ und ψ die μ Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_\mu$, so erhält nach Minding die algebraische und logarithmische Function in der Gleichung des Abel'schen Theorems die folgende (bereits, wie erwähnt, von Jürgensen angegebene) Form:

$$\sum_{i=1}^{i=\mu} \int \frac{\varphi_0 x_i \cdot F(x_i, y_i)}{\varphi x_i} dx_i = \frac{\varphi_0 c_1}{\varphi' c_1} \int \frac{\Theta c_1}{f c_1} + \cdots + \frac{\varphi_0 c_r}{\varphi' c_r} \int \frac{\Theta c_r}{f c_r}$$
$$- \left[\frac{\varphi_0 x}{\varphi x} \int \frac{\Theta x}{f x} \right]_{\frac{1}{x}},$$

wo:

$$\Theta x = f x \cdot \sum_1^n \frac{F(x, y_i) \delta \psi_i}{\psi_i}$$

eine ganze Function von x ist, die Integrationen rechts sich über die Variationen der Coefficienten $\delta\psi$ der $q_1, q_2 \ldots$ erstrecken, und der letzte Ausdruck rechts den Coefficienten der (-1)ten Potenz in der Entwicklung des Klammerausdrucks nach negativen Potenzen von x bezeichnet.

Diese Formel steht an Allgemeinheit hinter der von Abel angegebenen nur hinsichtlich jener Annahme über die Beweglichkeit der Schnittpunkte von $\chi = 0$, $\psi = 0$ zurück.

Minding's Classificirung der Potenzentwicklungen an einer unendlich fernen Stelle.

21. Aber auch die Frage der Reduction einer Integralsumme auf eine Minimalzahl greift Minding an, wohl angeregt durch die Bemerkung Abel's (Nr. 8, (3), Einleitung), dass die von ihm für die hyperelliptischen Integrale bewerkstelligte Reduction allgemein möglich sei. Er findet hierbei genau die von Abel aufgestellte Formel (für $\mu - \alpha$, s. No. 12); rechts indessen noch vermehrt um ein von dem Coefficienten p_0 herrührendes Glied $(n-1)\delta p_0$, wo δp_0 der Grad von p_0 in x ist. Wir bemerken vorgreifend, dass in dieser Formel der Riemann'sche Ausdruck für das Geschlecht: $(m-1)(n-1)$ mit unterbegriffen ist, während die Abel'sche Formel bloss jenen von Clebsch: $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ umfasst. Die durch im Endlichen gelegene singuläre Punkte des Gebildes $\chi = 0$ eintretende Reduction berührt Minding nicht, wie ja auch Abel im allgemeinen Falle nicht näher auf sie eingeht.

Der Beweis für die angegebene Formel ist wie bei Abel rein algebraisch. Minding zeigt, dass, welches auch die Zahl α der Summanden ist, man immer die Anzahl $\mu - \alpha$ der durch sie mitbestimmten auf eine von α unabhängige Zahl reduciren kann, indem man den Grad der einzelnen Coefficienten q_i in $\psi(x, y)$ hinsichtlich x passend bestimmt.

Er bedient sich zu dem Zweck der Methode der Reihenentwicklung von y nach absteigenden Potenzen von x — genau so wie Abel — und setzt bei dieser Gelegenheit auseinander, wie man die Exponenten der ersten Coefficienten dieser Entwicklungen aus der vorliegenden Gleichung $\chi(x, y) = 0$ findet. Das Verfahren — eine analytische Formulirung desselben Gedankengangs, welchen später (1852) Puiseux für die im Endlichen gelegenen Singularitäten einer Curve an das Newton'sche Parallelogramm angeschlossen hat — führt ihn, für die von ihm allein betrachteten Singularitäten im Unendlichen, zu der bemerkenswerten Einteilung der Entwicklungen in Klassen, die geometrisch zu reden, den einzelnen Seiten des Polygons auf dem Parallelogramm entsprechen. Wenn auch Minding seine Methode auf die im Endlichen gelegenen Singularitäten nicht anwendet, so ist doch der Gedankengang und das Ergebnis von dem Puiseux'schen so wenig verschieden, dass man die Priorität desselben für Minding reclamiren kann.

Bei diesem Anlass möge einschaltungsweise von der Note: Ueber die Bestimmung des Grades einer durch Elimination hervorgehenden Gleichung (Journ. f. Math. Bd. 22, S. 178—183) berichtet werden, die Minding dem hier besprochenen Aufsatz vorausgeschickt hat. Er zeigt, wie Liouville in seinem Journal de Math. VI, dass man den Grad der Resultante aus zwei Gleichungen in x und y (ganze Functionen gleich Null) hinsichtlich x bestimmt, indem man die Wurzeln y der einen nach absteigenden Potenzen von x entwickelt und diese Entwicklungen in die irrationale Form der Resultante einsetzt. Der gesuchte Grad der Resultante setzt sich dann aus den Graden der höchsten Exponenten in x der irrationalen Factoren und einem Vielfachen des Grades der anderen Gleichung zusammen. Auf diese Weise werden die unendlich fernen Schnittpunkte zweier Curven aus der Gradberechnung ausgeschieden.

Dass für gewisse typische Fälle diese Bestimmung schon Bézout vorgenommen hatte, scheint Minding nicht bemerkt zu haben.

Indem wir uns wieder zu Minding's Abhandlung (1) zurückwenden, berichten wir noch über eine Anwendung seiner allgemeinen Methode auf einen wichtigen Sonderfall.

Vergleichung der Ergebnisse von Minding und Abel.

22. Ganz wie Abel geht nämlich Minding noch auf den Fall der Gleichung $p_0 y^n + p_n = 0$ ein und zwar mit der Frage (Abel hat sie für den allgemeinen Fall beantwortet) nach der Zahl (bei Abel γ) der linear unabhängigen Integrale, welche die Eigenschaft haben, dass die Integralsumme des Theorems eine Constante ergiebt. Er findet — analog dem ihm bekannten Ergebnisse Abel's für hyperelliptische Integrale — diese Zahl gleich der Minimalzahl von Integralen, auf die eine gegebene Summe reducirbar ist. Mit Recht führt Minding den inneren Grund dieser merkwürdigen Uebereinstimmung darauf zurück, dass die Gleichung für die Integralsumme, wenn das Integral γ lineare Constanten besitzt, sich in γ Gleichungen spaltet, welche nach dem Jacobi'schen Umkehrproblem (s. unten) γ obere Grenzen in der Integralsumme durch die übrigen auszudrücken gestatten. — Weil indessen Minding, wie oben erwähnt, feste Schnittpunkte der Curven $\chi = 0$, $\varphi = 0$ ausschliesst, so entgeht ihm wieder die wichtige Bemerkung von Abel, dass jene Minimalzahl γ im vorliegenden Fall, wo $p_0 y^n + p_n = 0$ noch vielfache Punkte im Endlichen besitzen kann, durch passende Annahme der Curve $\psi = 0$ (nämlich, in der heutigen Ausdrucksweise, bei adjungirtem Verhalten in jenen Punkten) noch unter die für den allgemeinen Fall angegebene Grenze herabgedrückt werden kann. — Steht somit Minding's Arbeit, die ihre Probleme durchaus den publicirten Abhandlungen Abel's entnimmt, auch hinsichtlich der Allgemeinheit der Resultate hinter Abel's Pariser Arbeit zurück, so ist doch erstaunlich, wie tief der geistvolle Verfasser in Abel's Gedankengang und den Kreis seiner Hülfsmittel eingedrungen ist, und wie viele wesentliche Ergebnisse Abel's er — in gewissem Sinne — anticipirt hat; auch ist zuzugeben, dass in Bezug auf Durchsichtigkeit, Kürze und zweckmässige Anordnung der Beweisführung die Arbeit hinter der Abel's nicht zurücksteht.

Rosenhain's Form des Integranden einer algebraischen Function.

23. Während die Arbeiten von Broch und Minding in demjenigen Jahr erschienen sind, in welchem Abel's Arbeit endlich veröffentlicht wurde, publicirte Rosenhain drei Jahre später eine solche über den gleichen Gegenstand, ohne einer dieser Abhandlungen zu gedenken. Er setzt in der Vorrede auseinander, dass es zweckmässig sei, die Function unter dem Integralzeichen in die (auch von Abel benutzte) Form:

$$1) \qquad \frac{Q(x, y)}{\chi'(y)}$$

zu setzen, wenn wieder $\chi(x, y) = 0$ die gegebene Gleichung vom n. Grad in y ist, und Q eine rationale Function in x, eine ganze in y vom Grad $n - 2$ ist. Diese Form, welche bekanntlich den Vorteil hat, dass der

Zähler Q von den durch Bevorzugung der Variabeln x ausgezeichneten Stellen des Bruches unabhängig ist, und die damit die Aufstellung des Integranden erster Gattung wesentlich erleichtert (s. oben Abel, Nr. 11), entnimmt Rosenhain derjenigen Verallgemeinerung, die Jacobi den hyperelliptischen Integralen gegeben hatte, indem er statt des Wurzelausdruckes aus $y^2 = R(x)$ eine trinomische quadratische Gleichung zu Grund legt.

Er verspricht dann zu zeigen, dass die Gleichheit jener beiden Zahlen: der Zahl der Constanten in einem Integral erster Gattung und der Minimalzahl von Integralen, auf die eine gegebene Integralsumme zurückführbar ist, auch im Falle des allgemeinen algebraischen Integrals noch besteht. Aber sowenig wie seine Vorgänger kennt Rosenhain den Begriff des allenthalben endlichen Integrals. Er löst sein Versprechen nicht einmal ein unter den vereinfachenden Annahmen, die Minding gemacht hatte; wohl weil der von ihm eingeschlagene Weg der Reduction des einzelnen Integrals auf die drei Hauptgattungen, den Legendre für das elliptische Integral und später Weierstrass für den hyperelliptischen Fall betreten konnten, wo sich diese Gattungen noch leicht definiren lassen, für die damalige Zeit noch zu schwer war.

Weitere Ergebnisse der Rosenhain'schen Arbeit über Abel's Theorem.

24. Von Ergebnissen der Rosenhain'schen Arbeit erwähnen wir:

α) Die Aufstellung eines linearen Gleichungssystems (§ 10), durch welches die Form 1) mit Hülfe von $\chi(x, y) = 0$ in eine ganze Function $(n-1)$ten Grades in y, mit in x rationalen Coefficienten, übergeführt wird. Hierzu dienen ihm jene Bézout'schen $n-1$ ganzen Functionen einer gemeinsamen Wurzel von $\chi(y)$ und $\chi'(y)$, oder besser von $n\chi - y\chi'$ und χ'; er benutzt diesen Anlass, um überhaupt dieses Eliminationsverfahren auf zwei Gleichungen verschieden hohen Grades anzuwenden, indem er den hierbei auftretenden uneigentlichen Factor der Resultante bestimmt.

β) Rosenhain bildet ferner gewisse Coefficienten X_k, die in einer Gleichung auftreten von der Form:

$$\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{n-1} B_i \left(p_0 y^i + p_1 y^{i-1} + \cdots + p_{i-1} y + \frac{i}{n} p_i\right) = \frac{1}{\chi'(y)} \sum_{k=1}^{n-1} X_k y^{n-k-1},$$

wo die B_i gegebene rationale Functionen von x sind, y wieder eine Wurzel der Gleichung:

$$\chi(x, y) \equiv p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + \cdots + p_n = 0$$

für ein unbestimmtes x ist (§ 4).

γ) Indem Rosenhain nun die B_i alle als ganze Functionen gleich hoher Ordnung ansieht, und die Coefficienten derselben so bestimmt, dass

alle X_k rechts bis auf eines verschwinden (§ 11), erhält er eine Reductionsformel, vermöge deren ein Integral von der Form:

$$\int \frac{x^{\nu_\alpha + m} y^{n-\alpha-1}}{\chi'(y)} dx,$$

(wo m, α ganze Zahlen, ν_α eine von α abhängige Zahl ist), abgesehen von einer rationalen Function von x und y, auf ein solches zurückkommt, in dessen Zähler an Stelle von $x^{\nu_\alpha + m}$ eine ganze Function $M(x)$ von niedrigerem Grad als ν_α steht. — Aber die Bedingung für die Coefficienten ν_α sind zu complicirt, es existiren ausserdem nicht näher erörterte Ausnahmefälle, so dass Rosenhain zu einem Ueberblick über die irreductibeln Integrale nicht gelangt. — Er hätte eben den Grad hinsichtlich y des Integrals, auf das er reducirt, nicht im Voraus fixiren dürfen. So kommt es, dass er das gesteckte Ziel: die linear unabhängigen Integrale der Form 1) zu finden, nicht erreicht.

Die Frage war durch die inzwischen bekannt gewordene Abel'sche Arbeit an der Hand des Abel'schen Theorems im Wesentlichen beantwortet, wenn auch nicht auf dem Rosenhain'schen Wege der Reduction des einzelnen Integrals, ein Weg, den lange nachher erst Clebsch und Gordan mit Erfolg betreten haben. Sie waren freilich ihres Ergebnisses sicher, nachdem Riemann die drei Gattungen von Integralen bereits unterschieden und namentlich für den Integranden erster Gattung die Grundlage geschaffen hatte, die den Fortschritt der ganzen Theorie bedingt hat.

Rückblick auf Abel und dessen nächste Nachfolger.

25. Ein Rückblick auf die besprochene Gruppe von Arbeiten zeigt, dass nur Minding in Abel's Gedankengang tiefer eingedrungen war. Wie Abel, besitzt er im Wesentlichen den Geschlechtsbegriff, indem er die Gleichung $\Theta(x, y) = 0$, welche neben der Gleichung $\chi(x, y) = 0$ des gegebenen algebraischen Gebildes besteht, zu adjungirtem Verhalten in den unendlich singulären Stellen von $\chi = 0$ nötigt und so die Minimalzahl der Integrale bestimmt, auf die eine gegebene Integralsumme vermöge des Abel'schen Theorems reducirbar ist. Dagegen gelingt es auch ihm nicht, jene andere Zahl zu bestimmen, die in vielen Fällen jener gleich ist, die Zahl nämlich der willkürlichen Constanten in einem Integral, für welches das Abel'sche Theorem als Wert der Integralsumme, ausgedehnt über alle Schnittpunkte einer beliebigen Curve $\Theta = 0$ mit $\chi = 0$, eine Constante ergiebt. Minding muss sich hierbei auf den Fall der binomischen Gleichung $\chi(x, y) = y^n p_0 + p_n = 0$ beschränken. Dass weder Abel noch einer der Späteren bis Riemann den Begriff des Geschlechtes in voller Schärfe erfasst hat, liegt daran, dass man nach der einen Seite

in der Verallgemeinerung zu weit ging, nach der anderen nicht weit genug. Zu weit in der Annahme der zu Grunde gelegten Gleichungsform $\chi(x, y) = 0$ hinsichtlich ihres Verhaltens im Unendlichen, indem ohne wesentliche Beeinträchtigung der Allgemeinheit die hohen Singularitäten in den Punkten $x = \infty$, $y = \infty$, die den Ueberblick erschweren und grosse Rechnungen verlangen, hätten wegfallen können, oder doch durch vielfache Punkte ohne superlineare Zweige hätten ersetzt werden können. Nicht weit genug in der Annahme des Verhaltens von $\chi = 0$ im Endlichen, wo im allgemeinen Falle schon vielfache oder doch Doppelpunkte in unbestimmter Anzahl hätten angenommen werden müssen. So kommt es, dass die Forderung des adjungirten Verhaltens der Gleichung $\Theta(x, y) = 0$ in den singulären Stellen von $\chi = 0$ überhaupt nicht, oder — wie bei Abel und Minding — nur in impliciter Form (für die unendlich fernen singulären Stellen oder an Beispielen) zur Geltung kam.

Was dieser ganzen Richtung fehlte, war zunächst der Begriff der mehrfach periodischen Function, dann die inzwischen von der französischen Schule entwickelte allgemeine Theorie der algebraischen Function. Der letzte Punkt ist oben besprochen worden. Was den ersten angeht, so haben wir zunächst über Jacobi's Formulirung des Umkehrproblems und über dessen Lösung nachträglich zu berichten.

C. **Carl Gustav Johann Jacobi** [1832—1834].

(1) Considerationes generales de transcendentibus Abelianis, Crelle's J. f. M. IX, 1832, ges. Werke II ed. Weierstrass, S. 7—16.

(2) De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur, ibd. XIII, 1834, ges. Werke II, S. 25—50.

Das Umkehrproblem der ultraelliptischen Functionen.

26. Nachdem der Gedanke der Umkehrung des Integrals in der Theorie der elliptischen Transcendenten so reiche Früchte gezeitigt hatte, lag es nahe, ihn auch auf die Integrale mit Radicanden von höherem Grade als dem vierten anzuwenden. Aber schon im Falle der „ultraelliptischen" Integrale, wo nämlich der Wurzelausdruck vom fünften oder sechsten Grad ist, versagte merkwürdiger Weise der Versuch. So wenigstens, wie Abel in jener hinterlassenen Abhandlung (s. oben Nr. 17) sich die Umkehrung gedacht hatte, war sie sicher nicht möglich, wenn anders die obere Grenze des Integrals nicht eine unendlich-vieldeutige (Rf. II Nr. 19), oder, wie sich Jacobi gesprächsweise ausgedrückt hat, eine „vernünftige Function" des Integralwertes selbst sein sollte. Denn (2)

das ultraelliptische Integral besitzt vier linear unabhängige Perioden, die im Allgemeinen sich als complexe Grössen darstellen. Da man aber durch Multiplication von solchen vier Grössen mit passend gewählten ganzzahligen Factoren und Addition jede beliebig complexe Grösse mit beliebigem Grade der Annäherung darstellen kann, so könnte man ohne Aenderung der oberen Grenze den Integralwert selbst jeder Grösse beliebig nahe bringen, und damit wäre, wenigstens in dem geläufigen Sinn, von einem Abhängigkeitsverhältnis zwischen Integral und oberer Grenze nicht mehr die Rede. Und doch musste eine Verallgemeinerung des Umkehrproblems existiren. — Lange hatte Jacobi einer Lösung dieses Widerspruchs nachgesonnen. Da gab ihm „in hac quasi desparatione" das Abel'sche Theorem selbst den Schlüssel an die Hand. In (1) erinnert Jacobi daran, dass nach diesem Theorem im Falle, dass X eine ganze Function fünften oder sechsten Grades von x ist, eine Anzahl, z. B. drei Integrale von der Form:

$$\int \frac{A + A_1 x}{\sqrt{X}} dx.$$

zwei andere mitbestimmen. Weil aber die Coefficienten A, A_1 willkürliche Grössen sind, so zerfällt auch die Gleichung des Theorems genau besehen in zwei von einander unabhängige, die, wenn:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = \Phi x; \quad \int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \Phi_1 x$$

gesetzt wird, so lauten:

$$\Phi a + \Phi b = \Phi x + \Phi y + \Phi z$$
$$\Phi_1 a + \Phi_1 b = \Phi_1 x + \Phi_1 y + \Phi_1 z,$$

wo sich nun a, b aus den gegebenen Grössen x, y, z algebraisch berechnen lassen.

Diese Auffassung des Theorems wies darauf hin, dass man auch das Umkehrproblem an zwei simultane Gleichungen anknüpfen müsse. In der That verschwinden sofort die erhobenen Bedenken, wenn man verlangt: die durch die transcendenten Gleichungen:

$$\Phi x + \Phi y = u$$
$$\Phi_1 x + \Phi_1 y = v$$

gegebenen Grössen x, y als Wurzeln einer quadratischen Gleichung darzustellen, deren Coefficienten (transcendente aber eindeutige) Functionen von u, v sind. Denn wenn alsdann $x = \lambda(u, v)$; $y = \lambda_1(u, v)$ als Functionen von u, v definirt sind, so geben die Periodenvielfachen, welche zu u hinzutreten, zu Periodenvielfachen auch von v Veranlassung, die in

derselben Vielfachheit auftreten, wie bei u, so dass also eine willkürliche Abänderung des einen Arguments eine unfreiwillige des anderen nach sich zieht.

Das Additionstheorem der ultraelliptischen Functionen lautet in in dieser Auffassung einfach so:

Die Functionen $\lambda(u+u_1, v+v_1)$ und $\lambda_1(u+u_1, v+v_1)$ lassen sich als algebraische Functionen von $\lambda(u, v)$; $\lambda(u_1, v_1)$; $\lambda_1(u, v)$; $\lambda_1(u_1, v_1)$ ausdrücken.

„In diesem Princip der simultanen Periodicität liegt die Lösung des Paradoxons, welches die durch die vierfache Periodicität entstehende Unbestimmtheit darbietet" (Jacobi, Abriss der Geschichte der elliptischen u. s. w. Transcendenten, Ges. Werke II, S. 517).

Hiermit war das Problem der Umkehrung der ultraelliptischen Functionen gestellt. Um es zu lösen, bedurfte es jüngerer Kräfte. Göpel und Rosenhain fanden in der Verallgemeinerung der elliptischen Θ-Function das Mittel, um die Coefficienten jener quadratischen Gleichung, deren Wurzeln die oberen Grenzen x, y sind, als Function der Integralsummen u, v darzustellen. —

Ueber die Arbeiten Jacobi's zur Theorie der Elimination und andere hierher gehörige werden wir an späterer Stelle (Rf. V Nr. 2 ff.) berichten.

D. Adolph Göpel und Georg Rosenhain [1844—1847].

(1) A. Göpel, Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis. Crelle's Journ. f. Math. XXXV, S. 277; 1847.

(2) Auszug mehrerer Schreiben des Dr. Rosenhain an Herrn Prof. Jacobi über die hyperelliptischen Transcendenten, Crelle's Journ. f. M. XL, S. 319. 1844—49.

(3) G. Rosenhain, Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, qui sont les inverses des intégrales ultraelliptiques de la première classe, Mém. sav. étrang. XI, 1851.

Göpel's ultraelliptische Thetafunction; Differentiation der Thetarelationen.

27. Der nächste Fortschritt in der Theorie der Abel'schen Functionen bestand in der Lösung des Umkehrproblems der „ultraelliptischen" Integrale (für welche nach Nr. 26 der Ausdruck X, Y unter dem Wurzelzeichen vom fünften oder sechsten Grade ist; für die „hyperelliptischen" steigt er bis zu unbestimmtem höherem Grade an). Diese Lösung erfolgte durch eine Art Divination hinsichtlich der Form der Reihe, die der von Jacobi in die Theorie der elliptischen Functionen eingeführten Transcendenten Θ analog gebildet ist, die aber von zwei Argumenten u, v abhängt. Durch sie mussten die Coefficienten jener quadratischen Glei-

chung, der die oberen Grenzen x, y der Integrale:

$$u = \int^x \frac{dx}{\sqrt{X}} + \int^y \frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

$$v = \int^x \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} + \int^y \frac{y\,dy}{\sqrt{Y}}$$

genügen, sich ausdrücken lassen.

Als Hermite in seinem Briefe an Jacobi vom August 1844 (Crelle's Journal f. Math. Bd. 32, 1846. Jacobi's Werke Bd. II. S. 106) die Reihe für die elliptische Theta-Function in der Form darstellte:

$$\Theta(u) = e^{-au^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{a(u+bn)^2},$$

war er der gewünschten Verallgemeinerung bereits so nahe, dass Göpel es für angezeigt hielt, mit den Ergebnissen seiner langjährigen Untersuchungen über das ultraelliptische Umkehrproblem hervorzutreten. Er legt ihnen (1) die folgende Form der neuen (hyperelliptischen) Theta-Function zu Grunde:

$$\Theta(u, v) = e^{-au^2 - a'v^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{a(u+bn+cm)^2 + a'(v+b'n+c'm)^2},$$

der er 15 ähnlich gebildete Reihen an die Seite stellt. Quadrirt man diese Reihen, so erhält man Relationen zwischen den 16 Thetafunctionen, unter anderen eine biquadratische zwischen vieren P', S', P'', S'' von ihnen. Göpel bildet die Differentialien $P'dS' - S'dP'$ und $P''dS'' - S''dP''$ und stellt vermöge jener Relationen die Reihen, die hier als Coefficienten von du und dv auftreten, wiederum als homogene Functionen dieser 4 Theta's dar. Verwendet man nun die Quotienten $P'/S' = p$, $P''/S'' = q$ (vierfach periodische Functionen, wie sie schon Jacobi eingeführt hatte), so erhält man, vermöge der letzterwähnten Gleichungen, für du und dv vollständige Differentiale von der Form $Pdp + Qdq$. Es gelingt Göpel, statt p, q zwei neue Variable x, y so zu bestimmen, dass diese Differentiale in die separirte Form der Summe von zwei hyperelliptischen Integralen übergehen. — „Meisterhaft ist die Art, wie er, ungeschreckt von der Complication jener Differentialgleichungen, dies ausführt" (Jacobi). Mit diesem Uebergang von der Thetafunction zu den Gleichungen des Umkehrproblems sind aber die gewünschten endlichen Gleichungen zwischen x, y und u, v gefunden.

Göpel's Arbeit erschien erst nach seinem Tode. In dem Nachruf, den ihm Jacobi im Anschluss an die Arbeit (1) (Jacobi's Werke II. S. 147) widmete, wird erwähnt, dass dieselbe im März 1847 zum Druck

übergeben worden ist. Schon im Jahre 1846 hatte inzwischen Rosenhain der Pariser Academie eine Preisschrift über denselben Gegenstand vorgelegt, deren wesentlichen Inhalt er bereits 1844 bis 1847 in drei Briefen an Jacobi (2) mitgeteilt hatte, und die ebenfalls mit glücklichem Erfolg die Frage der Umkehrung hyperelliptischer Integrale behandelt.

Rosenhain's Relationen für vier Argumente; Uebergang zu den Differentialformeln des Umkehrproblems.

28. Den Ausgangspunkt für Rosenhain bilden die dreifach periodischen Functionen, die bei der Umkehrung des simultanen Gleichungssystems auftreten, wenn die Summe von zwei elliptischen Integralen erster Gattung und die von zweien dritter Gattung vorliegt ((3) Chap. 1, 5), ein Problem, das noch mittelst elliptischer Thetafunctionen gelöst werden kann. Rosenhain versuchte nun, aus diesen dreifach periodischen Thetafunctionen in derselben Weise Reihen zusammenzusetzen, wie sich die elliptischen Thetareihen durch einfach periodische darstellen ((2) I). Er gelangte so zu Doppelreihen, von denen eine in der Form erschien:

$$\Theta(u, v) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{m^2a+n^2b+2mnc+2mu+2nv},$$

aus denen sich 15 andere durch Vermehrung der Argumente um halbe Vielfache der Perioden ableiten liessen. Aehnlich, wie Jacobi Relationen zwischen elliptischen Thetafunctionen von 4 verschiedenen Argumenten und anderen Thetafunctionen gebildet hatte, deren 4 Argumente aus Summe und Differenz dieser vier bestehen, Relationen, die sich aus Producten von je 4 gleichartigen Thetafunctionen zusammensetzen, stellte Rosenhain Relationen von gleicher Beschaffenheit zwischen seinen hyperelliptischen Thetafunctionen her und gelangte durch Specialisirung der vier willkürlichen Argumentenpaare zu Beziehungen zwischen Thetaquotienten mit demselben Argumentenpaar, vermöge deren alle durch zwei von ihnen sich darstellen lassen oder vielmehr durch zwei Grössen x und y, deren Product gleich dem Quadrat eines der Thetaquotienten ist, während gewisse andere symmetrische Functionen gleich ebensolchen Quotienten mit demselben Nenner sind. Eine andere Specialisirung führt ihn auf das Additionstheorem der hyperelliptischen Theta's, einer Beziehung zwischen Theta's mit zwei verschiedenen Argumentenpaaren u, v; u′, v′ und denjenigen, deren Argumente aus der Summe und der Differenz derselben bestehen. Differentiirt man diese Relation nach dem einen Variabelnpaar u′, v′, das man dann gleich Null setzt, so erhält man die partiellen Differentialquotienten nach dem anderen u, v, ausgedrückt durch Thetaproducte desselben Argumentenpaars und, indem man denselben Process an einer analogen Relation für andere Theta's aus-

führt. du und dv durch zwei Relationen mit den Differentialien dx und dy jener beiden Grössen x und y verbunden, durch welche alle Thetaquotienten sich ausdrücken lassen. Dies aber ist eben die gewünschte Integralbeziehung, die eigentlich den Ausgangspunkt der Problemstellung bilden sollte.

Die Wahl der beiden Grössen x, y als Parameter für die Darstellung aller Quadrate der Thetaquotienten mit demselben Nenner ist eine glückliche zu nennen, denn sie erspart Rosenhain den Durchgang durch die nicht separirte Form der Differentialgleichung, die Göpel's Arbeit erschwerte. Er gelangt sogleich zu den gewünschten — oder genauer gesagt, zu linear aus diesen zusammengesetzten — Gleichungen, die er nicht direct verificirt. — Um nicht zu weit von unserem Thema abzuschweifen, haben wir den Bericht über diese Arbeiten kürzer gefasst, als es die Wichtigkeit des Gegenstandes vielleicht erfordert hätte; auch müssen wir uns versagen, auf andere Punkte aus der Theorie der ultraelliptischen Functionen, welche Göpel und Rosenhain berühren, Beziehungen zwischen den bestimmten Integralen, die Theorie der Transformation u. s. w., hier einzugehen.

E. **Karl Weierstrass** [1848—1856].

(1) Beitrag zur Theorie der Abel'schen Integrale, Prgr. d. Braunsberger Gymnasium's für 1848/9 (20 S.), dat. 17. Juli 1849.
(2) Zur Theorie der Abel'schen Functionen, Crelle's Journ. f. M. XLVII, S. 289—306. 1853.
(3) Theorie der Abel'schen Functionen, ebd. LII, S. 285—380. 1856.

Uebersicht über Weierstrass' ältere Arbeiten über das Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale.

29. Die Abhandlungen (1) bis (3) beziehen sich auf das Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale — die Weierstrass'sche Bezeichnung: „Abel'sche Integrale" behalten wir uns, nach dem jetzt üblichen Sprachgebrauche, für die Integrale allgemeiner algebraischer Functionen vor —, also solcher Integrale, deren Irrationalität in einem Quadratwurzel-Ausdruck $(2\rho+1)$ten Grades besteht. Der Weg, den Weierstrass einschlägt, ist gänzlich verschieden von dem, den Göpel und Rosenhain für den Fall $\rho = 2$ mit Erfolg betreten hatten. Während diese von dem eigentlichen Ziele der Untersuchung, von der Thetafunction, ausgehen und, rückwärtsschreitend, durch Differentiation von Thetarelationen zeigen, dass die Lösung des Problems von dieser Transcendenten allein abhängt, geht Weierstrass, der Natur der Aufgabe folgend, von den ge-

gebenen Differentialgleichungen aus und bahnt sich von da den Weg zur Thetafunction.

Die Programmschrift (1) beschränkt sich auf einen in sich abgeschlossenen Teil der Theorie: die Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale; (2) enthält eine vorläufige Ankündigung des Gesamtinhaltes von Weierstrass' Theorie nebst Andeutung der Beweise; (3) einen ersten Teil der Ausführung. Eine Fortsetzung von (3) ist nicht erschienen. Wohl aber geben die Vorlesungen, die Weierstrass an der Universität zu Berlin gehalten hat, die allgemeine Theorie der Abel'schen Integrale auf gleicher Grundlage, auf der jene ersten Arbeiten beruhen. Wir werden hierüber später zu berichten haben. Einen Einblick in die eigenartigen Hülfsmittel, mit denen Weierstrass das Problem angreift, und die Methoden, die auch seinen späteren Untersuchungen zu Grunde liegen, gewährt die Ausführung über die elliptischen Transcendenten in (3), von der wir deshalb zunächst reden wollen.

Formulirung des Grundgedankens dieser Arbeiten im Falle des elliptischen Integrals.

30. Abweichend von der Jacobi'schen Theorie der elliptischen Functionen, die durchaus an reelle Beziehungen anknüpft, stellt sich Weierstrass, angeregt durch eine kurze Bemerkung Abel's in einem Briefe an Legendre (Crelle's Journ. f. M. VI, S. 76. Werke ed. S. et L. II, S. 274) die Aufgabe, die Theorie an diejenigen Potenzentwicklungen anzuknüpfen, welche sich aus der Differentialgleichung:

$$du = \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)}}$$

für die Wurzelgrössen $\sqrt{x-a_i}$ nach Potenzen der complexen Grösse u ableiten lassen. Diese Reihen definiren die Wurzelgrössen zunächst nur für einen beschränkten Bereich der Ebene. Aber vermöge des Additions- (Abel'schen) Theorems lassen sich die elliptischen Functionen $\sqrt{x-a_i}$ von u rational durch ebensolche Functionen, nur geschrieben für das Argument $u/2$, ausdrücken und somit nach ganzen positiven Potenzen von $u/2$ entwickeln. Das Convergenzgebiet dieser neuen Reihen nach $u/2$ ist das gleiche, wie das für die Reihen nach u (wenigstens unter gewissen Voraussetzungen in Bezug auf jene rationale Darstellung, auf die wir hier nicht eingehen wollen), also hat die neue Darstellung hinsichtlich u den doppelten Convergenzradius der früheren. Fährt man so fort, so lässt sich der Convergenzbereich, für den man Entwicklungen der Wurzelgrössen nach u definiren kann, beliebig vergrössern.

Nun lässt sich der zweite Differentialquotient des Logarithmus der

Grösse $\sqrt{x-a_i} = f(u)$, ähnlich wie*)

$$\frac{d^2 \log \operatorname{sn} u}{du^2} = k^2 \operatorname{sn}^2 u - \frac{1}{\operatorname{sn}^2 u},$$

selbst wieder rational durch diese darstellen und zwar in der Form einer Differenz von zwei Functionen, von denen die eine nur für die Nullstellen, die andere nur für die Unendlichkeitsstellen von f(u) unendlich wird. Bei dieser Auffassung liegt es nahe, zu versuchen, ob sich nicht f(u) durch einen Quotienten ersetzen lässt, dessen Zähler mit der ersten, dessen Nenner mit der zweiten jener Functionen übereinstimmt, und somit jene Differentialgleichung zweiter Ordnung in zwei zu spalten, die nun neue Functionen definiren, welche nicht mehr unendlich werden für endliche u, also sich in beständig convergirende Potenzreihen müssen entwickeln lassen. Dies gelingt in der That an der Hand eines merkwürdigen Satzes der Functionentheorie, den Weierstrass entwickelt, und es zeigt sich denn auch, dass, wenn man, statt von u zu u/2 (wie oben) von u zu u/m geht, wo m eine ganze Zahl ist, diese Reihen für beliebig grosse Werte von m convergiren. Die so erhaltenen Potenzreihen unterscheiden sich aber von den bekannten trigonometrischen Reihen, die Jacobi Thetafunctionen genannt hat, nur durch Factoren $e^{\alpha u^2}$ (α eine Constante); es sind eben jene Reihen, auf die Abel in seinem Briefe an Legendre hingewiesen hatte.

Diese Auffassung der elliptischen Functionen hat den grossen Vorzug, dass sie einer Ausdehnung auf die allgemeinen hyperelliptischen fähig ist.

Potenzentwicklungen für die hyperelliptischen Functionen. Erweiterung des Convergenzbereichs.

31. Sind ρ Summen $u_1, u_2, \ldots u_\rho$ von je ρ hyperelliptischen Integralen erster Gattung mit den oberen Grenzen $x_1, x_2, \ldots x_\rho$ gegeben, ist also

$$1)\qquad du_k = \sum_{i=1}^{i=\rho} \tfrac{1}{2} \frac{P(x_i)}{x-a_k} \frac{dx_i}{\sqrt{R(x_i)}}, \qquad (k = 1, 2, \ldots \rho)$$

wo

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\rho)$$
$$R(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2\rho+1}) = P(x)Q(x),$$

und die Grössen a_i complex sind (wir schliessen mit dieser Annahme an die Arbeit (3) an), so handelt es sich darum, die Grössen x_i als Wurzeln einer Gleichung ρten Grades darzustellen:

$$\varphi(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_\rho) = 0,$$

deren Coefficienten eindeutige (transcendente) Functionen der unbeschränkt

*) Weierstrass gebraucht seines Lehrers Gudermann Bezeichnung sn u statt der Jacobi'schen sinam u.

veränderlichen Grössen $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$ sind. Nun lassen sich zunächst aus den Differentialgleichungen 1) Reihenentwicklungen ableiten für die Grössen u_i nach Potenzen der $s_i = \sqrt{x_i - a_i}\,.\mathrm{const.}$, durch deren Umkehrung man erhält:

$$s_i = u_i + (u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_3 + (u_1, u_2, \ldots u_\varrho)_5 + \cdots,$$

wo die Klammern homogene Functionen der u vom Grade je des Index bedeuten. Innerhalb eines gewissen endlichen Bereiches $|u_i| < U_i$ convergiren diese Reihen unbedingt. Um nun die Form jener Gleichung $\varphi(x) = 0$ zu bestimmen, nimmt Weierstrass zu den ϱ Werten x_i noch $2\mu\varrho$ andere hinzu: $x_i', x_i'', \ldots, x_i^{(2\mu)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \varrho)$, die zu je ϱ wieder mit je ϱ von den $2\mu\varrho$ Grössen $u_1', u_2', \ldots, u_\varrho^{(2\mu)}$ durch ähnliche Gleichungen zusammenhängen, wie 1). Diese Grössen lassen sich mit den gegebenen durch die Gleichungen des Abel'schen Theorems verknüpfen:

$$u_k = \sum_{i=1}^{2\mu} u_k^{(i)}, \quad (k = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

und man kann hiernach eine algebraische Gleichung (vom Grade $2\mu\varrho + \varrho$) finden, durch welche die x_i mit den $x_i^{(k)}$ verbunden sind. Sie hat nach Abel die Form:

$$M^2(x)P(x) - N^2(x)Q(x) \equiv \Pi(x)\varphi(x) = 0,$$

wo die ganzen Functionen M, N durch die $2\mu\varrho$ Wurzeln $x_i^{(k)}$ von $\Pi = 0$ völlig bestimmt sind.

Aus der Bedingung, dass die linke Seite durch $\Pi(x)$ teilbar sein soll, leitet Weierstrass für die Functionen $M(x)$, $N(x)$ eine gebrochene Form ab, deren Zähler und Nenner sich nach Potenzen der $2\mu\varrho$ Grössen $\sqrt{x_i^{(k)} - a_i}$ oder auch der $u_i^{(k)}$ (vermöge jener Reihenumkehrungen) entwickeln lassen. Hieraus ergiebt sich für $\varphi(x)$ die folgende Form:

$$\varphi(x) = P(x)\left[1 - \sum_1^\varrho \frac{1}{x - a_i}\,\frac{Q(a_i)}{P'(a_i)}\,\psi_i^2\right],$$

wo die Coefficienten ψ_i, deren Bedeutung aus der Partialbruchentwicklung von $\varphi(x)/P(x)$ erhellt, die Form von Quotienten haben:

$$\psi_i = \sqrt{\frac{\varphi(a_i)}{-Q(a_i)}} = \frac{U_1^{(i)} + U_3^{(i)} + \cdots}{1 + U_2^{(i)} + U_4^{(i)} + \cdots},$$

deren Glieder $U_i^{(k)}$ ganze homogene Functionen der Grössen $u_1', \ldots u_\varrho'$; $u_1'', \ldots u_\varrho^{(2\mu)}$ sind. Diese Reihen convergiren innerhalb derselben Grenzen $|u_i^{(k)}| < U_i$, wie die früheren in den u_i (§ 3, a. E.). Den Uebergang nun zu der definitiven Form von $\varphi(x)$ macht Weierstrass durch die

Annahme, dass alle Grössen: $u_i' = u_i'' = \cdots u_i^{(\mu)} = u_i/2\mu$ seien (§ 4). Dann gehen die homogenen Functionen $U_k^{(i)}$ in solche der u_i über; Zähler und Nenner von ψ_i werden Reihen in u_i, deren Convergenzbereich in linearer Ausdehnung der 2μ-fache des für die früheren Entwicklungen festgestellten ist, und es zeigt sich, dass die Werte der Quotienten ψ_i und damit die Coefficienten von $\varphi(x)$ sowie die Wurzeln $x_1, x_2, \ldots x_\varrho$ von der Zahl μ überhaupt unabhängig sind. — Uebrigens legt Weierstrass, wiewohl er nur solche Reihen sucht, die für endliche Werte der u_i gelten, keinen Wert darauf, hervorzuheben, dass die Integralsummen u_i überhaupt niemals unendlich werden können. Jene Quotienten $\psi_i = \mathrm{al}(u_1, \ldots u_\varrho)_i$ nennt er hyperelliptische Functionen der Argumente $u_1, u_2, \ldots u_\varrho$; sie gehen für $\varrho = 1$ in die elliptischen Functionen sn u, cn u, dn u über, während Zähler und Nenner einzeln den Thetafunctionen entsprechen. Der Uebergang zu diesen selbst würde freilich noch erfordern, dass man (§ 7) $\mu = \infty$ einführte und so die Entwicklungen zu überall gültigen erhöbe.

Aber diesen Schritt führt Weierstrass nicht aus. Sein Plan ist vielmehr der, ähnlich wie dies oben bei den elliptischen Functionen angedeutet wurde, auf indirectem Weg zu den überall convergirenden Reihen zu gelangen, nämlich durch Spaltung eines Differentials des Logarithmus der Function $\mathrm{al}(u_1, \ldots u_\varrho)$ in zwei vollständige Differentialausdrücke, deren einer nur die Null- und Unbestimmtheitsstellen, deren anderer nur die letzteren und die Unendlichkeitsstellen von al in sich aufnimmt.

Die principielle Erledigung dieses Problems führt auf Systeme von Differentialgleichungen, deren Behandlung Weierstrass, nach Cr. J. f. M. Bd. 47, S. 297 und Bd. 52, S. 55, auch durchgeführt haben muss, ohne dass dieselbe in seinen Schriften oder Vorlesungen mitgeteilt worden wäre. Jedoch wurde die Lücke insoweit ausgefüllt, als die functionentheoretische Grundlage, die sich in (3) nur angedeutet findet, später in seinen Abhandlungen zur Functionenlehre Berlin 1886 („Einige auf die Theorie" etc. § 5) angegeben worden ist. Wir müssen es uns indessen versagen, auf diese namentlich durch ihren grundlegenden „Vorbereitungssatz" wichtig gewordene Arbeit hier einzugehen.

Uebergang zur Thetafunction durch Heranziehen von Integralsummen dritter und zweiter Gattung.

32. Von der erwähnten principiellen Erledigung absehend, aber doch denselben Grundgedanken der Zerlegung verfolgend, schlägt Weierstrass in der früheren Abhandlung (2), wie in seinen späteren Vorlesungen, einen einfacheren Weg zur Thetafunction ein, indem er die Summe von Integralen zweiter und dritter Gattung in ihrer Abhängigkeit von den u be-

trachtet. Die Functionen:

$$\psi_i = \sqrt{\frac{\varphi(a_i)}{-Q(a_i)}} = al(u_1, u_2, \dots u_\varrho)_i$$

werden zunächst definirt wie oben. Vermittelst des Additionstheorems, das für sie besteht, werden ihre Periodicitätseigenschaften abgeleitet. Perioden der al_i sind die doppelten reellen bezw. rein imaginären Vielfachen der bestimmten Integrale erster Gattung, die sich je zwischen den Grenzen a_i und $a_{i+\varrho}$ erstrecken. Die Letzteren werden in dieser Abhandlung alle als reell $(a_1 > a_{\varrho+1} > a_2 > a_{\varrho+2} > \cdots a_{2\varrho+1})$ angesehen. Diese Annahme erleichtert es dem Verfasser, den Weg formaler Rechnung bei Aufstellung der Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln zu betreten. Nun führt der Verfasser Integralsummen dritter Gattung ein:

$$\sum_{i=1}^{\varrho} \int_{a_i}^{x_i} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{R(a)}}{P(a)} \frac{P(x)}{x-a} \frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = Sl(u_1, u_2, \dots u_\varrho),$$

durch deren Differentiation nach dem Parameter a_k (oder vielmehr nach $b = P(a_k)/\sqrt{R(a_k)}$ an der Stelle $a = a_k$) sich Integralsummen zweiter Ordnung ergeben:

$$dSl(u_1, \dots u_\varrho)_k = \sum_{i=1}^{\varrho} \left\{ \frac{1}{2} \frac{Q(a_i)}{P'(a_i)} \frac{P(x_i) dx_i}{(x_i - a_k)^2 \sqrt{R(x_i)}} \right\}.$$

Es lässt sich zeigen, dass der Ausdruck:

$$-\sum_i (J_i^{(j)} + Sl(u_1 - K_1^{(j)}, u_2 - K_2^{(j)}, \dots)_i) du_i = d \log Al(u_1, u_2, \dots),$$

wo $J_i^{(j)}, K_i^{(j)}$ bestimmte Integrale zweiter bezw. erster Gattung sind (j eine von i abhängige Zahl), ein vollständiges Differential ist. Die durch sie definirte Function $Al(u_1, \dots u_\varrho)$ ist, wie der Verfasser angiebt, in eine für alle Werte der u convergente Reihe entwickelbar. Diese und die analog gebildeten Reihen sind das Ziel der Untersuchung. Durch sie drücken sich ebensowohl die Integralsummen dritter Gattung Sl aus, wie auch die Functionen $al(u_1, \dots u_\varrho)_i$, letztere als Quotienten von zweien; sie steht mit der verallgemeinerten Thetafunction $Jc(v_1, v_2, \dots v_\varrho)$ in der Beziehung:
$g.e^{E(u_1, u_2, \dots u_\varrho)}.Al(u_1, u_2, \dots u_\varrho) = Jc(v_1, v_2, \dots v_\varrho) = \Sigma\{e^{-\Sigma n_i n_j \delta_{ji}} \cos(\Sigma n_i v_i)\}$,
wo E eine ganze homogene Function zweiter Ordnung der Grössen u ist, g eine Constante, δ_{ij} eine homogene Function der bestimmten Integrale erster Gattung, die Zahlen i, j die Werte $1, 2, \dots \rho$ durchlaufen, die n_i, n_j von $-\infty$ bis $+\infty$ gehen, und wo die v mit den u durch lineare Gleichungen zusammenhängen, deren Coefficienten sich gleichfalls in bestimmt angegebener Form aus bestimmten Integralen zusammensetzen. Die Coefficienten $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ des quadratischen Ausdrucks im Exponenten

von e des allgemeinen Gliedes der Thetafunction, $\frac{1}{2}\rho(\rho+1)$ an der Zahl, drücken sich mit Hülfe der bestimmten Integrale erster Gattung K aus und hängen nur von den in diesen enthaltenen $2\rho-1$ Moduln ab (nämlich den Wurzeln von $R(x)=0$, vermindert um 3 vermöge linearer Substitution zerstörbare willkürliche Constanten). Hiermit ist aber für das hyperelliptische Umkehrproblem die von Jacobi aufgeworfene Frage (Geschichte der ellipt. etc. Transc., Werke II, S. 521) beantwortet: wie sich der Unterschied zwischen den Zahlen $2\rho-1$ und $\frac{1}{2}\rho(\rho+1)$, der für den von Göpel und Rosenhain behandelten Fall $\rho=2$ noch nicht zu Tage tritt, erklären lasse? In expliciterer Form hat Weierstrass diese Relationen durch das Verschwinden der Thetafunction und einer Reihe ihrer Differentialquotienten für gewisse halbe Perioden dargestellt (vgl. Königsberger, J. f. M. Bd. 64, S. 25).

Die Relationen, die, analog der bekannten Legendre'schen, nebenher noch zwischen den bestimmten Integralen erster und zweiter Gattung bestehen, hat Weierstrass in (2) aus den Periodicitätseigenschaften der Function Al abgeleitet.

Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln.

33. Die Programmschrift (1) ist fast ausschliesslich der Aufstellung dieser Relationen gewidmet, ermittelt sie aber auf einem anderen Wege, den Weierstrass wiederum einem Gedanken von Abel entnimmt. Er zerlegt nämlich (Rf. III Nr. 16 Schlussformel) ein gewisses Doppelintegral einmal in Summen von Producten von je zwei einfachen Integralen, die sich als bestimmte Integrale darstellen, auf der anderen Seite in die Summe zweier einfachen Integrale, die sich direct ausführen lassen. Auch diese Operation vollzieht sich auf dem Wege rein algebraischer Umformung, ohne, wie dies hier nahe gelegen hätte, die Integration durch imaginäres Gebiet in Anspruch zu nehmen.

Rückblick: Weierstrass' Hülfsmittel.

34. Mit diesen Arbeiten schliesst eine ergebnisreiche Episode der Geschichte unserer Theorie ab, merkwürdig auch darum, weil ein einzelner Zweig, ausser Zusammenhang mit der nebenher mächtig emporstrebenden allgemeinen Theorie der Functionen, für sich zu so unerwarteter Ausbildung gelangt ist. Und zwar waren es, nachdem Abel und Jacobi den Weg zu den mehrfach periodischen Functionen gezeigt hatten, nicht sowohl neue Combinationen, fremdartige Hülfsmittel, die den Erfolg bewirkten: er beruhte einfach auf der Vertiefung in den Zusammenhang der Probleme und in die Natur ihrer Lösung und auf einer umsichtigen Handhabung des Calcüls.

Einen fundamentalen Gedanken hat Weierstrass zunächst mit der Einführung der Potenzreihen von mehreren (complexen) Variabeln herein-

getragen, die er für die Reduction des Umkehrproblems auf die neuen Transcendenten verwertete. Diese selbst boten sich ihm in neuer Form dar. Von den Thetafunctionen, deren rasch convergirende Entwicklung nach trigonometrischen Functionen unübertrefflich schien, nur durch einen nie verschwindenden Factor unterschieden, zeigten die neuen Transcendenten mit einem Mal den Charakter der Unveränderlichkeit gegenüber linearen Transformationen des Arguments, und erwiesen sich einer einfachen, für alle Werte der Argumente convergenten Potenzentwicklung fähig.

Die Glieder dieser Potenzentwicklung besitzen — zunächst, wie Weierstrass erkannte, für die elliptischen und, wie Klein, Burkhardt u. A. neuerdings gezeigt haben, auch für die ultraelliptischen Integrale —, wenn die Function aus einer Summe von passend normirten Integralen dritter Gattung abgeleitet ist, invariante Eigenschaften gegenüber einer linearen Transformation des Wurzelausdrucks unter dem Integralzeichen. So wurden diese neuen Reihen, die σ-Functionen, in Verbindung mit der invarianten Form des Integranden selbst zum Ausgangspunkt für eine neue Theorie der elliptischen Functionen. Diese hat vor der Jacobi'schen den Vorzug, begrifflich invariante Operationen auch formal invariant zu gestalten, und umgeht namentlich die Auflösung des Wurzelausdrucks in seine Linearfactoren. Für die Anwendungen hat wiederum die Thetafunction, die Jacobi den Bedürfnissen der Praxis in Geometrie und Mechanik mit unerreichten Geschick angepasst hat, vor der σ-Function unbestreitbare Vorzüge. [Man vergl. den diesen Anwendungen gewidmeten zweiten Band der Théorie des fonct. ellipt. von Halphen (3 Bde., Paris 1886/91), der von der Weierstrass'schen Bezeichnung ausgeht, aber in den Schlussformeln immer wieder auf die trigonometrischen Reihen zurück greift.]

Die Potenzreihen mit n Argumenten hat Weierstrass auch seinen späteren Untersuchungen über allgemeine Functionentheorie zu Grunde gelegt, auf die wir bei diesem Anlass nur noch kurz hinweisen wollen.

In seinen Vorlesungen (die Schrift von Biermann, Theorie der analytischen Functionen, nach Vorlesungen von Weierstrass, Leipzig 1887, ist zwar ohne Mitwirken des Urhebers verfasst und im Einzelnen nicht immer verlässlich, gewährt aber doch einen Ueberblick) hat Weierstrass für die Potenzreihen mit ganzen, positiven Exponenten — auf Grund ihrer Analogie mit den ganzen Functionen — einen Algorithmus begründet, der für ihre Behandlung eine sichere Stütze bietet. Namentlich der heiklen Frage der Teilbarkeit von solchen Potenz-

reihen durch andere widmen die Vorlesungen grundlegende Untersuchungen (s. auch Weierstrass' Abh. zur Funct.-Lehre, 5. Abh.). Auf dieser Basis hat Weierstrass den fundamentalen Begriff der „analytischen Function" errichtet, welche alle einer Potenzentwicklung zugänglichen Functionen umfasst, und die aus dem Inbegriff ihrer Fortsetzungen in dem Gesamtbereiche der unabhängigen Veränderlichen besteht. Diese Fortsetzungen werden, nach passender Wahl der letzteren, durch wenn auch mühsame und in praxi schwer durchführbare, so doch sichere Rechnungsmethoden gewährleistet.

Die zunächst unerledigt gebliebenen Fragen in Betreff des Umkehrproblems.

35. So sehr diese Untersuchungen den allgemeinen Functionsbegriff förderten, so bedurfte es doch bei denjenigen algebraischen Functionen, von denen die Lösung des allgemeinen Umkehrproblems abhing, anderer Hülfsmittel. Der Geschlechtsbegriff hätte sich allenfalls aus Abel's und Minding's Arbeiten ableiten lassen, wenn man den des Integranden erster Gattung hinzugenommen hätte. Dieser hätte auch auf die φ-Function — den Angelpunkt der Theorie — und auf die Construction von algebraischen Functionen, die gegebenen Unstetigkeitsbedingungen genügen, hinführen können. Aber zu diesen Operationen mussten noch der Begriff der eindeutigen Transformation, auf den die Riemann'sche Auffassung in so natürlicher Weise hinführt, die Untersuchung der Moduln, der Verschwindungsstellen der Thetafunction u. a. fundamentale Sätze und Begriffe hinzutreten. Zunächst jedoch fehlte die Bildung, ja selbst die Formulirung des Begriffs des überall endlichen Integrals, ferner ein Mittel zur Bestimmung der Perioden, die schon Cauchy mit allen Hülfsmitteln der Integration durch das Imaginäre vergeblich zu bestimmen versucht hatte.

Methodische Strenge, scharfe Umgrenzung der Resultate, unumstössliche Existenzbeweise — die grossen Vorzüge der Cauchy'schen und der Weierstrass'schen Arbeiten — bezeichnen in jeder mathematischen Disciplin ein wichtiges, aber eigentlich erst das letzte Stadium der Entwicklung.

Ihm voraus muss eine Periode der freien, vielleicht regellosen Production, der Verknüpfung disparater Begriffe und Erscheinungen gehen, zu der dem Erfinder das Material oft aus fernabliegenden, gelegentlich entdeckten Quellen zuströmt, wo dann erst die Sichtung und Anordnung zu einer Theorie den Meister zeigt. Das Eingreifen Riemann's bezeichnet für die Theorie der Functionen eine solche Periode freier Erfindung und intuitiven Schaffens. Aus der mathematischen Physik erwuchs ihm die Einsicht in Functionen, die aus ihren Unstetigkeitsstellen

und ihrem Verhalten längs der Begrenzung eines Bereiches im Inneren desselben bestimmt sind. Indem er diese Auffassung in die Theorie der Functionen einer complexen Variabeln, wie sie Gauss und Cauchy begründet hatten, übertrug, enthüllte Riemann das Wesen der mehrfach periodischen Function und den Kern des Umkehrproblems.

Mit welchem Erfolge in späterer Zeit die Methode der Sichtung und strengen Begründung wieder einsetzte, darüber werden wir in den folgenden Abschnitten dieses Referats zu berichten haben.

Zunächst wenden wir uns zu Riemann.

IV. Abschnitt.

Riemann's Theorie der Abel'schen Functionen und ihr Ursprung.

A. G. Green [1828]; C. F. Gauss [1840]; P. G. Lejeune-Dirichlet; G. Kirchhoff [1845—1848]; H. Helmholtz [1853].

Fortsetzung einer Function in der imaginären Ebene.

1. Indem Lagrange seiner „Théorie des fonctions" die Function in Form einer einzigen Potenzreihe zu Grunde legt, beschränkt er, auch abgesehen von der Annahme wesentlich reeller Argumente, das Wertgebiet der ersteren in zu hohem Masse. Denn nicht nur kann eine Function in demselben Bereiche der imaginären Ebene durch ganz verschiedene Entwicklungen dargestellt werden; eine jede derselben stimmt auch mit der durch sie dargestellten Function in einem anderen Umfang überein, so dass die Reihe an gewissen Stellen aufhören kann zu existiren, wo die Function selbst weiterbesteht.

Nachdem Gauss und Cauchy auch complexe Variable in Betracht gezogen hatten, erhob sich zunächst die Frage, ob und in welchem Umfange der Wert einer Reihe mit dem der Function, die sie für ein reelles Argumentengebiet darstellt, auch in der imaginären Ebene übereinstimmt. Für die Binomialreihe hatte diese Frage Abel 1825/6 in einer berühmten Abhandlung beantwortet, jedoch die anschliessende Frage nach solchen Potenzreihen, welche die Function ausserhalb des gefundenen Gültigkeitsbereiches darstellen, unberührt gelassen. Mit eben dieser Frage scheint sich Gauss in Bezug auf eine andere Function: diejenige, die in einem gewissen Gebiet durch die hypergeometrische Reihe dargestellt wird, schon frühe beschäftigt zu haben. Anschliessend an dessen Abhandlung aus dem Jahr 1812 gab Kummer (Journ. f. M. XV, 1836) solche Potenzentwicklungen an, die — als particuläre Integrale der

Differentialgleichung, welche jene Function für alle Werte des Arguments definirt — dieselbe in dem ganzen Bereiche der imaginären Ebene darzustellen vermögen. In dieser Weise fasst Riemann die Kummer'schen Resultate in seiner Abhandlung über die Gauss'sche Reihe (Gött. Abh. 1857) auf, wo er sich die Aufgabe stellt, diese Function mit Hülfe einer Functionalgleichung über die Ebene fortzusetzen.

In bestimmter und expliciter Form hat dieselbe Frage — wiederum in einem anderen Gebiete — zuerst Puiseux gestellt, indem er (1850) für die algebraischen Functionen und ihre Integrale an der Hand der Cauchy'schen Sätze Potenzreihen angab, die zusammen diese Function in der ganzen Ebene darstellen, ein Problem, das, wie wir oben gesehen haben, noch auf unendlich viele Weisen lösbar ist und für dieselbe Stelle im Allgemeinen zu verschiedenen Werten führt.

Diese Darstellungen beziehen sich indessen alle auf Functionen, die für die ganze Ebene irgendwie bereits definirt vorliegen. Die Aufgabe, aus einer die Function definirenden, aber nur für einen beschränkten Bereich gültigen Potenzentwicklung solche abzuleiten, welche sie für andere Bereiche der Ebene definiren, hat erst später Weierstrass auf Grund der Sätze über Potenzreihen, die er in seiner Abhandlung über analytische Facultäten 1854/6 veröffentlicht hatte, in seinen Vorlesungen gelöst.

Von dem durch diese und andere sogleich zu besprechende Arbeiten begründeten Begriff der „Fortsetzung“ einer Function geht nun Riemann aus, indem er in der Einleitung den Satz formulirt (Theor. der Abel'schen Functionen. 1. Abh., s. unten Nr. 11): „Eine Function w von $x+iy$, die in einem Teile der (x, y) Ebene gegeben ist, kann darüber hinaus nur auf Eine Weise stetig fortgesetzt werden“. Das Ziel seiner Untersuchung ist nicht diese Fortsetzung selbst. Indem er die Analogie der räumlichen Potentialfunction im Auge hat, die, an der Begrenzung eines geschlossenen Raumes gegeben, gemäss der bekannten Laplace'schen Differentialgleichung eindeutig und nach der Stetigkeit ins Innere fortgesetzt werden kann, erklärt vielmehr Riemann, dass die Fortsetzung der in einem Bereiche der Ebene gegebenen Function w vermöge der partiellen Differentialgleichung $\partial w/\partial y = i\,\partial w/dx$ streifenweise in das unbekannte Gebiet ausführbar sei, ohne jedoch die Ausführung selbst zu erörtern, lässt auch die Frage unentschieden, in welcher Gestalt die Function in dem gegebenen Bereiche definirt sein soll, ob etwa als Reihe oder durch irgend sonst ein Näherungsverfahren, weil er ein anderes Ziel im Auge hat, das überhaupt nur bei möglichster Befreiung von allen beschränkenden Voraussetzungen erreichbar schien: einen Existenzbeweis, der an be-

stimmte Operationen unmittelbar nicht anknüpft. Er stellt sich nämlich die schwierige Frage nach dem geringsten Umfange der Bedingungen, durch die überhaupt eine Function von $x+iy$ noch eben ausreichend in der imaginären Ebene (oder einem Teile derselben) definirt ist. Der Umgrenzung dieser Bedingungen ist Riemann's Doctordissertation gewidmet. Bevor wir indessen diese besprechen, ist es nötig, teils wegen der angedeuteten Verwandtschaft seiner Functionentheorie mit derjenigen, die Green und Gauss für die Potentialfunction entwickelt hatten, theils weil die Beweisführung der Dissertation durchaus in den Vorstellungen dieser Theorie wurzelt, mit einigen Worten auf die Entwicklung der Lehre von dem Potential in den dreissiger Jahren einzugehen.

(1) G. Green, An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism. Nottingham 1828: Abdruck in Crelle's J. f. M. Bde. 39, 44, 47: ferner: Mathematical papers 1871, London, S. 3.

(2) C. F. Gauss, Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte: Res. Beob. magn. Ver. Leipz. 1840, Werke V, S. 197.

(3) G. Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über die im verkehrten Verhältnis etc. her. von Grube, Leipzig 1876.

(4) B. Riemann. Schwere, Elektricität und Magnetismus, nach Vorlesungen von Riemann bearbeitet von Hattendorff, Hannover 1876.

Das räumliche Potential und seine Bestimmung durch Grenzbedingungen.

2. Man kennt die Rolle, welche die Laplace'sche Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0,$$

der im Allgemeinen die „Potentialfunction“ (Green, „Potential“ nach Gauss) von räumlich verteilten Massen genügt, in der mathematischen Physik spielt. Die Theorie der Attraction schwerer Massen, der Gleichgewichtszustand der Elektricität auf Conductoren unter dem Einfluss von elektrischen Massen hängen ebenso von ihr ab, wie der stationäre Bewegungszustand der Wärme und derjenige galvanischer Ströme. Wie der Reihe nach diese Zweige der mathematischen Physik in die Geschichte der Potentialtheorie eingegriffen haben, hat M. Bacharach in seinem Abriss dieser Geschichte (Göttingen 1883) mit Sachkenntnis dargestellt. Wir heben hier nur hervor, dass von den allgemeinen Eigenschaften des Integrals jener Differentialgleichung, abgesehen von einem Satze von Gauss, der sich schon frühe mit einer Reduction des dreifachen auf ein Flächen-

integral beschäftigt hatte (Theor. attract. corpor. sphaeroidicorum etc. Commentat. Gott. II, 1813, Werke Bd. V, S. 1), trotz der Bemühungen von Laplace, Poisson u. A. noch in den zwanziger Jahren so gut wie nichts bekannt war. Man hielt an der Vorstellung fest, dass das Integral zwei willkürliche Functionen mit sich führen müsse, von denen die eine den Wert der Raumfunction an einer Grenzfläche, die andere ihre Differentialquotienten daselbst angiebt, von deren allgemeiner Einführung aber die Rede nicht sein könne.

Und doch musste schon der Umstand, dass z. B. der stationäre Wärmezustand eines Körpers, der ja ebenfalls durch ein Integral V jener Differentialgleichung dargestellt wird, völlig bestimmt ist, wenn derjenige der Oberfläche immer auf demselben Stand erhalten wird, darauf schliessen lassen, dass die eine jener willkürlichen Functionen durch eine andere Bedingung ersetzt werden kann. In seiner Abhandlung: An essay etc. (1) zeigt nun Green, dass es die Forderung der Stetigkeit von V sowie aller seiner Differentialquotienten im Inneren des Körpers ist, die an die Stelle der zweiten Grenzbedingung treten kann.

Green stellt nämlich unter dieser Voraussetzung den Potentialwert V für das Innere des Körpers dar lediglich durch denjenigen $\overline{V}$ an der Grenzfläche, und zwar mit Hülfe einer anderen Function U, welche die Eigenschaft hat (Green, Mathem. Papers S. 31, vergl. auch Riemann, Vorlesungen über Schwere etc. S. 23):

1) auf der Grenzfläche den Wert null zu besitzen;

2) in einem (unbestimmten aber festen) Punkt P im Inneren unendlich zu werden wie $1/r$ (wenn r den Abstand irgend eines Punktes von P bedeutet);

3) im Inneren ebenfalls der Differentialgleichung für V zu genügen.

Ist diese Hülfsfunction U bekannt, die, wie man sieht, einfacheren Bedingungen wie V selbst genügt, so stellt sich V für jeden Punkt im Inneren dar mittelst der Formel:

$$4\pi V = -\int d\sigma . \overline{V} . \frac{\partial U}{\partial n},$$

das Integral erstreckt über die Grenzfläche, wo $d\sigma$ das Flächenelement, $\partial U/\partial n$ der Differentialquotient von U ist, genommen senkrecht zu $d\sigma$ nach dem Inneren hin*). Die Coordinaten jenes Punktes P sind eben

*) Schon oben (Rf. II Nr. 25) wurde auf die Analogie dieser Formel mit der des Cauchy'schen Mittelwertsatzes hingewiesen, auf welchen sie sich reducirt, wenn man von drei auf zwei Variable und von einem beliebig be-

die in V eingehenden Argumente der gesuchten Potentialfunction. Wegen der Modification, welche die Formel erfährt. wenn V oder die Differentialquotienten von V im Inneren Unstetigkeiten besitzen sollen, verweisen wir auf die erwähnten Vorlesungen (über Schwere etc.) von Riemann, und constatiren hier nur, dass in jedem Falle der Ausdruck für eine Potentialfunction V, die gegebene Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen erfüllen soll, bloss von jener Function U abhängt. Für diese letztere kann ein allgemeiner Ausdruck nicht aufgestellt werden, ja es ist nicht einmal ein Weg bekannt, der in einem gegebenen Falle zu ihr hinführt. Der Nachweis nun aber, dass eine solche Function immer existirt, lässt sich erbringen und ist Gegenstand zahlreicher Untersuchungen geworden.

Green begnügt sich in dieser Hinsicht mit dem Hinweis auf die physikalische Bedeutung von U in dem Falle des Potentials elektrischer Massen. Man nehme die Grenzfläche als vollkommenen Leiter an und mit der Erde in leitende Verbindung gebracht; ferner sei in jenem Punkte P (dem Unstetigkeitspunkt von U) die Elektricitätsmenge 1 vorhanden. Alsdann bedeutet U das Potential derjenigen Massen, die sich zusammensetzen aus dieser Menge und der durch sie in dem Conductor inducirten elektrischen Massen-Vertheilung.

Für eine analytische Theorie des Potentials konnte aber dieser Existenzbeweis von Green nicht genügen. Anknüpfend an den Grundgedanken einer Betrachtung, die Gauss ((2) § 31) angestellt hatte, verfährt Dirichlet in dieser Absicht zunächst so, dass er die Potentialfunction U, die von Riemann (Vorles. Schwere etc.) die „Green'sche" Function genannt wird, in zwei andere eben solche spaltet, indem er $U = u + 1/r$ setzt. Die eine, $1/r$, erfüllt die verlangte Unstetigkeitsbedingung in P für sich. Die Function u muss dann noch, abgesehen davon, dass sie im Inneren die übrigen Bedingungen für U erfüllt, damit $u + 1/r$ an der Oberfläche gleich Null ist, dort allenthalben mit $-1/r$ übereinstimmen.

3. Die Existenz dieser letzterwähnten Function u erweist nun aber Dirichlet folgendermassen.

Die Green'sche Function.

---

grenzten Flächenstück auf eine Kreisfläche vom Radius 1 übergeht, endlich indem man $U = \log r$ setzt, wo r den Abstand vom Mittelpunkt bedeutet.

Den entsprechenden Satz für drei Variable nennt Pockels in seiner Schrift: Ueber die Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ (Leipz. 1891 S. 215) den Gauss'schen Mittelwertsatz der Potentialtheorie.

Man betrachte eine Function u′, die auf der Oberfläche eines geschlossenen Raumes gegeben ist und daselbst ebenso wie im Inneren samt ihren ersten Differentialquotienten eindeutig, endlich und stetig ist. Dann ist das Integral:

$$\int K^2 dT = \int \left[\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right)^2\right] dT,$$

über den geschlossenen Raum ausgedehnt, eine endliche positive Grösse, die sich im Allgemeinen mit u′ ändert, auch wenn man die Function u′ so variirt, dass sie an der Begrenzung immer denselben Wert besitzt, und die, wie Dirichlet nicht bezweifelt, für eine bestimmte Gestalt dieser Function $u' = u$ einen Minimalwert annimmt. Drückt man die letztere Bedingung aus, so führt das Variationsproblem auf die Bedingungsgleichung:

$$1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

für alle im Inneren gelegenen Punkte x, y, z. Zugleich zeigt es sich, dass u auch im Inneren einwertig, stetig und endlich sein muss, und dass es nur eine Function u giebt, welche die vorgeschriebenen Bedingungen erfüllt. (Riemann, Schwere etc. § 34.)

Das Analogon zu dem Dirichlet'schen Princip in der Theorie der galvanischen Ströme.

4. Für das variirte Integral $\int K^2 dT$ hat Kirchhoff eine interessante Interpretation in der Abhandlung: „Ueber die Anwendbarkeit der Formeln für die Intensität galvanischer Ströme in einem System linearer Leiter auf Systeme, die zum Teil aus nichtlinearen Leitern bestehen" (Pogg. Ann., Bd. 75, 1848; Ges. Abhandl. S. 33—49) gegeben, deren wir auch um deswillen hier gedenken, weil diese Abhandlung vor Riemann bereits den Begriff des Querschnitts, auf den Raum übertragen, in einem gewissen Sinne anticipirt.

Durch ein teilweise aus körperlichen Leitern, die längs Flächen zusammenstossen, bestehendes System fliesse ein stationärer elektrischer Strom, dessen Spannung*) in jedem Punkte des Leitersystems durch eine Function u dargestellt werden möge. An den Contactflächen wird, verschiedenes Leitungsvermögen (l, l_1) je der anstossenden Körper vorausgesetzt, eine sprungweise (aber längs jeder Fläche constante) Aenderung der Spannung stattfinden. Es ist zu beweisen, dass die Function u der bekannten Laplace'schen Potentialgleichung genügt. Zu dem Zweck benutzt Kirchhoff die Forderung, dass die gesamte in der Zeiteinheit durch den Strom entwickelte Wärmemenge einen Minimalwert besitzt.

*) Ueber Spannung und Potential vergl. Helmholtz, Ueber einige Gesetze etc. Pogg. Ann. 89 (1853), Werke I, S. 487.

Diese Wärmemenge stellt sich, nach einem Satze von Joule, durch das Integral $\int K^2 l dT$ dar, wo l das specifische Leitungsvermögen ist, und das Integral sich über das ganze System erstreckt. Das Verschwinden der Variation zieht dann nach sich α) das Bestehen jener partiellen Differentialgleichung 1) im Inneren, β) die Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial n} l + \frac{\partial u_1}{\partial n_1} l_1 = 0$$

längs jeder Contactfläche, wo n, n_1 die nach innen gerechneten Normalen zum Flächenelement bedeuten, u. u_1 die Potentialwerte beiderseits, für die dann noch die Differenz $u - u_1$ längs der Grenzfläche gleich der constanten Spannungsdifferenz der anstossenden Körper ist.

Diese Contactflächen spielen hinsichtlich der Spannungsfunction u offenbar eine ähnliche Rolle, wie sie hinsichtlich gewisser Functionen in der Ebene den Riemann'schen Querschnittslinien zukommt.

Genau dieselbe Bedeutung, welche in der Riemann'schen Theorie der Querschnitt der Fläche gegenüber dem Integral der algebraischen Function besitzt, hat in der Theorie der elektrischen Ströme diejenige Trennungsfläche, die Helmholtz in der Abhandlung: „Ueber einige Gesetze der Verteilung elektrischer Ströme" etc. (Pogg. Ann. 89. 1853, Wissensch. Abh. I, S. 489) eine elektrische Doppelschicht nennt. Zu beiden Seiten einer solchen sind nämlich die Spannungswerte um eine constante Differenz verschieden, die Differentialquotienten aber gleich (vgl. auch Klein, Riemann's Theor. d. algebr. Funct. Leipz. 1882, §. 4).

Die Beziehungen, in denen Riemann's Anschauungskreis zur mathematischen Physik steht, liessen sich leicht noch an anderen Beispielen verfolgen. Hinsichtlich der Bestimmung einer Function durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen könnte man noch an Kirchhoff's Abhandlung erinnern: Ueber den Durchgang eines elektrischen Stroms durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige (Pogg. Ann. Bd. 64, 1845) und Nachtrag (ibd. Bd. 67, 1846); hinsichtlich des Begriffes „Zusammenhang von Flächen und Räumen" an Helmholtz' Abhandlung über Wirbelbewegungen (Journ. f. M. Bd. 55, 1858), wo auf Riemann's Theorie Bezug genommen wird. Wir bemerken nur noch, dass es jene von Dirichlet und Kirchhoff gewählte Gauss'sche Form des Existenzbeweises der Function u, die an die Annahme des Minimums eines Integralwertes anknüpft, oder vielmehr eine gleich zu besprechende Modification desselben war — immer ausgesprochen für Functionen von zwei Veränderlichen —, die Riemann unter dem Namen des Dirichlet'schen

Princips seiner Theorie der Abel'schen und algebraischen Functionen zu Grunde gelegt hat.

B. Bernhard Riemann's Dissertation [1851].

(1) Gleichgewicht der Elektricität auf Cylindern mit kreisförmigem Querschnitt und parallelen Axen. Aus hinterlassenen Blättern zusammengestellt. Riemann's gesammelte mathematische Werke herausgeg. von H. Weber unter Mitwirkung von R. Dedekind. Leipzig 1876. 1. Aufl. S. 413—416.

(2) Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. Inauguraldissertation. Göttingen 1851. Ges. Werke S. 3—47.

Das logarithmische Potential.

5. Schon Laplace hatte auf die Vereinfachung hingewiesen, welche die Potentialtheorie erfährt, wenn die anziehenden Massen, statt auf beliebig begrenzten Räumen, auf Cylindern von unendlicher Ausdehnung verteilt, und die verteilenden Kräfte längs gerader Linien, die mit den Erzeugenden parallel sind, constant sind. Man kann nämlich dann jede Erzeugende durch ihren Schnittpunkt mit einer zur Cylinderrichtung senkrechten Ebene ersetzen und so das Problem auf ein ebenes reduciren. Die Differentialgleichung geht dann in eine solche für zwei Veränderliche über:

$$\Delta^2 v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

die Potentialfunction $\Sigma m/r$ in das (von C. Neumann so genannte) „logarithmische Potential" $v = \Sigma m \log r$.

In der hinterlassenen Note (1), deren Besprechung wir aus mehreren Gründen vorausschicken, stellt Riemann die Aufgabe, eine Function $v(x, y)$ zu finden, die im Inneren eines von Kreisen begrenzten Flächenstücks der Gleichung $\Delta^2 v = 0$ genügt und auf den Grenzkreisen vorgeschriebene Werte annimmt.

Jener ersten Bedingung allein genügt der reelle oder auch der imaginäre Bestandteil irgend einer Function einer complexen Variabeln

$$w(x+iy) = u + iv.$$

Zugleich vermittelt nach Lagrange und Gauss jede solche complexe Function w eine in den kleinsten Teilen ähnliche Abbildung der Ebene mit den Coordinaten u, v (oder genauer: derjenigen Teile dieser Ebene, für welche die Gleichung $w = u + iv$ definirt ist) auf den von der Function w bedeckten Teil der Ebene (x, y). Verlangt man, dass diese Ab-

bildung eine ein-eindeutige ist, so ist, weil die Rückwärtsauflösung der Gleichungen für u, v nach x, y eine mehrdeutige Bestimmung von x, y ergeben kann, die Möglichkeit ins Auge zu fassen, dass die UV-Ebene (ganz oder teilweise) von Functionszweigen, die durch die Fortsetzung entstehen, mehrfach überdeckt wird. Lässt man diesen Functionszweigen übereinander liegende Blätter, welche die UV-Ebene überdecken, entsprechen, so kann erreicht werden, dass jedem Punkt der Begrenzung der Fläche in der XY-Ebene nur ein solcher in der Begrenzung der über die UV-Ebene ausgebreiteten Fläche (und umgekehrt) und jedem Punkt im Inneren je ein Punkt im Inneren entspricht.

Abbildung eines von Kreisen begrenzten ebenen Flächenstücks.

6. Was die Einführung der Grenzbedingungen betrifft, so ist es angezeigt, ein für die Riemann'sche Theorie charakteristisches Beispiel, das Riemann in (1) selbst behandelt, hier voranzustellen, den Fall nämlich, wo die Function w längs jeder der Grenzcurven alle reellen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ und jeden nur einmal durchläuft.

Besteht alsdann die Begrenzung zunächst aus einem Kreise, so bildet sich dieser in der XY-Ebene auf die reelle Axe der UV-Ebene, und das Innere auf die positive Halbebene ab. — Besteht die Begrenzung aus zwei Kreisen, die sich nicht schneiden, so ist, wie man leicht sieht, das Abbild ein Blätterpaar, das diese Halbebene doppelt überdeckt, das aber eben so wie das Flächenstück in der XY-Ebene zusammenhängen muss. Man findet, dass dieser Zusammenhang in zwei „Verzweigungspunkten" und dem sie verbindenden „Verzweigungsschnitt" stattfindet (s. Rf. II, Nr. 34), durch den hindurch ein stetiger Uebergang von einem Blatt zum anderen möglich ist.

Die Aufgabe nun, eine Function zu finden, welche diese Abbildung vermittelt, ist leichter zu lösen, als jene oben gestellte allgemeine, wo die Function w an den Grenzkreisen reelle Werte in beliebiger Ausdehnung und Verteilung annimmt. Aber auch diese letztere ist damit der Lösung näher geführt, weil dieses Problem, auf die aus Halbebenen bestehende Fläche übertragen, leichter zu übersehen ist.

Um von den Randwerten zu denen im Inneren der Fläche vorzudringen, braucht man in jedem Falle wieder die Green'sche Hülfsfunction U, die wie früher (oben Nr. 2) an der Grenze den Wert Null besitzen, im Inneren der Gleichung $\Delta^2 U = 0$ genügen, aber diesmal in einem unbestimmten Punkte des Inneren nicht wie $1/r$, sondern wie $\log r$ unendlich werden muss. Im Falle jener zweiblättrigen Fläche über der UV-Ebene lässt sich aber diese Function erraten. Sie ist nichts anderes, als der imaginäre Teil eines elliptischen Normalintegrals dritter Gattung, welches

in der doppelt überdeckten Halbebene die erwähnten Bedingungen alle erfüllt: denn für reelle Argumente ist der imaginäre Bestandteil des Integrals bekanntlich gleich Null. — Hiermit war der Weg gebahnt für die Bewältigung der höheren Fälle, wo die Zahl der Grenzcurven grösser als zwei ist. Es erhöht sich dann die Zahl der Blätter, ihr Zusammenhang wird complicirter, immer aber ist die Green'sche Function U durch ein Abel'sches Integral dritter Gattung bestimmt.

Mutmasslicher Ursprung von Riemann's functionentheoretischen Untersuchungen.

7. Mit dieser Erkenntnis war nicht nur ein naher Zusammenhang der Theorie der Abel'schen Functionen mit den Abbildungsaufgaben und dem oben bezeichneten Hauptproblem der „Dissertation" festgestellt. Auch die Frage des Zusammenhangs und der Zerschneidung berandeter Flächen, welche die Ebene einfach überdecken, findet sogleich ihr Gegenbild in der Zerschneidung der die imaginäre Ebene vielfach überdeckenden (unberandeten) „Riemann"'schen Fläche*).

Ueberhaupt enthält diese Note (1) nicht nur in nuce die Aufgaben, welche die Dissertation sich stellt, und welche die Theorie der Abel'schen Functionen in einer Richtung nur vervollständigt, sondern sie stellt zugleich die wesentlichen Hülfsmittel zu ihrer Lösung zur Verfügung.

Die Integrale dritter Gattung, die als Green'sche Function in den Dirichlet'schen Existenzbeweis eintreten, sind, bei gegebener Anzahl der Grenzkreise, d. h. der Blätter der UV-Ebene, durch ihre Unstetigkeitspunkte und das Verhalten des imaginären Teiles an der U-Axe völlig bestimmt. Nach der allgemeinen Theorie musste man sie hierdurch geradezu definiren können. Es handelte sich dabei einerseits um das Studium des Abhängigkeitsverhältnisses zwischen der Periodicität der Integrale und dem Flächenzusammenhang; andererseits um eine Ausdehnung des Dirichlet'schen Beweisganges auf diese Fläche bei Annahme von Unstetigkeiten, welchen Dirichlet noch ausgewichen war. Aber für die Bewältigung auch dieser Schwierigkeit konnte die schon von Gauss und von Cauchy angewandte Methode in Betracht kommen, wonach man durch Abziehen bekannter Functionen eine vorliegende unstetige Function in eine stetige verwandelt.

Aus der geschilderten Gedankenfolge, zusammengehalten mit einer Andeutung der Vorrede zu Abh. 4. der Abel'schen Functionen (a. E.) sind

*) Der Uebergang von den die Halbebene überdeckenden Halbblättern zu der ganzen Fläche geschieht in der UV-Ebene durch Hinzunahme des Spiegelbildes (an der U-Axe), in der XY-Ebene dadurch, dass man die berandete Fläche ergänzt durch die aus ihr mittelst Transformation durch reciproke Radienvectoren entstandenen Flächenpartien.

wir geneigt, die Note (1) als eine der frühesten Arbeiten Riemann's, oder doch ihren Gedankengang als den Ausgangspunkt für Riemann's Arbeiten über Functionentheorie zu bezeichnen. Mindestens erklärt diese Annahme, wenn man den Interessenkreis berücksichtigt, in welchen Riemann durch seine Göttinger Lehrer eingeführt war, wohl ebenso ungezwungen die Art, wie Riemann zu seinen Problemen und zugleich zu den Hülfsmitteln für deren Bewältigung gelangte, wie die Annahme von F. Klein, dass für Riemann die Theorie der galvanischen Ströme den Ausgangspunkt bildete, auch wenn man von anderweitigen Bedenken ganz absieht, die der eine von uns (N.) in einer Besprechung des Klein'schen Werkes*) bereits früher gegen diese Annahme erhoben hat.

Aber auch für andere Ideenfolgen, die Riemann beschäftigt haben, lässt sich der Ausgangspunkt in jener Note (1) finden.

Das Problem der Abbildung einer durch Kreise begrenzten Fläche auf die mehrfach überdeckte Halbebene, dessen Lösung der des allgemeinen Problems vorausgehen muss, führt nämlich Riemann auf eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit algebraischen Functionen der Unabhängigen als Coefficienten zurück, und so eröffnet sich ihm ein zweites nicht minder wichtiges Untersuchungsgebiet: die später sogenannte Theorie der Functionen mit linearen Transformationen in sich selbst, das, zuerst in Riemann's Arbeit über die Gauss'sche Reihe betreten, in der Folge von so grosser Bedeutung geworden ist.

Die Querschnitte der Riemann'schen Fläche und ihre Bedeutung für die Führung des Integrationswegs.

8. Wir wenden uns jetzt zu dem Inhalt der Dissertation, wobei wir uns indess in Anbetracht des Gedankenreichtums und der Vielseitigkeit der Schrift auf die Darlegung einiger Hauptpunkte beschränken müssen.

Was wir von der „Riemann'schen" Fläche, wie man sie bald nachher nannte, ihrer Gestalt, ihrem Zusammenhang, ihrer Zerlegung durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende früher gesagt haben (II, Nr. 34), führen wir hier nicht weiter aus, weil zahlreiche Lehrbücher diese Begriffe zum Gemeingut der wissenschaftlichen Welt gemacht haben. Wir erinnern nur daran, dass die Fläche aus dem Bedürfnis der eindeutigen Fortsetzung eines für einen Teil der imaginären XY-Ebene definirten Functionselementes entstanden ist, und demnach dazu dient, einer mehrdeutigen Function von x und y einen geometrischen Ort anzuweisen, wo sie eindeutig definirt ist. Uebrigens setzt Riemann in seiner Dissertation diese (mehrfach zusammenhängende) Fläche der Allgemeinheit wegen noch überdies mit irgendwelchen Begrenzungscurven

*) Zu F. Klein's Schrift „Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen", 1882, Zeitschr. f. Math. u. Phys., histor. lit. Abth. XXVII.

versehen (berandet) voraus; auf diese, nicht auf die erst in der I. Abthl. der „Theorie der Abel'schen Functionen" (Abh. 4. Art. 1) eingeführte unberandete („unbegrenzte") Fläche beziehen sich zunächst die Sätze der Dissertation.

Nachdem Riemann eine Function $w = u + iv$ von $z = x + iy$ durch die Forderung definirt hat, dass dw/dz von der Fortschreitungsrichtung dy/dx unabhängig ist, und die Fläche eingeführt hat, wendet er sich in den Artt. 7—9 zum Beweise der bekannten Cauchy'schen Sätze (vergl. II, Nr. 18) von der Verschiebung des Integrationswegs (zwischen zwei festen Punkten) über einfach auf der XY-Ebene ausgebreitete Flächenstücke, jedoch unter Ausdehnung der Sätze auch auf solche Integranden $u\,\partial x/\partial s - v\,\partial y/\partial s$ (ds das Element des Integrationsweges) die nur in einer mehrfach zusammenhängenden mehrblättrigen (mit Verzweigungspunkten versehenen) Fläche T eindeutig sind, und die zwar in einzelnen Punkten von T, nicht aber längs einer Linie unstetig werden (Artt. 12—14). Der Bereich, in welchem die Verschiebung des Integrationsweges ohne Aenderung des Integralwertes erfolgen kann, wird durch Zerschneidung von T in eine einfach zusammenhängende Fläche T′ und Einbeziehen der Unstetigkeitspunkte in das Querschnittnetz hergestellt (Art. 9, IV). Die Verschiebung des Weges im Inneren der Fläche T kann hiernach auch dann einen endlichen Zuwachs des Integralwertes zur Folge haben, wenn keine Unstetigkeiten in T auftreten. Denn im Allgemeinen hat die Ueberschreitung jedes Querschnitts durch einen Integrationsweg einen plötzlichen Zuwachs des Integrals zur Folge (das Integral wird „längs einer solchen Linie" unstetig), indessen ist dieser Zuwachs, wenn nur der Integrand im Allgemeinen in T stetig ist, zwischen zwei Knotenpunkten des Querschnittnetzes von gleicher Grösse, und der Gesammtzuwachs bei irgend einer Wegführung setzt sich somit aus höchstens sovielen von einander unabhängigen Einzelzuwächsen (Perioden) zusammen, als Querschnitte vorhanden sind. Diese Bemerkung bildet später eine der wesentlichen Grundlagen der Theorie der Integrale algebraischer Functionen.

Auch in dem Fall einer die XY-Ebene mehrfach überdeckenden Fläche T entspricht der Beziehung $w(x + iy) = u + iv$, vermöge deren w in dieser Fläche eindeutig definirt ist, wiederum eine eindeutige conforme (in den kleinsten Teilen ähnliche) Abbildung dieser Fläche auf eine die UV-Ebene überdeckende ebenso vielfach zusammenhängende Fläche wie T, wobei die Windungspunkte z′, in denen m Zweige der Function w(z) zusammenhängen, in ebensolche w′ übergehen, wo n Zweige der Function z(w) zusammenfallen, wenn für die entsprechenden Stellen:

$$\text{limes}\ \frac{(w-w')^{1/n}}{(z-z')^{1/m}}$$

eine endliche Grösse ist (Art. 15).

9. Die Artt. 16—18 der Abhandlung sind nun der Hauptaufgabe gewidmet: der Umgrenzung des Minimums von Bedingungen, durch die eine Function, die gewisse vorgegebene Unstetigkeiten in der Fläche T besitzt, eben bestimmt ist. Das wesentliche Hülfsmittel zur Lösung dieses Problems bildet die Umgestaltung des Dirichlet'schen Princips für den vorliegenden Fall: also der Nachweis einer reellen Function u(x, y) von zwei Veränderlichen, die an den Grenzen der [berandeten] Fläche T, innerhalb deren sie eindeutig und der Gleichung $\Delta^2 u = 0$ entsprechend existiren soll, gegebene Werte annimmt. Dieser Nachweis liess sich wieder wie früher (oben Nr. 3) an die Variation eines in T überall endlichen Integrals knüpfen:

Das Dirichlet'sche Princip. Bestimmung einer Function durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen.

$$\int\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right)dT.$$

Auch Unstetigkeiten, welche die Function u an gegebenen Stellen im Innern von T besitzen soll, konnten in der früher (oben Nr. 7) angegebenen Weise durch Spaltung der Function u nach dem Gauss'schen Verfahren eingeführt werden. Aber Riemann giebt der ganzen Frage, wohl mit Rücksicht auf die von vornherein in Aussicht genommene Anwendung auf algebraische Functionen und ihre längs Linien unstetigen Integrale, eine andere Wendung.

Er fasst gleich den Fall ins Auge, a) dass die Unstetigkeiten in einzelnen Punkten, welche die Function u besitzen soll, diejenigen des reellen Teils einer Function von x+iy seien, und fragt demgemäss nicht nach u selbst, sondern nach einer complexen Function u+iv des Argumentes x+iy, die jene Unstetigkeiten besitzt, und deren reeller Teil u an der Begrenzung von T vorgeschriebene Werte hat. Der Function u kann b) vorgeschrieben werden, in T auch längs Linien unstetig zu sein, so jedoch, dass $\partial u/\partial x$, $\partial u/dy$ längs derselben stetige Functionen sind. — Um die Function u+iv nicht überzubestimmen, muss man sich eben mit der Annahme eines Teiles der Eigenschaften, welche sie besitzen soll, begnügen, und Riemann bemisst diesen Teil gleich so, dass bis auf Unwesentliches alle anderen Eigenschaften daraus folgen.

Diese Forderungen vereinigt nun Riemann in der Aufgabe: Eine gegebene Grösse $\alpha+i\beta$, wo α, β Functionen von x, y sind, soll durch Zufügen einer anderen $\mu+i\nu$ zu einer Function u+iv von x+iy ergänzt

werden, welche in T dieselben Unstetigkeiten besitzt, wie $\alpha + i\beta$ (sowohl in Punkten wie längs Linien, letzteres wenigstens in der zerschnittenen Fläche T'), und deren reeller Teil u längs der Begrenzung mit α übereinstimmt. Es sind die Unstetigkeiten von $\alpha + i\beta$ sowie die von $\mu + i\nu$ zu charakterisiren, für welche diese Forderungen erfüllbar sind.

Wenn die Unstetigkeiten von $\alpha + i\beta$ in einzelnen Punkten (wie später vorausgesetzt wird) solche sind von Functionen von $x + iy$, so gelten an diesen Stellen die Beziehungen:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0.$$

Es liegt daher nahe, statt des obigen Integrals in u das folgende zu betrachten:

$$\Omega(\alpha) = \int \left[\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \right] dT,$$

welches über die Umgebung jener Stelle erstreckt einen unendlich kleinen, über T erstreckt einen *endlichen* Wert hat. Dabei sind selbst Unstetigkeiten von α, β längs Linien (namentlich also z. B. längs der später zu ziehenden Querschnitte) nicht ausgeschlossen, sofern nur die Differentialquotienten nach x, y daselbst stetig sind. Es handelt sich nun, wie früher, zunächst um die Aufsuchung der reellen Function $u = \alpha + \mu$, für welche das (durch Zufügen einer unbestimmten Function λ zu α veränderte) Integral $\Omega(\alpha + \lambda)$, wo λ jedenfalls am Rande Null ist, einen Minimalwert erhält. Indem Riemann davon ausgeht, dass ein solcher Minimalwert jedenfalls für bestimmte Functionen eintreten müsse, ein Beweisverfahren, das er in Theor. der Ab. Funct. Abh. 3 „Dirichlet'sches Princip" nennt, findet er, dass dieses Minimum (bei gegebenen Randwerten) nur für *eine* Function $\lambda = \mu$ eintritt, für welche zugleich $\Delta^2 u = \Delta^2(\alpha + \mu) = 0$ ist. Für μ ergiebt sich die weitere Bedingung, dass die Unstetigkeiten, die μ etwa besitzt, nur solche sein dürfen, für die das Flächenintegral:

$$1) \qquad \int \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} \right)^2 \right] dT$$

nicht aufhört, endlich zu sein. — [Hiermit sind z. B. logarithmische und algebraische Unstetigkeiten (in dem gewöhnlichen Sinne) von μ ausgeschlossen.] Es ist nun noch der imaginäre Bestandtheil v der gesuchten Function zu bestimmen. Wegen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

wird $v = \beta + \nu$ durch das Integral dargestellt:

$$\beta + \nu = -\int \left(\frac{\partial u}{\partial y} dx - \frac{\partial u}{\partial x} dy \right).$$

Dieses Integral ist eindeutig nur in der durch Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche T' verwandelten Fläche T: während also μ am Rande [der unzerschnittenen Fläche T] Null und im Inneren von T, bis auf Unstetigkeitspunkte, wo das über T ausgedehnte Integral 1) endlich bleibt, stetig ist, besitzt ν (ausser ebensolchen Unstetigkeitsstellen) nur noch Unstetigkeitslinien längs der Querschnitte. Mit diesen Feststellungen ist aber die Aufgabe gelöst, und sind die Functionen μ, ν (letztere bis auf eine additive Constante) vollständig und, wie sich zeigt, eindeutig bestimmt. Ist noch die Forderung a) (oben) erfüllt, so ist $\mu + i\nu$ überhaupt in T' stetig. Im Folgenden wird dies immer angenommen. Wir fügen bei, dass diese Ergebnisse für die unberandete Fläche T, die später in der Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale eine Rolle spielt, folgende Fassung erhalten:

1) Die Unstetigkeiten in einzelnen Punkten, die $\alpha + i\beta$ besitzt, sowie diejenige längs Linien, die α allein aufweist, gehen unverändert und ohne Hinzutreten neuer solcher auch in die Function von $x + iy$: $u + iv$ ein.

2) Die Unstetigkeiten in Linien dagegen, die der imaginäre Teil β längs derjenigen Querschnitte etwa besitzt, welche die Fläche in eine einfach zusammenhängende zerlegen, erfahren für v im Allgemeinen eine Aenderung.

Für eine Function $u + iv$ also, die, wie die algebraische und ihre Integrale, 1) in jener unberandeten Fläche nur logarithmische und algebraische Unstetigkeiten in Punkten und 2) constante Zuwächse beim Ueberschreiten von Linien (Dissert. Art. 9, V), ausser soweit sie von den logarithmischen Unendlichkeitsstellen herrühren, nur längs derjenigen (2p) Querschnitte besitzt, welche die Fläche in eine einfach zusammenhängende zerlegen, sind willkürlich annehmbar nur:

1) jene Unstetigkeitspunkte und das Verhalten der gesuchten Function in denselben,

2) die reellen Teile der 2p Periodicitätsmoduln (jener constanten Zuwächse an den Querschnitten). Hierdurch ist die Function bis auf eine additive Constante völlig bestimmt (Theorie der Ab. Funct. Abh. 4, Art. 3).

Bezüglich der logarithmischen Unstetigkeitsstellen liefert die Forderung, dass die Function im Inneren der in eine einfach zusammenhängende T' zerschnittenen Fläche T stetig sei, dass sie also bei Umkreisen des Berandung der Fläche T' auf den Anfangswert zurückkommt, noch die Bedingung, dass die Summe der Cauchy'schen Residuen für sie gleich

Null sei. Diese Ergebnisse vermitteln den Uebergang von Riemann's Dissertation zu seiner Abhandlung über Abel'sche Functionen.

Die letzten beiden Artikel der Dissertation, die sich auf complexe Functionen beziehen, deren Bestimmung von einer willkürlich gegebenen Grenzfunction abhängt, also auf die Abbildung einer Fläche auf eine andere von gegebener Begrenzungscurve — lassen wir hier unbesprochen, weil sie aus dem Gebiet der algebraischen Functionen hinausführen, für welche an die Stelle jener willkürlichen Function nur eine endliche Anzahl von Parametern tritt. Wir bemerken nur, dass an diese Artikel neuere Untersuchungen von Schottky (Dissertation, 1881, und eine Arbeit in Bd. 83 des Journ. f. M.) sowie von Klein (Ueber Riemann's Theorie der algebr. Funct. und ihrer Integrale, Leipz. 1882) anknüpfen, über die Klein selbst in seinen Vorlesungen über Riemann'sche Flächen (s. Rf. Vorrede) Bericht erstattet hat.

Zielpunkte der Dissertation. Bedenken gegen die angewandten Methoden.

10. Indem Riemann sich in seiner Dissertation das Ziel setzt, eine Gruppe von Bedingungen aufzustellen, von welchen als notwendigen und hinreichenden die Existenz einer Function von $x+iy$ abhängig gemacht werden kann, hat er, wie in Art. 21 gesagt wird, zwar zunächst die Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale im Auge gehabt, wenn gleich er in der Dissertation selbst hierauf nicht näher eingeht. Aber er wünscht ein viel weiteres Ziel damit zu erreichen, das er selbst mit folgenden Worten kennzeichnet:

„Die bisherigen Methoden, diese [die algebraischen und ihre Integral-] Functionen zu behandeln, legten stets als Definition einen Ausdruck der Function zu Grunde, wodurch ihr Wert für jeden Wert ihres Arguments gegeben wurde; durch unsere Untersuchung ist gezeigt, dass — — in einer Definition dieser Art ein Teil der Bestimmungsstücke eine Folge der Uebrigen ist, und zwar ist der Umfang der Bestimmungsstücke auf die zur Bestimmung notwendigen zurückgeführt worden." — — „Eine Theorie dieser Functionen auf den hier gelieferten Grundlagen würde die Gestaltung der Function — — unabhängig von einer Bestimmungsweise derselben durch Grössenoperationen festlegen" — — „der gemeinsame Charakter einer Gattung von Functionen, welche auf ähnliche Art durch Grössenoperationen ausgedrückt werden, stellt sich dann dar in der Form der ihnen auferlegten Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen".

Dieses Ziel spricht von einem Umfange des Gesichtskreises, die Hülfsmittel, die Riemann flüssig macht, auch wenn man nur an die mit den algebraischen Functionen zusammenhängenden Probleme denkt, von

einem Reichtum an Gedanken, wie sie in der Geschichte unserer Theorie in einer einzelnen Abhandlung vereinigt sich nicht wieder finden. Aber das Ziel war zu hoch gesteckt, die Grundlagen für den Aufbau nicht genug gesichert. Die Verwendung des Dirichlet'schen Princips in der von Riemann gewollten Allgemeinheit unterliegt, wie man heute erkannt hat, erheblichen Bedenken, die sich namentlich gegen die Operation mit Functionen von der unbestimmten Definition der Riemann'schen richten. In solcher Allgemeinheit lässt der Functionsbegriff, unfassbar und sich verflüchtigend, controlirbare Schlüsse nicht mehr zu. Um den Gültigkeitsbereich der aufgestellten Sätze genau zu umgrenzen, hat man neuerdings den von Riemann betretenen Weg ganz verlassen. H. A. Schwarz (Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta^2 u = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen, Monatsber. Berl. Ac. 1870) und C. Neumann (Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential, Leipzig 1877)*) haben an der Hand strenger, wenn auch weitläufiger Methoden die näheren Umstände in Bezug auf Begrenzungscurven der Fläche, Unstetigkeiten der Function u. s. w. festgestellt, unter denen sich der durch das Dirichlet'sche Princip beabsichtigte Existenzbeweis wirklich führen lässt. Dabei hat sich allerdings herausgestellt, dass die Folgerungen, die Riemann speciell für seine Theorie der Abel'schen Functionen gezogen hatte, noch in vollem Umfange richtig sind.

Wir durften deshalb jedoch über Riemann's eigenartige Beweisführung nicht kurz hinweggehen. Denn sie hat den Vorzug der Kürze und verhältnismässiger Einfachheit des Gedankengangs; sie steht in organischem Zusammenhang mit den Problemen der mathematischen Physik, aus denen das Princip entsprungen ist; gewissermassen der Natur nachgebildet erfährt Riemann's Methode vielleicht in modificirter Fassung einmal eine Wiederbelebung.

C. **Riemann's Abhandlung über die Theorie der Abel'schen Functionen** [1857].

11. Von der durch die Dissertation geschaffenen Grundlage aus, die, wie Riemann selbst bemerkt (Diss. Art. 21 und Ab. Funct. Ein-

Die zur „Theorie der Abel'schen Functionen" einleitenden Noten.

*) Weitere Angaben s. in M. Bacharach's Geschichte der Potentialtheorie, Göttingen 1883, § 9: eine zusammenhängende Darstellung der Untersuchungen in Pockels' Werk über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ u. s. w., Leipz. 1891, IV. Theil.

leitung zu Abh. 4), eben mit Rücksicht auf die algebraischen Functionen und solche, deren Differentialquotient eine algebraische Function ist, verfasst worden war, liess sich nun der Uebergang zu diesen selbst leicht bewerkstelligen. Dies geschieht in einem Cyclus von vier Abhandlungen, drei kurzen einleitenden und einer ausführenden, in denen das Problem der Umkehrung der Abel'schen Integrale zum ersten Mal allgemein formulirt ist, und alle Hülfsmittel für die Lösung entwickelt werden. In ihrer knappen Darstellungsform, ihrer Gedankenfülle und ihrer Tiefe war diese Arbeit für die mathematische Welt eine Zeit lang ein Buch mit sieben Siegeln, bis Schüler und Verehrer des Autors, darunter vor Allen Roch in einer Reihe von später zu besprechenden Aufsätzen, Prym in Abhandlungen, die vorzugsweise die transcendenten Fäden aufnahmen, K. Neumann in seiner Schrift „Das Dirichlet'sche Princip" (Leipzig 1865), in einführenden Werken derselbe Autor, Durège u. A., der Aufgabe sich unterzogen, die neuen und grundlegenden Gedanken der nur einige fünfzig Seiten langen Abhandlung Riemann's zum Gemeingut der Mathematiker und damit zugleich zu einem vielumworbenen Object weiterer Forschung zu machen.

Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen. Journal f. r. und angew. Mathematik, Bd. 54, 1857. Ges. math. Werke, herausgeg. von H. Weber, erste Aufl. 1876, VI, S. 81—135.

(1) Allgemeine Voraussetzungen und Hülfsmittel für die Untersuchung von Functionen unbeschränkt veränderlicher Grössen.
(2) Lehrsätze aus der analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständigen Differentialien.
(3) Bestimmung einer Function einer veränderlichen complexen Grösse durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen.
(4) Theorie der Abel'schen Functionen (zwei Abteilungen).

Die einleitenden Abhandlungen (1) bis (3) geben den Inhalt der Dissertation wieder, soweit sie auf den Gegenstand Bezug hat. Gleich in (1) bezeichnet Riemann scharf den neuen Ausgangspunkt seiner Functionentheorie. Während noch Cauchy von der Vorstellung sich nicht befreien konnte, dass die Function w von $z = x + iy$ nur an solchen Stellen definirt ist, wo man ihre Darstellung kennt, knüpft Riemann an die Voraussetzung an, dass die Function in einem (wenn auch noch so kleinen) endlichen Bereiche der imaginären Ebene gegeben sei, aus welchem heraus man sich dann die Darstellung vermöge der Gleichung:

$$i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$$

streifenweise in das unbekannte Gebiet fortgesetzt denken mag. Diese

Fortsetzung auf verschiedenen Wegen zu derselben Endstelle in der imaginären Ebene führt zum Begriffe der mehrwertigen Function, ferner zu dem des „Verzweigungspunktes“ und damit, wie dies früher (II, Nr. 34, IV, Nr. 8) ausgeführt worden ist, zur Vorstellung jener „Riemann'schen“ Fläche, welche für die eindeutige Repräsentation einer mehrwertigen Function, namentlich der algebraischen, ein so bequemes Anschauungsmittel abgiebt.

Die Note (2) führt Integrale von Functionen ein, die in jener Fläche eindeutig gegeben sind. Indem man auch diese von einem Ausgangspunkt in der Fläche auf verschiedenen Wegen zu demselben Endpunkt führt, gelangt man zu dem Begriffe des „Zusammenhangs“ der Fläche und dem der „Querschnitte“ einer mehrfach zusammenhängenden Fläche. Die Zahl der möglichen Querschnitte, die diese letztere nicht zum Zerfallen bringen, bestimmt die Ordnung des Zusammenhangs. Die Untersuchung knüpft zwar zunächst an die berandete Fläche an: die nichtberandete, wie sie in der Theorie der Abel'schen Integrale die Hauptrolle spielt, wird durch Herausheben eines Punktes in eine berandete umgewandelt.

Nachdem in (1), (2) festgestellt ist, dass eine in einem endlichen (etwa längs einer Linie gegebenen) Bereiche definirte Function fortgesetzt werden kann, wird in (3) die Aufgabe behandelt, die für die Definition einer Function von $x+iy$ erforderlichen Elemente auf ein Minimum von unabhängig annehmbaren herabzudrücken. Dieses Problem wird gelöst durch das (oben Nr. 9 ausführlich erörterte) Dirichlet'sche Princip, wonach eine Function von $x+iy$ in einer berandeten, auch mehrfach zusammenhängenden Fläche T völlig und eindeutig bestimmt ist, wenn man erstens den Wert des reellen Teils in jedem Punkte des Randes, zweitens die Lage und Art ihrer Punkt-Unstetigkeiten, drittens die Unstetigkeiten der gewünschten Function längs beliebiger Linien im Inneren angenommen hat: letzteres indessen mit der Einschränkung, dass man längs der Querschnitte von T nur über die reellen Teile der constanten Zuwächse noch willkürlich verfügt.

Die in der Fläche einwertigen Functionen und ihre Integrale. Verschiedene Bedeutung der Geschlechtszahl p.

12. In der ersten Abteilung der Hauptabhandlung (4) wird nun zunächst dieses Ergebnis auf die nicht berandeten Flächen vom Zusammenhange $2p+1$ angewendet, welche die Verzweigungsart einer algebraischen Function s von z darstellt, die mit z durch die Gleichung $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$ verbunden ist, wo F eine in s bis zum nten, in z bis zum mten Grad ansteigende ganze Function ist. Wie man vermöge derselben die Verzweigungsstellen der Fläche, die über die Z-Ebene in n Blättern allent-

halben ausgebreitet ist, ermittelt, mag hier unerörtet bleiben. Die Gestalt der Fläche ist indessen durch die Lage und Art ihrer Verzweigungsstellen keineswegs bestimmt, und Riemann giebt nicht an, wie man zu einer Vorstellung von derselben gelangt. Nicht nur ist der Uebergang von der Discriminante zu Gleichungen $F = 0$, auch bei gegebener Blätterzahl n, noch ein vieldeutiger (s. etwa Hurwitz, Ueber Riemann'sche Flächen etc. Math. Ann. 39); selbst wenn die Gleichung $F = 0$ und also die Structur der Cyklen in den einzelnen Verzweigungspunkten bereits feststeht, lassen sich, wie früher (Rf. II Nr. 34) erwähnt, die „Verzweigungsschnitte" (Linien, die zwei Verzweigungspunkte mit einander verbinden, und längs deren zwei oder mehrere Blätter sich durchsetzen) noch auf mannigfache Weise anordnen (Lüroth, Note über Verzweigungsschnitte etc. Math. Ann. IV, 1871, Clebsch u. s. w. s. unten Rf. V, Nr. 46) und somit Flächen von verschiedener Gestalt erzielen.

Wie dem auch sei, Riemann nimmt an, es sei eine n-blättrige Fläche von bekannter Gestalt über der Gauss'schen Ebene ausgebreitet, ohne jedoch eine auf sie führende Gleichung $F(s, z) = 0$ vorauszusetzen. Er denkt sich jene Ebene (vgl. K. Neumann, Vorles. über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale, Leipz. 1865, Vorrede) zu einer Kugel geschlossen, so dass den unendlich grossen Werten von x und y nur ein Punkt entspricht. Dann werden sich auch die n Blätter der Fläche, die diese Ebene allenthalben überdecken, schliessen, und es entsteht die unberandete im Allgemeinen mehrfach ($(2p+1)$-fach) zusammenhängende Fläche T mit gegebenen Verzweigungspunkten, -schnitten u. s. w. T sei durch 2p Querschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche T' zerschnitten. Riemann betrachtet nun 1) Eine eindeutige Function s der Fläche T ohne wesentliche Unstetigkeiten, eine solche also, die nur „Pole" (Rf. II, No. 17) hat. 2) Eine Function, die nicht in T, wohl aber in der zerschnittenen Fläche T' eindeutig und längs der Querschnitte unstetig ist; und zwar soll sie auf der einen Seite eines Querschnitts (ν) um eine (complexe) Constante h_ν grösser sein, als auf der anderen. Ausserdem werden auch für diese Function Pole zugelassen und solche Unstetigkeitsstellen, wo sie logarithmisch unendlich wird. Es handelt sich in den Artt. 2—5 um den Nachweis, dass die Functionen 1) algebraische Functionen von z sind; diejenigen 2) Integrale solcher Functionen.

Dem Dirichlet'schen Princip sind zunächst nur die durch 2) definirten Functionen zugänglich. Für diese ergiebt sich aber sogleich, dass sie a) durch die Annahme der reellen Theile jener 2p Constanten

h_ν; b) durch ihre Unstetigkeitsstellen und die Art ihres Verhaltens in denselben (mit einer gewissen Einschränkung hinsichtlich der Residuen in den logarithmischen Unstetigkeitspunkten) — bis auf eine additive Constante — völlig bestimmt sind, u. A. auch hinsichtlich des imaginären Teils ihrer „Periodicitätsmoduln" h_ν. Die Functionen 2) lassen sich nach diesem Verhalten in drei Gattungen einteilen: I. solche w, die überhaupt nicht, II. solche $t(\varepsilon)$, die in einem Punkte ε algebraisch unendlich werden wie $1/(z-\varepsilon)$, III. solche $\varpi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, die in zwei Punkten $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ logarithmisch unendlich werden; also die späteren Integrale erster, zweiter, dritter Gattung. Functionen, die in ε eine höhere Unstetigkeitsstelle besitzen, lassen sich aus denen II. durch einen Grenzprocess gewinnen.

Die willkürlich annehmbaren 2p reellen Teile der Zuwächse h_ν an den Querschnitten (der „Periodicitätsmoduln") lassen sich nun aber durch p complexe Constante ersetzen, indem die allgemeine Function w, die zu einer vorliegenden Fläche T' gehört, sich aus p speciellen solchen mit jenen p willkürlichen Constanten multiplicirten und einer additiven Constanten linear zusammensetzen lässt. Mit dieser Bemerkung ist die fundamentale Beziehung zwischen dem Flächenzusammenhang $2p+1$, bezw. der Periodenzahl $2p$, und zwischen der Zahl der linear unabhängigen Grössen w (Integrale erster Gattung) andererseits gewonnen. — Die Grösse p bezeichnen wir, nach dem Vorgehen von Clebsch, als „Geschlecht" der Fläche T und der zugehörigen eindeutigen Functionen.

Die Transcendenten t und ϖ lassen sich je durch eine specielle ihrer Gattung, welche die gegebene Unstetigkeitsbedingung erfüllt, vermehrt um eine lineare Function von p Transcendenten w, ersetzen, und ein einfacher Schluss ergiebt sogleich die weitere wichtige Beziehung, dass die Function $t(\varepsilon_1)$ durch Differentiation von $\varpi(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ nach ε_1 erhalten werden kann (Art. 4).

13. Die Functionen $t(\varepsilon)$ sind es nun, die den Uebergang zu den in der Fläche T eindeutigen Functionen (1) mit gegebenen m Polen vermitteln (Art. 5). Wenn man nämlich aus m Functionen t, die je in einem dieser Pole ε von der ersten Ordnung (d. h. wie $1/(z-\varepsilon_i)$) unstetig werden, und aus p linear unabhängigen Functionen w einen linearen Ausdruck σ bildet, so lassen sich, wenn $m > p$ ist, die eingehenden $m+p+1$ linearen Coefficienten (eine additive Constante eingerechnet) immer so bestimmen, dass die Zuwächse an den 2p Querschnitten für diese Summe σ gleich Null, σ also eine in der unzerschnittenen Fläche T eindeutige Function wird. Da aber eine in der Fläche einwertige

Transcendente Darstellung der in der Fläche einwertigen Functionen.

Function eine n-wertige von z ist, so muss σ einer algebraischen Gleichung nten Grades genügen, deren Coefficienten ganze Functionen mten Grades von z sind: $\overset{n\ m}{F(\sigma, z)} = 0$, wo dann F entweder irreductibel oder die Potenz einer irreductibeln ganzen Function ist; σ ist eine algebraische Function von z. Auch in dem Falle, dass $m < p + 1$ ist (im Allgemeinen herab bis zu $m \geqq \frac{1}{2}(p+1)$), lassen sich noch die Periodicitätsmoduln des linearen Ausdrucks zu Null machen, wenn man nur die Unstetigkeitsstellen ε der benutzten Transcendenten $t(\varepsilon)$ passend wählt (einige bleiben immer noch beliebig annehmbar).

Diese Darstellung einer algebraischen Function durch eine Summe von Transcendenten gehört zu den markantesten Zügen der Riemann'schen Theorie; sie kehrt die bis dahin übliche Rangordnung zwischen einfach und complicirt geradezu um, weil sie bei Riemann zur Definition der (wie gleich nachher Art. 8 gezeigt wird) in s, z rational darstellbaren Functionen verwendet wird. Mit ihrer Hülfe bestimmt sich weiter unmittelbar die Anzahl der in einer solchen Function (ausser den m Unstetigkeitspunkten) noch enthaltenen linear eingehenden willkürlichen Constanten gleich $m+p+1-2p = m-p+1$, und damit ist eine der wichtigsten Fragen der Theorie der algebraischen Functionen, und zwar von der transcendenten Seite her, beantwortet. Es ist übrigens zu bemerken, dass, wenn die m Unendlichkeitsstellen in einem gewissen Abhängigkeitsverhältnis zu einander stehen, die Verteilung der Gesamtzahl $2m-p+1$ der Constanten der algebraischen Function auf die Unendlichkeitswerte und die Werte der linearen Constanten eine Modification erfährt, die später Roch (s. unten Nr. 21) angegeben hat.

Wenn ω eine Function ist, die einer der oben erwähnten drei Gattungen von Transcendenten angehört, die also an den Querschnitten um constante Grössen zunimmt, so ist insbesondere die Grösse $d\omega/dz$, weil sie diese Eigenschaft nicht mehr besitzt, eine algebraische Function. Hiermit ist denn auch a posteriori der Beweis geführt, dass jene Transcendenten w, t, ϖ wirklich Integrale algebraischer Functionen sind, ferner ist die Existenz und namentlich die Darstellbarkeit von überall endlichen Integralen w nachgewiesen.

Es handelt sich nun vor Allem um die wirkliche Bildung eines Integranden erster Gattung dw/dz in s und z.

Algebraische Darstellung der in der Fläche einwertigen Functionen.

14. Jede in der Fläche eindeutig verlaufende Function σ, die für eine gewisse Anzahl von Punkten algebraisch unendlich wird, und die nach Früherem durch eine Summe von Integralen erster und zweiter

„Adjungirtes" Verhalten von Zähler und Nenner.

Gattung darstellbar ist, lässt sich andererseits, wenn man eine solche Function s mit irgend einer Anzahl von Polen als bekannt zu Grunde legt, in der Form eines Quotienten von zwei ganzen Functionen von gleichhoher Ordnung in s und $z : \sigma = \overset{\nu\ u}{\psi}(s, z)/\overset{\nu\ \mu}{\chi}(s, z)$ darstellen. Riemann zeigt dies (Art. 8) durch directe Abzählung der in diesem Ausdruck enthaltenen Constanten, indem er die Zahl der verfügbaren Constanten des Quotienten dadurch zu einer möglichst grossen macht, dass er den Functionen ψ und χ ein — nach heutiger Ausdrucksweise — „adjungirtes" Verhalten in den singulären Stellen des Gebildes $\overset{n\ m}{F}(s, z) = 0$ auferlegt. Damit nämlich an einer Stelle, wo zugleich $F'(s) = 0$ und $F'(z) = 0$ ist, ohne dass alle zweiten Differentialquotienten von F verschwinden, also in Doppelpunkten der Curve $F(s, z) = 0$ (Selbstberührung übrigens ausgeschlossen), der Quotient σ in den beiden Blättern, denen die gleichen Wertepaare s, z angehören, verschiedene Werte annehmen könne, muss sowohl ψ wie χ daselbst verschwinden [die Curven $\psi = 0$, $\chi = 0$ müssen durch jenen Doppelpunkt von $F = 0$ hindurchgehen]. Man kann eine solche Stelle als aus zwei zusammen gerückten, sich aufhebenden Verzweigungspunkten bestehend ansehen, weil die Discriminante, d. h. die Resultante aus $F = 0$ und $F'(s) = 0$ (vom Grade $2m(n-1)$ in z), aus der sich die Verzweigungspunkte bestimmen, den dieser Stelle entsprechenden Factor doppelt enthält, so dass, wenn r solche Stellen überhaupt auftreten, für die eigentlichen Verzweigungen W nur noch die Zahl:

$$W = 2m(n-1) - 2r$$

übrig bleibt, sofern höhere Singularitäten in $F(s, z) = 0$, d. h. Stellen, wo ausser $F'(s)$ und $F'(z)$ noch höhere partielle Differentialquotienten von F oder gewisse Combinationen derselben verschwinden, nicht auftreten, eine Annahme, die Riemann der Einfachheit wegen macht.

Wie sich diese Formel modificirt, wenn man beliebige Singularitäten zulässt, hat Riemann nicht weiter erörtert. Wir werden unten (Abschn. VI) hiervon zu reden haben, und heben nur schon jetzt hervor, dass dann auch das adjungirte Verhalten der Functionen ψ, χ sich modificirt, wie man entweder durch successives Transformiren, oder — indirect — durch das Studium des Zählers des Integranden erster Gattung findet.

Der Integrand erster Gattung und die Function φ.

15. Eine in der ganzen Fläche eindeutige Function ist nach Nr. 13 der Integrand dw/dz des allenthalben endlichen Integrals. Er ist somit durch den Quotienten von zwei adjungirten ganzen Functionen in s, z darstellbar, und hat, wie man leicht sieht, noch folgende Bedingungen zu erfüllen:

1) für jeden einfachen Verzweigungspunkt höchstens ∞^1 zu werden 2) für $z = \infty$ mindestens 0^2 zu werden. Diesen Bedingungen genügt aber ein Quotient von der Form:

$$\frac{\overset{n-2\ m-2}{\varphi(s,\ z)}}{F'(s)},$$

wofern die ganze Function φ (ebenso wie dies beim Nenner der Fall ist) in den singulären Stellen von $F(s, z) = 0$ sich adjungirt verhält. Eine leichte Abzählung, die allerdings einer genaueren Begründung noch bedarf, lässt erkennen, dass die Function φ alsdann noch $(m-1)(n-1)-r$ willkürliche Constanten besitzt, die linear und homogen eingehen. Diese Zahl muss gleich der Anzahl der linear unabhängigen Integranden erster Gattung, also gleich p sein (s. oben Nr. 12). Den directen Nachweis hierfür erbringt Riemann dadurch, dass er die der Analysis situs angehörige sehr merkwürdige Beziehung:

$$W = 2n + 2p - 2$$

zwischen der Zahl W der Verzweigungspunkte und derjenigen $2p$ der Querschnitte einer n-blättrigen Fläche beweist, was durch Abzählen der Umdrehungen geschieht, die das Durchlaufen des Querschnittssystems der Fläche erfordert (Art. 7).

Mit jener ganzen Function φ, die im Zähler eines allenthalben endlichen Integrals erster Gattung steht, — wir bezeichnen sie in der Folge kurzweg als φ-Function, in welcher Gestalt (vgl. Ref. V Nrn. 27, 42) sie auch, verschieden je nach der zu Grunde gelegten Gleichung $F(s, z) = 0$, erscheinen mag, die durch die Gleichung $\varphi = 0$ dargestellte Curve als φ-Curve — war diejenige Bildung gewonnen, die man wohl als den Kernpunkt der ganzen Theorie der Abel'schen Functionen bezeichnen darf. Denn sie erst ermöglicht die Formulirung des Umkehrproblems, den Beweis der Convergenzeigenschaft und die Berechnung der Nullpunkte der Thetareihe, sie ist die wesentliche Grundlage für eine vom Transcendenten abgelöste Theorie der algebraischen Functionen, wie wir in der Folge sehen werden.

Eindeutige Transformirbarkeit der Gleichungen einer Klasse in einander. Die Moduln.

16. Einen weiteren Begriff von eminenter Tragweite entwickeln gleich die folgenden Artikel (11, 12), die von der Transformation einer Gleichung durch rationale Substitutionen handeln. Wie zwischen s und z, zwischen z und der rationalen Function σ von s und z, so besteht überhaupt zwischen je zwei rationalen Functionen σ und ζ von s und z eine algebraische Gleichung, die man durch Elimination von s und z aus diesen und $F(s,z) = 0$, also durch „rationale Substitution“ aus $F(s,z) = 0$ erhält.

Alle irreductibeln Gleichungen zwischen Functionen, die in der Fläche T eindeutig verlaufen, oder die „wie T verzweigt sind", rechnet Riemann (Art. 12) zu einer Klasse von Gleichungen, und alle algebraischen Functionen, die einer der Gleichungen einer Klasse genügen, zu derselben Klasse von algebraischen Functionen. Im Anschluss an die oben (Nr. 12) eingeführte Bezeichnung können wir zufügen: alle Gleichungen einer Klasse besitzen dasselbe Geschlecht.

Aber nicht umgekehrt gehören alle Gleichungen von demselben Geschlecht p zu einer Klasse. Vielmehr kann eine Riemann'sche Fläche vom Zusammenhang $2p+1$ und der Blätterzahl μ, je nach der Lage, die man ihren Verzweigungspunkten giebt, noch ganz verschiedenen Klassen von Gleichungen entsprechen (selbst nachdem diese Punkte festgelegt sind, noch einer endlichen Anzahl von Klassen). Es ist die Frage, wie viele Verzweigungspunkte, bei gegebenen Zahlen p, μ, die Klasse endlich vieldeutig charakterisiren? Alle $2\mu+2p-2$ Verzweigungspunkte der Fläche (s. oben Nr. 15) jedenfalls nicht. Denn man kann, ohne die Functionsklasse zu ändern, von diesen offenbar noch soviele willkürlich annehmen, als eine Function mit μ Null- (oder Unendlichkeits-) Punkten in der gegebenen Fläche T noch willkürliche Constanten besitzt. Die Zahl dieser ist aber (s. oben Nr. 13) gleich $\mu+(\mu-p+1)=2\mu-p+1$ (die übrigens für den vorliegenden Zweck nur dann sämmtlich verfügbar sind, wenn $p>1$ ist, überhaupt wenn unendlich viele eindeutige Transformationen des Gebildes in sich ausgeschlossen sind (vgl. Rf. VII, Nr. 5)). Diese Verzweigungspunkte sind also für die Klasse nicht charakteristisch: für die, welche diese Eigenschaft besitzen, bleiben noch $(p>1)$:

$$2\mu+2p-2-(2\mu-p+1)=3p-3$$

Constanten übrig.

Diese Zahl ist allerdings nur eine obere Grenze für die Zahl der „Moduln", d. h. der wesentlichen, durch eindeutige Transformation nicht zerstörbaren Constanten einer Klasse, und Riemann, in der Empfindung, dass eigentlich eine algebraische Untersuchung der Modulnfrage erforderlich wäre, verfehlt nicht auf die Schwierigkeiten dieser Aufgabe hinzuweisen, die denn auch erst später gelöst worden ist.

Er selbst fügt zur Ausfüllung der Beweislücke, welche die obige allerdings höchst elegante Abzählung noch offen lässt, noch eine auf transcendenter Grundlage beruhende Bestätigung der Zahl $3p-3$ bei, die wir aber hier übergehen.

Eine andere Verification der gewonnenen Zahl $3p-3$ gewährt die Abzählung der Constanten, die in gewissen kanonischen Gleichungs-

formen, nämlich in den Gleichungen möglichst niedrigen Grades in s und z, $F(\overset{\mu}{s}, \overset{\mu}{z}) = 0$, enthalten sind, in welche, als Repräsentanten einer Klasse mit allgemeinen Moduln, Riemann die allgemeine Gleichungsform $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$ in Art. 13 durch eindeutige (rationale) Transformation überführt. Er bewerkstelligt dies mittelst Transformationsfunctionen, die in möglichst wenigen Punkten null und unendlich werden. — Riemann selbst weist auf diese Verification nicht hin, vielleicht deshalb nicht, weil die Existenz dieser Functionen durch die Abzählung des Art. 5 allein nicht als ausreichend festgestellt anzusehen ist.

Die Begriffe „Klasse" und „rationale Transformation", die hiermit Riemann begründet, gehören zu den bedeutendsten Errungenschaften der neueren Mathematik überhaupt. Wie jede Transformation, so bietet auch die rationale eine Handhabe, um aus der grossen, verwirrenden Anzahl von Eigenschaften eines Gebildes solche beiseite zu schieben, die dem Individuum als solchem anhaften, und diejenigen hervorzuheben, die es mit anderen verwandten gemeinschaftlich hat und mit diesen zu einem „Körper" vereinigt; sie bahnt so den Weg zu einem systematischen Aufbau und zu Gesichtspunkten für eine naturgemässe Klassification. Auch gegenüber der rationalen Substitution giebt es „invariante" Eigenschaften einer Function, die sich nicht ändern, wenn man sie, bezw. die Gleichung, der sie genügt, transformirt. Zu diesen gehört vor Allem das eben besprochene System ihrer „Moduln", die Zahl p — das „Geschlecht" — und einige andere, die sich erst im Verlaufe späterer Untersuchungen ergeben haben. Diese tiefer liegenden Eigenschaften des grossen Gebietes von Functionen, welches die rationale Transformation umfasst, stellen sie an Wichtigkeit der linearen Verwandtschaft unmittelbar an die Seite. Es ist ein Zeichen der Gemeinsamkeit der Ziele aller mathematischen Forschung, dass sich mit dem Bemühen Riemann's um die Invarianten einer Klasse von algebraischen Gleichungen fast gleichzeitig die Theorie der Invarianten bei linearer Substitution in Verbindung mit derjenigen der projectiven Verwandtschaft geometrischer Figuren zur „modernen Algebra" entwickelt hat. — Die consequente Durchführung des Invarianten-Begriffs auch in der Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale war freilich Späteren vorbehalten, wie unten ausgeführt werden wird (Absch. V und bes. Absch. VIII).

Quotienten von φ-Functionen. Das Abel'sche Theorem.

17. Entsprechend der ausgezeichneten Bedeutung, die unter den ganzen Functionen von s, z der Zähler $\varphi(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z})$ des überall endlichen Integrals besitzt, zeigt auch der Quotient φ_1/φ_2 zweier solcher Formen φ ein besonderes Verhalten. Er lässt sich nämlich (Art. 16) verwenden

zur Darstellung einer Function, die in weniger als $p+1$ Punkten der Fläche unendlich wird, und der im Folgenden eine wichtige Rolle zufällt. Das Abel'sche Theorem beweist nämlich Riemann, indem er die m oberen Grenzen der Integrale, deren Summe betrachtet wird, als die Unendlichkeitspunkte einer algebraischen Function ζ auffasst. Dann ergiebt sich der Satz — hier zum ersten Mal allgemein formulirt —, dass für allenthalben endliche Integrale (Int. erster Gattung) die Integralsumme gleich einer Constanten ist. Solcher Summen giebt es soviele, als es Integrale erster Gattung giebt, also p; die unteren Grenzen derselben dienen zur Bestimmung der Function ζ, die sich als Quotient zweier ganzen Functionen ψ, χ, welche beide sich „adjungirt" verhalten (s. oben No. 14), unter Umständen zweier Functionen φ (letzteres jedenfalls, wenn $m < p+1$) darstellen lässt. Durch die gemeinsamen Wertepaare der Gleichungen $F(s, z) = 0$ und $\chi . \zeta - \psi = 0$ (bezw. $\varphi_2 \zeta - \varphi_1 = 0$), die zugleich mit ζ sich ändern, sind, wenn man einen Wert von ζ annimmt, die oberen Grenzen der Integrale der Summe bestimmt. Im Falle $m = p+1$, und wenn die Function nicht in der Form φ_1/φ_2 darstellbar ist, [eine Beschränkung, die erst aus späteren Untersuchungen von Riemann und Roch Journ. f. M. Bde. 64, 65 (s. unten D) folgt] kann man statt von dem Werte von ζ diese Bestimmung auch von der Annahme eines der oberen Grenzwertpaare abhängig machen. Für den Fall $m = p+1$ kehrt überhaupt Riemann die Fragestellung um, indem er das System der Differentialgleichungen:

$$\sum_{1}^{p+1} dw_{\pi}^{(\mu)} = 0 \quad (\text{wo } \pi = 1, 2, \ldots, p)$$

zu integriren verlangt. Eine algebraische Function $1/\zeta$ lässt sich dann so bestimmen, dass sie für die gegebenen beliebigen Anfangswerte der $p+1$ Integrale unendlich wird; da sie dann noch zwei willkürliche Constanten in homogener Form enthält, so ist ζ selbst durch jenes eine obere Grenzenpaar bis auf einen Factor vollkommen bestimmt und hiermit die Integration allgemein ausgeführt. Für besondere Lagen der Anfangswerte kann es eintreten, dass von den Endwertepaaren eines oder einige mit Anfangswerten übereinstimmen. $1/\zeta$ wird dann für weniger als $p+1$ Punkte unendlich, und die Function ζ muss sich algebraisch als Quotient von zwei φ-Functionen darstellen lassen; von den Differentialgleichungen ist dann eine oder sind mehrere eine Folge der übrigen. Eine solche Function $\zeta = \varphi_2/\varphi_1$ integrirt insbesondere das Gleichungssystem:

$$\sum_1^p dw_\pi^{(\mu)} = 0, \quad (\pi = 1, 2, \ldots, p),$$

d. h. die oberen Grenzen bestimmen sich dann als diejenigen p gemeinsamen Wertepaare von $F(s, z) = 0$ und $\varphi_1 \zeta - \varphi_2 = 0$, welche mit ζ sich ändern [geometrisch ausgedrückt: als die Schnittpunkte der Curve $F = 0$ und des Curvenbüschels $\varphi_1 \zeta - \varphi_2 = 0$, wo die Curven $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, die sich adjungirt verhalten, ausserdem noch $p-2$ Punkte auf $F = 0$ gemeinsam haben]. Die Wichtigkeit dieses Falls, dass eine φ-Curve als bewegliche Schnittcurve auftritt, welcher Fall Abel entgangen war, zeigt sich in der Theorie der Thetafunction. Insbesondere bemerkt Riemann noch den für die zweite Abteilung vorbereitenden Satz (der aus dem vorigen folgt), dass die Aufgabe, $p-1$ von den $2p-2$ Grössenpaaren, welche durch die p Gleichungen verknüpft sind:

$$\sum_1^{2p-2} dw_\pi^{(\mu)} = 0,$$

als Functionen der $p-1$ übrigen zu bestimmen, allgemein durch die $2p-2$ Verschwindungswerte gelöst wird, die eine beliebige φ-Function mit $F(s, z)$ gemeinsam hat (vergl. auch hiermit unten D).

Die Thetafunction und ihre Argumente.

18. Die zweite Abteilung der „Theorie der Abel'schen Functionen" beginnt ohne Weiteres mit der Einführung einer gewissen transcendenten Function, die sich auf den niederen Stufen des Umkehrproblems bereits als das souveräne und unentbehrliche Hülfsmittel erwiesen hatte: mit der in p Argumenten geschriebenen, aber bei Riemann wesentlich nur von einer Stelle s, z der Fläche abhängigen Function Θ. Jacobi und Weierstrass hatten als Argumente derselben p Summen von je p Integralen erster Gattung eingeführt, aus Gründen, die oben (III, Nr. 26) auseinandergesetzt wurden. Aber gegenüber dem Einwand, den Jacobi in Bezug auf die Existenz mehrfach periodischer Functionen von nur einer Variabeln erhoben hatte, war schon Cauchy durch Untersuchung des Functionsverlaufs in der imaginären Ebene und seine lignes d'arrêt, jetzt Riemann durch sein Querschnittsystem der Fläche T in den Stand gesetzt, die Beschränkung des Umkehrproblems auf Integralsummen fallen zu lassen, und unter diesem Gesichtspunkt konnte es nicht befremden, wenn Riemann (Art. 22) die p Argumente seiner Thetafunction durch je ein Integral erster Gattung mit derselben oberen Grenze ersetzt, und die p-fach unendliche Mannigfaltigkeit dieser Argumente in gewisse additive Constanten $-e_\nu$ verlegt, die zu diesen Integralen zutreten.

Der Gedanke, $\log \Theta$ zur Function eines Punktes der Fläche zu

machen, „welche sich, wenn die oberen Grenzen s, z der Integrale erster Gattung u_ν nach beliebiger stetiger Aenderung von z den Ausgangswert wieder annehmen, um lineare Functionen der Grössen u_ν ändert“, hatte so durchschlagenden Erfolg, dass die Theorie der allgemeinen Thetafunction überhaupt erst von Riemann ab zu datiren ist.

Durch passende Normirung nämlich der p Integrale u_ν, d. h. passende Zerschneidung der Fläche und vereinfachende Annahme bezüglich der Periodicitätsmoduln der u_ν an den 2p Querschnitten $a_1 \ldots a_p$; $b_1 \ldots b_p$, gelingt es zunächst, die Convergenz der Thetareihe (Art. 21) und die Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln (Art. 20) in wenigen Zeilen zu erweisen. Die neue Auffassung gestattet aber auch von „Nullpunkten der Thetafunction“ zu reden und durch Untersuchung derselben die Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems vorzubereiten. Führt man nämlich das Integral $\int d \log \Theta$ längs der Begrenzung der durch jene Schnitte a, b (und gewisse p Verbindungsschnitte c) einfach zusammenhängend gemachten Fläche T', so ergiebt sich, dass die Thetafunction (wenn sie nicht für jeden Wert von s, z verschwindet) in T p Nullpunkte besitzt. Sind $\alpha_1^{(\mu)}, \alpha_2^{(\mu)}, \ldots, \alpha_p^{(\mu)}$ die Werte von $u_1, \ldots, u_p$ in dem Nullpunkt $\eta'^{(\mu)}$, so zeigt sich weiter durch Betrachtung des Randintegrals $\int \log \Theta . d u_\mu$, genommen in Bezug auf die Begrenzung einer Fläche, in der $\log \Theta$ stetig und eindeutig ist, dass jene additiven Constanten e_ν congruent (d. h. bis auf die Periodicitätsmoduln von u_ν gleich) den Integralsummen $\alpha_\nu^{(1)} + \alpha_\nu^{(2)} + \cdots + \alpha_\nu^{(p)}$ gesetzt werden können, wenn man die Anfangswerte der u_ν passend bestimmt.

Die Argumente der Thetafunction nehmen somit die merkwürdige Form an:

$$u_\nu - \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \alpha_\nu^{(\mu)} \quad (\nu = 1, 2, \ldots p),$$

wo die u_ν, α_ν „Normalintegrale“ erster Gattung mit den Perioden πi oder 0 an den p Querschnitten a_ϱ (je nachdem $\varrho =$ oder $\gtrless \nu$) und $a_{\nu\varrho}$ an den p Querschnitten b_ϱ sind, und die oberen Grenzen der Integrale α die Verschwindungsstellen der Thetafunction darstellen.

Die nähere Ausführung des transcendenten Theiles der Riemann'schen Theorie muss einer geschichtlichen Darstellung der Lehre von den Abel'schen Functionen vorbehalten bleiben. Wir heben nur noch die für unsere Theorie wichtigsten Ergebnisse (Artt. 22—24) der zweiten Abteilung hervor.

19. Durch den Nachweis, dass jedes Grössensystem $e_1, e_2, \ldots, e_p$ einer Summe je von p Integralen erster Gattung $\alpha'^{(\mu)}$ im Allgemeinen nur

Das Jacobi'sche Umkehrproblem.

blem. Fall der Unbestimmtheit desselben.

auf eine Weise (Art. 23) gleich gesetzt werden kann, ist die Eindeutigkeit des Jacobi'schen Umkehrproblems bestätigt. Aber Riemann giebt (Artt. 23. 24) auch die Ausnahmen an. Weil durch die Annahme $u_\nu = \alpha_\nu^{(p)}$ $\Theta = 0$ wird, und sich hierbei die Argumente in eine Summe von nur $p-1$ Integralen verwandeln, deren obere Grenzen, wie man leicht sieht, noch beliebig annehmbar sind (s. auch die Abhandlung „Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen" J. f. M. Bd. 65), so verschwindet Θ identisch, d. h. für jeden beliebigen Wert der oberen Grenzen eines dieser $p-1$ Integrale, wenn die Argumente $u_\nu - e_\nu$ gleich Summen von nur $p-1$ Integralen erster Gattung sind. Die Grössen e_ν sind in diesem Falle einer negativen Summe von je $p-2$ Integralen gleich (genauer: congruent, bis auf Periodicitätsmoduln), andererseits, wie man aus dem Umstand schliesst, dass die Thetafunction eine gerade Function ist, gleich einer positiven Summe von p Integralen, von denen eines, u_ν, noch beliebig annehmbar ist (Nr. 17, a. E.). Das Jacobi'sche Umkehrproblem wird also dann unbestimmt, und die oberen Grenzen der p Integrale, deren Summen die e_ν gleichkommen, sind mit denen jener $p-2$ Integrale durch eine φ-Function „verknüpft", d. h. bilden zusammen die $2p-2$ Verschwindungsstellen einer φ-Function. Der Fall der Unbestimmtheit des Umkehrproblems ist also dadurch charakterisirt, dass die p Integrale, denen die e_ν gleich sind, als obere Grenzen p von den Verschwindungswerten einer φ-Function haben, und dass zugleich $\Theta(u_1 - e_1, \ldots, u_p - e_p)$ identisch verschwindet (Art. 24). Eine weitere Ausführung dieses Punktes enthält die oben citirte Abhandlung über Abel'sche Functionen (J. f. M. Bd. 65, s. unten Nr. 22).

Wir übergehen die Bildung der Integrale dritter Gattung mittelst Logarithmen von Thetaquotienten, und wenden uns sogleich zum Inhalt der beiden letzten Artikel (26, 27), die von dem Ausdruck algebraischer Functionen (insbesondere von rationalen und den Wurzeln aus rationalen Functionen von s, z) mittelst Thetaquotienten handeln: einer Darstellung der algebraischen Functionen in transcendenter Form, die an Bedeutung die früher erörterten (durch Integrale erster und zweiter Gattung) noch übertrifft.

Zweite Darstellung der algebraischen Function auf transcendentem Weg: mittelst Thetaquotienten; Wurzelfunctionen.

20. Bildet man zwei Producte P und Q von gleich vielen Functionen der Art:

$$\Theta\left(u_1 - \sum_1^p \alpha_1^{(\mu)},\ u_2 - \sum_1^p \alpha_2^{(\mu)}, \ldots u_p - \sum_1^p \alpha_p^{(\mu)}\right)$$

mit demselben s, z und verschiedenen oberen Grenzen σ, ζ der Integrale $\alpha_i^{(\mu)}$ für die verschiedenen Θ, und hat man andererseits eine rationale Function r von s, z, so lassen sich die Nullpunkte σ, ζ dieser Function noch in mannigfacher Weise als solche des Thetaproducts P, die Unend-

lichkeitspunkte als solche von Q einführen. Lässt man dann die übrigen Verschwindungswerte von P und Q zusammenfallen, so wird jeder Ausdruck von der Form:

$$\frac{P}{Q} e^{-2\Sigma h_\nu u_\nu}$$

in den Null- und Unendlichkeitswerten mit r übereinstimmen. Durch passende Wahl der Constanten h_ν lässt sich nun bewirken, dass dieser Ausdruck auch beim Ueberschreiten der Querschnitte sich nicht ändert, mithin die Eigenschaften einer rationalen Function besitzt und also nach dem Dirichlet'schen Princip von r sich nur um einen constanten Factor unterscheiden kann. Es ist indessen zu bemerken, dass je eine Thetafunction in Zähler und Nenner allein nicht ausreicht, um jene Null- u. s. w. Punkte unterzubringen, auch dann nicht, wenn r nur in p oder weniger Punkten null und unendlich wird, weil sonst z. B. die Verschwindungswerte durch eine φ-Function verknüpft (Art. 16) wären, also das Θ im Zähler identisch verschwinden würde (Art. 24).

Wohl aber reichen je eine Thetafunction in Zähler und Nenner hin zur Darstellung einer solchen algebraischen Function von s und z, deren Potenz eine rationale ist, und die für p oder weniger Punkte null und unendlich wird; dieser Quotient ist dann zugleich algebraisch hinsichtlich der Wertepaare σ, ζ, welche den Null- u. s. w. Stellen zukommen.

Die zuletzt erwähnte Darstellung hat Riemann in seinen Vorlesungen über Abel'sche Functionen, von denen ein Auszug in die ges. Werke aufgenommen ist, dem Studium der Wurzeln aus gewissen rationalen Ausdrücken, den „Wurzelfunctionen", die er dort (im engeren Sinne) Abel'sche Functionen genannt hat, zu Grunde gelegt. Wir werden über die Theorie dieser Functionen, die schon vorher Weierstrass in seiner Theorie der hyperelliptischen Functionen ausgezeichnet hatte, und die seitdem vielfach behandelt worden sind, an anderer Stelle zu berichten haben (s. d. Ref. über Riemann und Roch, Abschn. V, B, und das über Wurzelfunctionen, Abschn. IX). Auch werden wir sehen, welchen Nutzen die Theorie der algebraischen Correspondenzen (s. d. Ref. Abschn. X) aus der Darstellung algebraischer Functionen durch Thetaquotienten gezogen hat. So ist der letzte Artikel der Riemann'schen Abhandlung zum Ausgangspunkt von zahlreichen neuen Untersuchungen geworden.

Der historischen Ordnung vorgreifend, schliessen wir hier die Berichte über eine Arbeit von Roch und eine spätere von Riemann an, die im Verlaufe des nächsten Jahrzehntes auf die Entwicklung unserer Theorie wesentlichen Einfluss geübt haben.

D. **Gustav Roch** [1864] und **Bernhard Riemann** [1866].

(1) G. Roch, Ueber die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen. Journ. f. Math. Bd. 64, S. 372—376. 1864.

(2) B. Riemann, Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen. Journ. f. Math. Bd. 65, 1866, ges. Werke S. 198—210.

Abzählung der Constanten einer algebraischen Function.

21. Roch schliesst an die in Art. 5 der Riemann'schen Abhandlung über Abel'sche Functionen vorgenommene Abzählung der Constanten einer algebraischen Function, die in m Punkten unendlich wird, an und vervollständigt sie in einem wesentlichen Punkte.

Riemann zählt die Constanten ab an der Darstellung der algebraischen Function durch eine Summe s von Integralen erster und zweiter Gattung w_i, t_i:

$$s = \sum_1^m \beta_i t_i + \sum_1^p \alpha_i w_i + \text{const.},$$

wo die α, β willkürliche Constante sind, die nur der Bedingung genügen, dass die 2p Periodicitätsmoduln der Function s beim Ueberschreiten der Querschnitte gleich Null sind. Diese Bedingung formulirt nun zunächst Roch genauer, indem er die Periodicitätsmoduln wirklich bildet: 1) er zerschneidet die Fläche mittelst derjenigen Querschnitte a, b, die Riemann in Art. 19 seiner Abhandlung eingeführt hat; 2) er benutzt als Integrale erster Gattung w die Riemann'schen Argumente u der Thetafunction; 3) er denkt sich die Integrale zweiter Gattung t so normirt, dass ihre Periodicitätsmoduln an den Querschnitten a verschwinden.

Sollen an denselben Querschnitten auch die Periodicitätsmoduln von s verschwinden, so müssen die constanten α_i sämtlich null sein. Für die Querschnitte b aber lassen sich, wie Roch durch eine Residuenbetrachtung zeigt, die Periodicitätsmoduln der normirten Integrale t einfach in der Form von Integranden erster Gattung darstellen, so dass die für die b zu erfüllenden Bedingungen lauten:

$$\sum_1^m \frac{\beta_i \varphi_\nu(s_i, z_i)}{F'(s_i)} = 0. \quad (\nu = 1, 2, \ldots p).$$

Die Abzählung der noch verfügbaren Constanten β kommt nun auf eine Discussion dieses linearen Gleichungsystems hinaus und liefert — statt der Riemann'schen Zahl $m-p+1$ — das Ergebnis, dass diese Zahl dann bis zu $m-p+1+k$ ansteigt, wenn die m Unendlichkeitsstellen der Function s so beschaffen sind, dass k Functionen φ in denselben verschwinden, zwischen denen keine lineare Relation besteht.

Auf diese Arbeit Roch's bezieht sich die später in die Theorie der algebraischen Functionen eingeführte Bezeichnung „Riemann-Roch'scher Satz". Wir werden darüber in dem Abschnitt über die geometrisch-algebraischen Richtungen V, E berichten. — Hier schliessen wir noch die Besprechung der Arbeit Riemann's an, in welcher zum ersten Mal ein Begriff, der eine wichtige Rolle zu spielen berufen war, zwar nicht explicite formulirt, aber doch dem Inhalt nach ausgebildet in zwei besonderen Fällen zu Tage tritt: der Begriff der Punktgruppe.

Reciprocität zwischen den Verschwindungswerten gewisser φ-Functionen.

22. Anknüpfend an den Art. 24 seiner Abhandlung über Abel'sche Functionen führt Riemann in (2) aus, in welchen Fällen die Function $\Theta(u_1 - e_1, u_2 - e_2, \ldots u_p - e_p)$ identisch, d. h. für jeden Wert der oberen Grenze s, z der Integrale erster Gattung u, verschwindet.

Bei diesem Anlass kommt Riemann auf eine merkwürdige Reciprocität zwischen gewissen durch eine Gleichung $\varphi = 0$ verknüpften Verschwindungswerten zu sprechen, die später, unter dem Namen des Riemann-Roch'schen Satzes verallgemeinert, für die Theorie der algebraischen Functionen von Bedeutung geworden ist.

Im Falle des identischen Verschwindens der Thetafunction lässt sich nämlich in:

$$\Theta(u_1 - e_1, u_2 - e_2 \ldots u_p - e_p)$$

das Grössensystem e_ν zwar noch immer, wie im allgemeinen Fall, einer Summe von p Integralen gleich (oder vielmehr congruent nach den Periodicitätsmoduln) setzen, aber mindestens für eines derselben ist dann die obere Grenze noch willkürlich annehmbar. In dem Falle, dass $\Theta(u_\nu - e_\nu)$ identisch gleich Null, und nur eine (aber nicht mehr) von jenen oberen Grenzen beliebig annehmbar ist, betrachtet Riemann die Function:

$$\Theta(u_\nu + \alpha_\nu^{(1)} - u'_\nu - e_\nu)$$

$\left(\text{wo } e_\nu = \sum_1^p \alpha_\nu^{(i)} \text{ ist}\right)$, die nun nicht mehr identisch verschwindet. Als Function der oberen Grenze von u_ν verschwindet sie: ausser für $u_\nu = u'_\nu$ noch für $p-1$ von den oberen Grenzen der $\alpha_\nu^{(i)}$, die vollkommen bestimmt sind. Als Function der oberen Grenze von u'_ν: ausser für die von u_ν und (weil $\Theta(u_\nu - e_\nu) \equiv 0$) für die von $\alpha_\nu^{(1)}$, noch für $p-2$ andere bestimmte Werte. Sind dies die oberen Grenzen der Integrale $u_\nu^{(1)}, u_\nu^{(2)}, \ldots u_\nu^{(p-2)}$, so hat man:

$$\sum_1^{p-2} u_\nu^{(i)} \equiv -e_\nu \equiv -\sum_1^p \alpha_\nu^{(i)},$$

wo von den α_ν eines willkürlich wählbar, die u aber völlig bestimmt sind.

In dem Falle, dass auch jene neue Function Θ identisch verschwindet, dass also von den oberen Grenzen der α mehr als eine, etwa m, willkürlich sind, findet man ebenso, dass es $p-2$ Integrale u_ν giebt, deren obere Grenzen wiederum mit denen der α durch eine φ-Function verknüpft sind und von denen alsdann $m-1$ willkürlich sind. Es gilt ebenso das Umgekehrte (wenn man von den u ausgeht).

Jene p, bezw. $p-2$ durch eine φ-Curve verknüpften Grenzpunkte stehen also in einem Reciprocitätverhältnis. Ganz ebenso lässt sich, wenn die Function

$$\Theta(r_\nu) = 0$$

ist, auf die Congruenzen:

$$r_\nu \equiv \sum_1^{p-1} \alpha_\nu^{(i)} \equiv -\sum_1^{p-1} u_\nu^{(i)}$$

schliessen, wo von den oberen Grenzen sowohl der α wie der u sich m willkürlich annehmen lassen, und wiederum das Verhältnis zwischen den α und u ein reciprokes ist.

E. **Rückblick auf Riemann.**

Riemann und seine Vorgänger.

23. Um die Stellung zu würdigen, die Riemann's Arbeiten in der Geschichte unserer Theorie einnehmen, und den mächtigen Impuls, der von ihnen ausging, zu verstehen, hat man sich zu vergegenwärtigen, dass seine Thätigkeit in eine Zeit fiel, wo eben die wirksamen Hülfsmittel, die Cauchy für das Studium der Functionen geschaffen hatte, zum Gemeingut der Mathematiker geworden waren, und die grossen Probleme, welche die Theorie der Integrale algebraischer Functionen gestellt hatte, insbesondere das Jacobi'sche Umkehrproblem, die Besten unter den jüngeren Mathematikern deutscher Schule lebhaft bewegten. In einem deutschen Journale niedergelegt, harrten die Methoden und Ergebnisse, welche besondere Fälle jenes Problems betrafen, die aber zumeist das reelle Gebiet der Variabeln nicht, wenigstens nicht grundsätzlich verliessen, ihrer Ausdehnung auf den allgemeinen Fall. Es lag auf der Hand, dass dieser nur im Anschluss an die Cauchy'schen Methoden der Fortsetzung einer Function in der imaginären Ebene unter gleichzeitiger Fortbildung des Begriffs einer algebraischen Function, wie ihn Abel in seiner Pariser Arbeit entwickelt hatte, bewältigt werden konnte.

Ob Puiseux, der diese Methoden beherrschte, und dem andererseits auch jene Fragestellung nicht fremd war, ihre Bedeutung ganz gewürdigt hat, lässt sich schwer beurteilen. Wenn er die Abzählung der Perioden

auf solche Integrale, die sich über Wurzelausdrücke erstrecken, beschränkt hat, ja nicht einmal für diesen Fall die überall endlichen Integrale auszeichnet, so lässt sich daraus zum mindesten schliessen, dass er Abel's Pariser Arbeit nicht genauer kannte, weil schon Abel die Zahl p, wenn auch ohne jene Integrale abzusondern, für den allgemeinen Fall gebildet hatte. Ueber die Stellung, die Weierstrass zu jenen Fragestellungen einnahm, haben wir oben (s. III. Abschn. No. 34) gesprochen.

Dass Riemann, der allenthalben eine genaue Litteraturkenntnis verrät, wenn er die Pariser Arbeit auch nicht erwähnt, doch mit ihren Ergebnissen bekannt war, lässt sich wohl annehmen. Er hätte zu den fundamentalen Begriffen des Integranden erster Gattung und der φ-Function gelangen können durch weitere Ausbildung des Gedankengangs von Abel, der Integranden herstellt, für welche die Integralsumme nach dem Abel'schen Theorem eine Constante giebt. Aber es ist nicht wahrscheinlich, dass Riemann diesen Weg eingeschlagen hat. Wir haben oben den Ideenkreis bezeichnet — Functionsbestimmungen nach Art der in der Potentialtheorie üblichen —, aus dem heraus Riemann, vielleicht an der Hand eines Abbildungsproblems, zu der Vorstellung von der unberandeten Fläche, zu den linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten und zugleich zu den elliptischen und Abel'schen Integralen gelangte; die Eleganz und Fruchtbarkeit des Gedankengangs musste ihn zu weiterer Verfolgung anregen. Die Unstetigkeiten längs der Begrenzung, welche die Potentialfunction, bez. ihre Abgeleiteten aufweisen, boten Analogien zu den Cauchy'schen lignes d'arrêt, und so mag sich Riemann das Grundproblem dargeboten haben: in einer Fläche, deren Gestalt die algebraische Unterlage im Allgemeinen abgiebt, die zu den algebraischen Functionen gehörigen Integrale durch ihre Periodicitätsmoduln allein zu definiren.

Aber es war mehr, als bloss ein allgemeiner Ueberschlag über solche mutmasslichen Zusammenhänge, was der Potentialtheorie entnommen wurde. Ihr entstammt vor allem das Dirichlet'sche Princip: die genaue Umgrenzung der Bedingungen, die einer in der zerschnittenen Fläche T' eindeutigen, in einzelnen Punkten unstetigen Function auferlegt werden können. Beschränkt man sich auf algebraische und logarithmische Unstetigkeitspunkte, und sind die beim Ueberschreiten der Querschnitte zutretenden „Periodicitätsmoduln“ additive Constanten, so ist bloss der reelle Teil der letzteren willkürlich annehmbar, und die Functionen sind Integrale algebraischer Functionen. Jenes Princip lieferte Riemann somit die feste Grundlage für die Definition seiner erzeugenden Functionen: der Integrale der drei Gattungen. Mit ihrer Hülfe erst werden die in der Fläche T ein-

deutigen, nur in Punkten unstetigen algebraischen Functionen gebildet, die dann durch rationale Functionen der unabhängig Variabeln z und irgend einer beliebigen s unter ihnen, welche mit z durch die eine algebraische Gleichung $F(s, z) = 0$ verbunden ist, dargestellt werden.

Diese völlige Ablösung der Untersuchung von der wirklichen Darstellung einer Function, zu der man erst hinterher gelangt, während man sonst von den rationalen bezw. algebraischen Functionen auszugehen pflegte, ist, wie wir oben hervorgehoben haben, derjenige Zug der Riemann'schen Theorie, den er völlig neu aus dem Rüstzeug der mathematischen Physik entnommen und seiner Forschung zugefügt hat. Die berechtigten Einwände, die man seitdem gegen das Dirichlet'schen Princip erhoben hat, und von denen wir berichtet haben, vermögen die Thatsache nicht zu beseitigen, dass dieser Satz in der Hand des Erfinders zu einem Werkzeug geworden ist, das die Wissenschaft um ungeahnte Schätze bereichert hat. Diese Errungenschaften auf einem Wege zu sichern, der völlig einwandfrei ist, hat sich die Forschung seitdem angelegen sein lassen.

Die neuen Ergebnisse der Riemann'schen Theorie.

24. Als die wesentlichsten Ergebnisse der Riemann'schen Abhandlung lassen sich etwa folgende bezeichnen:

Gegenüber dem Standpunkt von Abel, Jacobi und Weierstrass — der Letztere nur insoweit, als dessen Arbeiten vor Riemann in Betracht gezogen werden —:

1. Bildung des überall endlichen Abel'schen Integrals, insbesondere der φ-Function.

2. Constantenbestimmung für eine algebraische Function, die in gegebenen Punkten des algebraischen Gebildes $F(s, z) = 0$ unendlich wird.

3. Begriff der rationalen Transformation und der Moduln einer Klasse.

4. Einführung von solchen Periodicitätsmoduln in den Exponenten der Thetafunction, für welche sich die Convergenz der Reihe beweisen lässt.

5. Bestimmung der Nullstellen der so definirten, von nur einer Stelle der Fläche abhängigen Thetafunction.

6. Beweis der Eindeutigkeit des Umkehrproblems, nebst Ausnahmen.

7. Ausdruck algebraischer Functionen durch Thetaquotienten.

Wir haben bei dieser Aufzählung uns auf diejenigen Punkte beschränkt, die sich für die Entwicklung unserer Theorie als besonders wichtig erwiesen haben. Es ist ferner gegenüber Cauchy auf die freie Auffassung des Functionsbegriffs und die Abgrenzung der zur Bestimmung einer Function notwendigen Bedingungen hinzuweisen; gegenüber Puiseux

auf das anschauliche Substrat für die Vorstellung der mehrdeutigen algebraischen Function: die Riemann'sche Fläche und die durch ihre Zerschneidung gewonnene Einsicht in die Zahl der Perioden der Integrale algebraischer Functionen.

Die heutigen Theorien verlassen zumeist den Gedankengang Riemann's und stellen die algebraischen Functionen auf eigene Grundlage.

25. Aber wenn heute die Fülle von merkwürdigen Ergebnissen der Riemann'schen Theorie zu einem integrirenden Bestandtheil der Wissenschaft und damit schon jetzt zur Grundlage für neue weitaussehende Forschungen geworden ist, so hat man doch geglaubt, den Weg, den Riemann ein geschlagen hat, in der Hauptsache verlassen zu müssen, und nur Bruchstücke des kühnen Aufbaus sind in die einzelnen Theorien übergegangen, welche Zeitgenossen Riemann's und Neuere an seine Stelle zu setzen für wünschenswert hielten.

Wenn wir von solchen Schriftstellern absehen, die, wie C. Neumann, Briot, Klein, in ihrer Darstellung der Theorie der Abel'schen Functionen vornehmlich eine Interpretation der Riemann'schen Abhandlung ins Auge gefasst haben, sind alle Neueren, welche die Theorie der Abel'schen Functionen vortragen, auf die algebraischen Functionen als ihre natürliche Grundlage zurückgegangen und entwickeln, von hier aus zum Transcendenten fortschreitend, in umgekehrter Anordnung wie Riemann, die Ergebnisse seiner Forschungen. — Wir wissen nicht, in welchem Umfange Weierstrass neben und unabhängig von Riemann seine feinsinnige und strenge Theorie der Abel'schen Functionen, die er seit der Mitte der sechziger Jahre in Vorlesungen an der Berliner Universität vorträgt, ausgebildet hat. Jedenfalls nimmt auch er den bezeichneten Ausgangspunkt.

Den Hauptgrund für dieses Aufgeben des Riemann'schen Gedankenganges haben wir früher angeführt. Die unsichere Grundlage, die das Dirichlet'sche Princip bietet, und für das selbst die eindringenden Nachforschungen von Schwarz und Neumann nach einem passenden Ersatz heute noch kein völliges Aequivalent bieten, hat man durch die Ausbildung einer „Theorie der algebraischen Functionen“ ersetzt und sich damit dem natürlichen Entwicklungsgange der Wissenschaft wieder genähert.

Zu diesen Bedenken gesellten sich solche gegen den Gebrauch der Riemann'schen Fläche. Wiewohl sich Riemann selbst auf eine genaue Vorstellung von derselben niemals beruft, setzt doch schon die Operation des Querschnittlegens und damit weiterhin der Uebergang zu der Gleichung $F(s, z) = 0$ und alles Folgende, genau genommen, die Kenntnis des fertigen Gebildes voraus. Wir werden weiter unten noch von den Bemühungen der nächsten Nachfolger Riemann's zu reden haben, die

verschiedenen möglichen Gestalten der Fläche zu erörtern, die derselben Gleichung $F(s, z) = 0$ entsprechen. Aber eben weil die Theorie Riemann's zunächst dieser Discussion entraten kann, muss es möglich sein, die Fläche durch einfachere, für den Bedarf eben ausreichende Vorstellungen zu ersetzen. Der grösste Teil der Theorie lässt sich denn auch ohne jede geometrische Interpretation an jene Gleichung anschliessen, welche die algebraische Function definirt, wobei jedoch, teils wegen der Kürze der Darstellung, teils aus inneren Gründen die Begriffsbildungen und Bezeichnungen entweder der Theorie der algebraischen Curven oder der Zahlentheorie entnommen werden.

Aus den geschilderten Bedürfnissen heraus hat sich die Theorie der algebraischen Functionen in ihrer heutigen Gestalt endgültig entwickelt. Dabei mussten selbstverständlich die grundlegenden Untersuchungen von Abel, Cauchy, Jacobi, Puiseux den Ausgangspunkt abgeben. Aber diese allein haben jene Theorie nicht ins Leben gerufen. Erst Riemann's Abhandlung machte die Ausgestaltung jener Disciplin erforderlich, die zugleich wesentliche Bestandteile aus derselben in sich aufnahm. Darunter freilich gerade nicht die grundlegenden Sätze. Diese haben sich erst unter dem Drucke des Bedürfnisses, die Riemann'schen Sätze auf nicht transcendente Basis zu stellen, herausgebildet.

Wir glauben hiermit die letzte, aber stärkste Wurzel bezeichnet zu haben, aus der die heutige Theorie der algebraischen Functionen entsprossen ist. Aber ehe sich diese Bildung in bewusster und folgerichtiger Weise vollzog, trat ein Uebergangsstadium ein, in welchem sich durch die verständnisvolle Mitarbeit von Schülern Riemann's dessen Theorie in wichtigen Punkten vervollkommnete, während zugleich die Thätigkeit mehrerer Geometer, welche die Riemann'schen Ergebnisse für ihre Zwecke fruchtbar zu machen wussten, das Verständnis der Riemann'schen Theorie in weitere Kreise verbreitete und alsbald eine erste Umgestaltung dieser Theorie zeitigte (s. V. C). In Verbindung hiermit werden wir uns unten mit einem noch nicht besprochenen Untersuchungsgebiete Riemann's zu beschäftigen haben, das mit der geometrischen Auffassung seiner Theorie in Zusammenhang steht: der Theorie der Wurzelfunctionen (V, B, s. auch IX), zuvor aber (V, A) auf das grosse Feld der geometrisch-algebraischen Vorarbeiten, die diesen Untersuchungen die Wege geebnet haben, in einem Excurse eingehen.

V. Abschnitt.

Die geometrisch-algebraischen Richtungen.

Gruppirung der neueren Richtungen.

1. Die neueren Richtungen in der Theorie der algebraischen Functionen, die nicht rein functionentheoretischer Natur sind, lassen sich in fünf Gruppen scheiden:

Erste Gruppe: die geometrisch-algebraische Richtung, vertreten durch Riemann, Roch 1862—1866, Clebsch 1863—1865, Clebsch-Gordan, von 1865 an, Brill-Noether, von 1871 an.

Zweite Gruppe: die algebraische, vertreten durch die Vorlesungen von Kronecker, Weierstrass, von 1860 an (bekannt nach 1872), und von Christoffel 1880.

Dritte Gruppe: die invarianten- oder formentheoretisch-algebraische, vertreten durch Weber, Noether, Christoffel, Klein und (bezüglich der Wurzelfunctionen) durch Frobenius, Schottky, 1877 ff.

Vierte Gruppe: die arithmetische von Dedekind-Weber 1880, Kronecker 1881, Hensel u. s. w.

Fünfte Gruppe: die geometrische von Segre und Castelnuovo, von 1888 an.

Wir werden die ersten drei Gruppen in der vorstehenden Reihenfolge der Publication besprechen, nach dem in der Vorrede Bemerkten jedoch auf die Behandlung der vierten und fünften Gruppe verzichten. Ein Referat über die Theorie der singulären Punkte stellen wir zwischen die Besprechung der ersten Gruppe und die der Vorlesungen von Weierstrass, weil Brill-Noether diese Theorie am Schlusse ihrer Darstellung heranziehen, Weierstrass sie voraussetzt, und weil sich hierbei die erwünschte Gelegenheit ergiebt, auf die Kronecker'sche Abhandlung über die Discriminante einzugehen.

Alle die genannten Richtungen haben das Gemeinsame, einmal, dass sie von einer Gleichung zwischen zwei Variabeln, $f(s, z) = 0$, ausgehen

und die von Cauchy, Abel, Gauss etc. geschaffenen Grundlagen der Gleichungstheorie anerkennen und ohne Weiteres herübernehmen; sodann, dass sie auch die Hauptsätze der Eliminationstheorie, nur in verschiedenem Umfange und in verschiedener Form, anwenden. Der letztere Umstand wird bei den Einzelbesprechungen Berücksichtigung finden. Die gemeinsamen Grundgedanken der verschiedenen Richtungen und Gruppen werden besonders in dem Referat über Weierstrass hervorgehoben werden.

Die Vorgeschichte der zweiten Gruppe hat durch Besprechung der functionentheoretischen Untersuchungen von Abel, Weierstrass und Riemann bereits ihre Erledigung gefunden (Rf. III, IV). Aber auch die Arbeiten der ersten Gruppe, wie mannigfacher Natur, bei Clebsch selbst functionentheoretischer Art, auch ihre Hülfsmittel sind, haben eine gemeinsame vielverzweigte geometrisch-algebraische Vorgeschichte, die wir zunächst noch nachholen müssen. Denn obgleich sie sich mehr im Gebiete der projectiven Geometrie bewegt, während zur Theorie der algebraischen Functionen eine Geometrie der rationalen Transformationen gehört, haben doch ihre Hauptmomente Einfluss auch auf die Theorien der algebraischen Functionen gewonnen. Diese Momente sind:

a) die Schnittpunkttheorien für Curven; also die Eliminationsprocesse von Euler, Cramer und Bézout, die wir bereits behandelt haben (Rf. I), und ihre geometrische, bezw. algebraische Ausgestaltung besonders durch Plücker und Jacobi;

b) die mit den Betrachtungen über singuläre Punkte von Newton und Cramer (s. Rf. I) zusammenhängenden geometrischen Begriffsbildungen über Curvenerzeugung, bei Plücker u. s. w.;

c) die Entwicklung der projectiven Auffassung bei Hesse, Aronhold u. s. w.;

d) die Aufstellung von kanonischen Gleichungsformen, insbesondere:

e) Untersuchungen über Systeme von Berührungscurven bei Plücker und Hesse.

A. Vorgeschichte der geometrisch-algebraischen Richtung bis 1862.

a. Schnittpunkttheorien von Plücker und Jacobi.

Litteratur:

G. Lamé,

(1) Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie. 1818.

J. Plücker,
(1) Analytisch-geometrische Entwicklungen. Essen.
I. Bd. 1828, dat. 1827 (s. S. 228).
II. Bd. 1831, dat. 1830 (s. S. 242).
(2) Recherches sur les courbes (surfaces) algébriques de tous les degrés. Annales de Gergonne, t. 19, p. 97 u. 129, 1828—29.
(3) Théorèmes généraux concernant les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'inconnus. Journ. f. M. XVI, S. 47—51, 1837 (gleichzeitig mit Jacobi (2)).
(4) System der analytischen Geometrie. Berlin 1835.
(5) Theorie der algebraischen Curven, gegründet auf eine neue Behandlungsweise der analytischen Geometrie. Bonn 1839 (s. bes. die einleitenden Betrachtungen).
C. G. J. Jacobi,
(1) Theoremata nova algebraica circa systema duarum aequationum inter duas variabiles propositarum. Journ. f. M. XIV, S. 281—288. Werke, her. v. Weierstrass, III, S. 285, Juni 1835.
(2) De relationibus quae locum habere debent intra puncta intersectionis duarum curvarum vel trium superficierum algebraicarum dati ordinis, simul cum enodatione paradoxi algebraici. Journ. f. M. XV, S. 285—308, Werke III, S. 329.

2. Das sogenannte „Cramer'sche Paradoxon" haben wir schon früher (Ref. I, Nr. 26) erwähnt. Es besteht in der von Euler und Cramer ausgesprochenen Form darin, dass sich zwei Curven nter Ordnung (C_n) in mehr Punkten schneiden, als eine einzelne derselben bestimmen; und beide geben dafür die richtige Erklärung, dass ν lineare Gleichungen mit ν Unbekannten dieselben nicht immer bestimmen, sondern unendlich viele Wertsysteme der Unbekannten zulassen können. Cramer erkennt hierbei noch nicht, dass alle durch $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ Punkte gehenden unendlich vielen Curven C_n denselben Restschnitt besitzen: dies ist vielmehr eine von Euler angedeutete, aber erst von Lamé (1) 1818 ausgeführte Bemerkung. Die Clebsch'sche Fassung des Paradoxons:*) „Wenn von den Durchschnittspunkten zweier Curven eine gewisse Zahl bestimmt ist, so ist der Rest damit von selbst bestimmt, ohne dass umgekehrt die Curven selbst durch diese Punkte bestimmt wären", trifft daher für Cramer nicht völlig zu.

Das Paradoxon. Die auf einer gegebenen Curve mitbestimmten Punkte.

Während schon Euler von unendlich vielen, von willkürlichen Parametern linear abhängigen Curven sprach, war es doch erst Lamé, der diesen Umstand zur algebraischen Basis der Behandlung von Schnitt-

*) Zum Gedächtnis an Julius Plücker, von A. Clebsch. Abh. der Gött. Ges. d. Wiss. XV, 1872.

punktfragen umschuf, indem er alle Curven nter Ordnung, welche durch die n^2 Schnittpunkte zweier Curven nter Ordnung, C'_n und C''_n, gehen, in die einen willkürlichen Parameter linear enthaltende Gleichungsform setzte:

$$C_n \equiv C'_n + \lambda C''_n = 0.$$

Aber obgleich der Gesamtinhalt des Systems von n^2 linearen Gleichungen durch diese Form vollständig wiedergegeben ist, so ist dies keineswegs mit dem oben genannten Teilsysteme von $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ Gleichungen immer der Fall; es muss vielmehr die Bedingung ihrer Unabhängigkeit hinzutreten, wenn die übrigen $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Gleichungen aus dem Teilsysteme von selbst folgen sollen. Die obige Clebsch'sche Fassung — welche also selbst wieder zu einem ähnlichen Paradoxon führen würde, wie das, zu welchem der ursprüngliche Satz Anlass gab — ist daher auch keine Wiedergabe der Lamé'schen Gleichung an sich, wohl aber derjenigen Auffassung, welche Gergonne (in seinen Annales, Bd. 17) und bald darauf Plücker ((2); kurz vorher in (1) I. Bd. (Note zu p. 228); eingehender in (3) und später in (5) pag. 7—12) daraus entwickelte.

Plücker selbst war sich der Begrenztheit seiner Auffassung sehr wohl bewusst; und er deutet diesen Umstand ausdrücklich an, indem er sich der Bezeichnungsweise: „im allgemeinen", oder: die gegebenen Punkte sollen „beliebig", „zufällig" gelegen sein, bedient. Genau genommen wird damit jede Anwendung auf einen vorliegenden Fall von selbst ausgeschlossen, weil nicht angegeben wird, ob dieser Fall unter dem „allgemeinen" unterbegriffen ist. Diese Unbestimmtheit der Sätze durchzieht, von Plücker an, die ganze an ihn anschliessende Algebra und Geometrie, bis zu den Darstellungen von Clebsch hin; sie ist in dem hier zu betrachtenden Gebiete erst in den siebenziger Jahren überwunden worden. Aber sie kann doch als ein notwendiger Durchgangspunkt betrachtet werden, insofern sie einmal ein leichteres Vordringen erlaubte und zu Resultaten führte, die immerhin sehr weite, wenn auch nicht fest abgegrenzte Gebiete umspannten; hauptsächlich aber, insofern sie den Gesichtskreis dergestalt erweiterte, dass sich später das Bedürfnis und die Möglichkeit strenger Begründung geltend machen konnte.

Eine gerade für die Theorie der algebraischen Functionen wichtige Wendung, welche Plücker der Frage gab, war die*), dass er in den Schnittpunktsätzen eine Curve, C_n, als fest gegeben zu Grunde legte, die übrigen schneidenden Curven als beweglich annahm. Während er

*) Vgl. Clebsch a. a. O.

dabei noch in (1) übersah, dass die schneidenden $C'_m (m \geqq n)$ die Grundcurve C_n als Teil enthalten könnten, hat er in (3) aus der Gleichung

$$C_m \equiv C'_m + A_{m-n} \cdot C_n = 0.$$

— der Verallgemeinerung der Lamé'schen Gleichung auf $m > n$, indem A_{m-n} ein Polynom $(m-n)$ten Grades vorstellt — die richtige Abzählungsmethode für die auf einer Curve C_n vorhandenen Systeme von je mn Schnittpunkten mit allen Curven $m$ter Ordnung gegeben. Da nämlich nach dieser Gleichung durch jedes solche System noch $\infty^{[m-n]}$, d. h. $[m-n]+1$ linear unabhängige Curven C_m gehen, wo

$$\tfrac{1}{2}(r+1)(r+2) = [r]$$

gesetzt ist, so giebt es nur

$$\infty^{[m]-1} : \infty^{[m-n]} = \infty^{mn - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$$

solcher Systeme auf der C_n. Nach Plücker's Ausdrucksweise: durch $mn - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ „beliebig" auf der gegebenen C_n angenommene Punkte sind die übrigen $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ der mn Schnittpunkte mit einer C_m bestimmt (die Erweiterung von Plücker auf drei Flächen u. s. w. ist nicht ganz correct).

Schnittpunktrelationen.

3. Die algebraische Discussion der Relationen zwischen den Coordinaten der mn Schnittpunkte zweier Curven $m$ter und $n$ter Ordnung hat Jacobi in Angriff genommen, indem er in (1) den Satz aus der gewöhnlichen Partialbruchzerlegung: „dass $\sum_i U_i / (\partial f / \partial x)_i = 0$ wird, wenn die Summe über die n Wurzeln einer Gleichung $f(x) = 0$ erstreckt wird, und U eine ganze rationale Function von x von höchstens dem $(n-2)$ten Grade ist" auf die symmetrischen Functionen der gemeinsamen Wertsysteme zweier Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0$$

vom $n$ten, bezw. $m$ten Grade ausdehnte, wie folgt. Sei

$$R = \frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dx},$$

und sei U irgend eine ganze rationale Function von x, y von höchstens dem $(m+n-3)$ten Grade, so wird

$$\sum_i \frac{U_i}{R_i} = 0,$$

wenn die Summe sich über die mn Schnittpunkte von $f = 0$, $\varphi = 0$ erstreckt.

Dieser Satz — der sogenannte „Jacobi'sche Satz", auf welchen Clebsch das Abel'sche Theorem gestützt hat — ergiebt sich im wesentlichen durch doppelte gewöhnliche (binäre) Partialbruchzerlegung des Aus-

drucks $(UV)/(XY)$, wo X und Y die durch Elimination von y. bezw. x entstehenden Resultanten aus f, φ sind, so dass

$$X = Mf + N\varphi, \quad Y = Pf + Q\varphi$$

wird; ferner $V = MQ - NP = \frac{1}{R} \cdot \frac{dX}{dx} \cdot \frac{dY}{dy}$ (für $f = 0$, $\varphi = 0$), und wo U eine ganze Function von x, y ist.

Hierzu bemerkt Kronecker (Berl. Monatsber. Dec. 1865, wo auch der Satz selbst auf andere Weise hergeleitet wird), dass die Jacobi'schen Angaben über die Grade von M. N. etc. alle streng werden, sobald man nur für alle mn Schnittpunkte endliche (und getrennte) Wertsysteme von x, y annimmt. Eine Verallgemeinerung des Satzes rührt von Liouville her (Mémoire sur quelques propos. gén. de géométrie et sur la théorie de l'élimination dans les éq. algébr. (Liouv. J. VI, 1841); auch C. R. XIII. 1841, p. 467 nach anderer Methode; s. wegen des Satzes und der ersteren Methode Serret's Algèbre. 1. Bd. § 274); und diesem allgemeineren Satze ganz analog, nur scheinbar noch allgemeiner, ist derjenige, welchen Harnack (Math. Ann. IX; vgl. Clebsch-Lindemann, Vorl. über Geometrie, 1. Band S. 826) aus dem Jacobi'schen Satze durch Zerlegung der Function φ in ein Product $\psi.\chi$ erzielt hat; indess verwendet bereits Liouville selbst die Annahme, dass φ ein Product $\psi.\chi$ sei, zu einer Art von Partialbruchzerlegung und giebt auch eine Formel, die sich unmittelbar in die Harnack'sche überführen lässt. — Eine Ausdehnung des Jacobi'schen Satzes auf n Variable findet sich bei Jacobi selbst ((2) §§ 6—10), bei Betti (Sopra l'eq. alg. con più indeterminati. Annali di Matem. I, 1858) und bei Clebsch (Anw. der Abel'schen Functionen in der Geom., Journ. f. M. 63, 1863).

In (2) sucht nun Jacobi aus seinem Satze die Relationen selbst zu gewinnen und zu beherrschen. Es gelingt ihm dies auch zunächst für $m = n$, indem er durch Elimination der n^2-1 Verhältnisse der R_i aus den $\frac{1}{2}(2n-2)(2n-1)$ Gleichungen $\sum_i \frac{U_i}{R_i} = 0$ die $(n-1)(n-2)$ Bedingungsgleichungen zwischen den $2n^2$ Coordinaten rein darstellt. Für $m > n$ verwendet er erst $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte zur Bestimmung der C_n,

$$f_n(x, y) = 0,$$

und für die übrigen Schnittpunkte hat man, ausser der Bedingung, dass sie auf der C_n liegen sollen, noch $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ weitere Gleichungen. Dabei spricht Jacobi seine Sätze in völlig strenger Form aus, wie: „zwischen den mn Punkten, gelegen auf gegebener C_n, herrschen $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Bedingungen", oder: „die Maximalzahl der auf gegebener C_n im Schnitt mit der C_m willkürlich annehmbaren Punkte beträgt

$mn - \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$". Bei diesen Abzählungen ist ferner hervorzuheben, dass Jacobi, noch allgemeiner als Plücker, nach dem Vorgang von Bézout (s. Rf. I II, Nr. 32), den er in (2) nicht citirt, die Zahl der in einer Gleichung

$$A_{r-n} f_n + B_{r-m} \varphi_m = 0 \quad (r \geqq m \geqq n)$$

bei Unbestimmtheit der ganzen Functionen $(r-n)$ten, bezw. $(r-m)$ten Grades A_{r-n} und B_{r-m} enthaltenen willkürlichen Constanten exact bestimmt: nämlich, $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$ wie oben $= [r]$ gesetzt, zu $[r-n] + [r-m]$, beziehungsweise zu $[r-n]+[r-m]-[r-m-n]$, je nachdem $r <$ oder $\geqq m+n$, indem $[r-m-n]$ Identitäten vermöge

$$A_{r-n} \equiv C_{r-m-n} \varphi_m, \quad B_{r-m} \equiv - C_{r-m-n} f_n$$

herrschen. Dies ist eine der Grundlagen der abzählenden Geometrie geblieben.

Im Falle $m > n$ nun wird die reine Darstellung der $n(m-3)+1$ Bedingungsgleichungen aus dem System $\Sigma \frac{U_i}{R_i} = 0$ wesentlich complicirter als für $m = n$, da die nach Elimination der R resultirenden Gleichungen von einander abhängig werden; sie gelingt Jacobi dadurch, dass er aus diesem letzteren System, das nichts weiter als die Existenz von $[m-3]+[n-3]$ Gleichungen der Art

$$A_{m-3} f_n + B_{n-3} \varphi_m = 0$$

für die mn Schnittpunkte darstellt, die Gleichungen für f_n und für φ_m bildet. Da weder hier, noch für $m = n$, die Unabhängigkeit der von Jacobi erhaltenen Relationen, die an Zahl mit den existirenden übereinstimmen, für alle Fälle explicit aufgezeigt wird, so bliebe immerhin noch die Möglichkeit, dass die Relationen unvollständig sein könnten. Thatsächlich sind sie auch bisher den auf zwei Gleichungen mit zwei Variabeln bezüglichen Theorien nie in dieser Form zu Grunde gelegt worden. Die spätere Verwendung — um hier vorzugreifen — besteht vielmehr nur in der Anwendung des Jacobi'schen Satzes auf eine fest zu Grunde gelegte f_n, im Abel'schen Theorem (s. V. No. 28); während dann die Bildung von Schlüssen über Schnittpunktsysteme in der Ebene auf diesen Fall zurückzuführen versucht wurde.

Imaginäre Schnittpunkte.

4. Sofern die geometrischen Schnittpunktsätze von Mac Laurin und Euler eine Wiedergabe der algebraischen Eliminationsresultate sein wollten, war die Aufnahme der Bezeichnung „imaginäre Schnittpunkte zweier algebraischer Curven" von vornherein geboten. Aber diese Aufnahme hat sich doch nur unter Schwankungen vollzogen. Cramer lässt diese Bezeichnung zwar vollständig zu, unterscheidet aber jene Sätze scharf von

denjenigen, welche sich auf das eigentliche geometrische Gebiet des ganzen vorigen Jahrhunderts beziehen: auf das reelle Gebiet der Ebene und des Raumes: für dieses Gebiet liefern jene Sätze nur obere Grenzen. Euler (Introductio in analys. inf., II. Bd., Cap. 19) schlägt einen unklaren Mittelweg ein: „Schnittpunkte" zweier Curven (reelle oder imaginäre) sind für ihn nur solche, welche für die beiden Curven dieselbe reelle Abscisse und dieselbe Ordinate, gleichviel ob reell, ob imaginär, liefern. Es liegt auf der Hand, dass die letztere Auffassung zu keinen allgemeineren Sätzen, auch nur im reellen Gebiete, führen konnte.

Eine Erweiterung dieses Gesichtskreises konnte erst eintreten, als die Algebra, seit Gauss und Cauchy, das Imaginäre nicht mehr nur als Hülfsmittel einführte, sondern das Wertgebiet einer Variabeln auf das ganze complexe Gebiet von 2 Dimensionen ausdehnte. Bei Plücker, welcher die geometrischen Constructionen und Eigenschaften wesentlich als Gegenbild algebraischer Operationen ansah, wird das Imaginäre in diesem grösseren Umfange geometrisch zugelassen. Er leitet (von (1), zweiter Band, eingehender von (4) an) zahlreiche Eigenschaften von Curven ab — wie Anzahl der Wendepunkte, Doppeltangenten, überhaupt Berührungseigenschaften u. s. w. —, welche alle unabhängig von der Frage der Realität ausgesprochen und bewiesen werden. Der Fundamentalsatz aber, auf welchem alle diese Schlüsse beruhen, ist immer der über die mn Schnittpunkte zweier Curven $m$ter und $n$ter Ordnung.

Dem widerspricht nicht, dass gerade Plücker's Interesse mehr als das irgend eines anderen Geometers der Betrachtung der Realitätsverhältnisse zugewandt ist. Er stellt sich zu diesem Zwecke die allgemeine Gleichung einer Curve auch immer mit nur reellen Coefficienten vor, während in den kanonischen Formen natürlich dann nur das Conjugirt-Complexe auftritt. Daher giebt er auch dem linear eingehenden Parameter eines Curvenbüschels gewöhnlich nur reelle Werte. Seine in Nr. 5 zu besprechende Erzeugung einer Curve, die an das Reelle anknüpft, erfordert freilich, wie dort gezeigt wird, eine Verallgemeinerung.

Hesse war es, der in seinen Arbeiten über die algebraischen Curven jedwede Unterscheidung des Reellen vom Imaginären fallen liess: für ihn giebt es, auch in geometrischen Aufgaben, nur rein algebraische Probleme. Die völlige Identificirung der Curve mit dem algebraischen Inhalt ihrer Gleichung $f(x, y) = 0$ hat dann von Plücker und Hesse, denen sich auch Cayley angeschlossen hat, Clebsch übernommen.

b. Curvenerzeugung.

Litteratur: s. unter a. Plücker (1), (4), (5).

5. Die Grenzfälle der Schnittpunktbeziehungen, in welchen eine Reihe von Schnittpunkten an eine Stelle zusammenrücken — also bei Berührungen der verschiedenen Ordnungen, auch bei singulären Punkten einer Grundcurve —, drücken sich algebraisch in mannigfaltiger, oft complicirter Gestalt aus. In der Aufgabe, alle diese Specialfälle dem allgemeinen Falle unter einheitlichem Gesichtspunkte unterzuordnen und eine gemeinsame Auffassung und Ausdrucksweise dafür zu gewinnen, hat sich die geometrische Auffassungsweise besonders bewährt. Auch diese hat sich wieder hauptsächlich durch Plücker ((1) zweiter Band), oder doch im Verfolge seiner Auffassung, herausgebildet. Die Plücker'sche Erzeugung einer Curve durch consecutive Punkte — und dualistisch durch consecutive gerade Linien — bedient sich zwar der Form nach — und bei Plücker auch dem Sinne nach — nur gewisser Vorstellungen aus dem reellen Gebiete, wenn von „Fortrücken" eines Punktes in einer Richtung und von „Drehen" einer Geraden um einen Punkt gesprochen wird. So unbestimmt aber diese Ausdrucksweise auch scheinen mag, besonders im Hinblick auf das complexe Gebiet der Curve, so hatte es doch, da in Wirklichkeit immer nur die Grenzen von Verhältnissen zweier kleinen Verrückungen in die Betrachtung eingehen, wenig Schwierigkeit, jene Vorstellung zu einer begrifflichen Auffassung von consecutiven Elementen einer Curve zu erheben. In dieser bleibt von dem anschaulichen Fortrücken und Drehen als begrifflich wesentlich nur das: zu jedem Punkte (x, y) einer Curve gehört ein consecutiver $(x+dx, y+(dy/dx)dx)$ — welcher die ganze Umgebung des Punktes (x, y) in sich zusammenfasst, indem dy/dx (s. Rf. IV. Nr. 8) von der Fortschreitungsrichtung und Grösse des complexen dx unabhängig ist —; zu diesem wieder ein consecutiver etc.; zu jeder Linie der Curve eine consecutive etc.; vom Standpunkte der Punkterzeugung gehört zu jedem Punkte der Curve eine Linie (Tangente) derselben, vom Standpunkte der Linienerzeugung zu jeder Linie der Curve ein Punkt derselben; bei Vereinigung beider Standpunkte hat man auf jeder Linie zwei consecutive Punkte, durch jeden Punkt zwei consecutive Linien der Curve.

Consecutive Schnittpunkte.

Die Singularitäten nun, welche eine Curve darbieten kann, fügen sich diesen begrifflichen Auffassungen völlig ein, indem sie eintreten, wenn consecutive oder auch fremde Punkte oder Gerade sich decken. Plücker selbst hat in diesem Sinne nur die einfachsten Singularitäten behandelt, so eine analytische Definition des Wendepunktes aus der geometrischen

((4), p. 262) abgeleitet, die gewöhnlichen Doppel- und Rückkehrpunkte, den gewöhnlichen mehrfachen Punkt, auch die einfache Selbstberührung zweier Zweige in Betracht gezogen. Für solche niedrigeren Fälle ergab sich eine genügende Begründung in dem eben noch zu übersehenden Verhalten der Eliminationsresultanten zwischen Curve und Polaren oder der daraus abgeleiteten Curven, indem die Relationen zwischen den partiellen Differentialquotienten einer Curve an einer solchen Stelle noch direct herangezogen werden konnten ((5), zweiter Abschn. § 63 ff.). Sein Versuch (ibd.), nur die Anschauung zur Begründung von Eliminationsresultaten zu verwenden — indem man etwa einen gewöhnlichen Doppelpunkt durch das Zusammenziehen eines kleinen Ovals oder Aufrücken zweier hyperbolischer Zweige auf ihre gemeinsamen Asymptoten entstehen lässt und daraus auf die Erniedrigung der Klasse schliesst —, ist natürlich als Beweis unbefriedigend, da einmal die zugehörigen algebraischen Grenzprocesse undurchsichtig werden, und da weiterhin die mit der reellen Deformation im imaginären Gebiete eintretenden Vorgänge bei Plücker unbeachtet bleiben. Für beliebig-singuläre Stellen der Curve kann der Beweis für jene begriffliche Auffassung, und für die bezüglich der Elimination zu ziehenden Folgerungen vielmehr erst aus der Möglichkeit der rationalen Darstellung der Coordinaten irgend eines Zweiges von Punkten und Linien der Curve durch einen Parameter gewonnen werden. Insbesondere die letzteren Folgerungen sind erst ein Resultat der neueren Entwicklung der Theorie der singulären Punkte; sie werden im Referat über diese Theorie, Abschn. VI, besprochen werden.

Die Plücker'schen Formeln.

6. Die principielle Erfassung des dualistischen Charakters der Curve und ihre consequente Einführung ist eines der grössten von den vielen Verdiensten Plücker's um die Entwicklung der Geometrie. Aber ihrem Wesen nach doch nur um den Teil der Geometrie der Ebene, in welchem Punkt und Gerade von selbst als ausgezeichnete Gebilde auftreten: in der sogenannten projectiven Geometrie (s. Nr. 7), während die Geometrie der rationalen Transformationen von Punktgebilden, da sie die Geradenschar nicht in eine eben solche überführt, sich nur auf den einseitigen Standpunkt der Punktgeometrie stellen kann. Das Hauptergebnis der Plücker'schen Auffassung war (für die Curve dritter Ordnung schon in (4), dann in (5) zweiter Abschn.) die Erkenntnis der Rolle, welche die gewöhnlichen, sogenannten „notwendigen" (d. h. bei der Curve oder ihrer Reciprocalcurve immer vorhandenen) Singularitäten in Beziehung auf Ordnung und Klasse (Punkt- bez. Liniengrad) der Curve spielen. Diese Theorie der „Plücker'schen Gleichungen" bleibt immerhin auch für jene

umfassendere Geometrie, welche zu den algebraischen Functionen gehört, zum Teil von Wichtigkeit, insofern der Aufstellung der Klasse einer Curve $n$ter Ordnung die Zerlegung der Discriminante einer algebraischen Function einer Variabeln — geometrisch die Berechnung der Geschlechtszahl p — parallel geht, bis auf einen wichtigen Umstand, nämlich die andersartige Auffassung des Rückkehrpunktes. Vgl. hierüber d. Ref. Abschn. VI über die „singulären Punkte". — Ferner sei noch betont, dass diese Plücker'schen Betrachtungen der Geometrie der rationalen Transformationen noch insofern nützlich geworden sind, als sie dem Verständnis der Riemann'schen Behandlung von Doppel- und Rückkehrpunkten den Weg ebneten. War doch umgekehrt die Einführung der Zahl p in die Plücker'schen Formeln und deren Beweis mittelst des Satzes von der Erhaltung von p bei eindeutigen Transformationen eine der ersten Bemerkungen, welche Clebsch in dieser Beziehung (Journ. f. M. 64, 1864) machte.

c. Projective Auffassung.

7. Es kann nicht die Absicht sein, hier die Entwicklung dieser Auffassung eingehend zu verfolgen; wir werden uns vielmehr darauf beschränken, das zu bezeichnen, was aus ihr in die Theorie der algebraischen Functionen herübergenommen wurde. Historisches.

Es ist zunächst hervorzuheben, dass das Zurücktreten des Metrischen hinter die Betrachtung von Lagenverhältnissen, d. h. von Eigenschaften, welche bei Projection der Gebilde erhalten bleiben, von der reinen Geometrie aus (Poncelet, Traité des propriétés projectives 1822, etc.) seinen Weg in die analytische Geometrie nahm. Hier war es besonders Möbius, der die linearen Verwandtschaften für Ebene und Raum untersuchte (1827) und der zuerst die homogenen Coordinaten einführte (Baryc. Calcul 1827). Das analytische Gebiet, welches den projectiv-geometrischen Inhalt am reinsten wiedergiebt, das der homogenen Formen, hat aber erst Plücker (1829, J. f. M. V, sodann für die einfachsten Polarenfragen) betreten, und zwar unter Einführung auch der Liniencoordinaten, als Ausdruck der Dualität; und dieses Gebiet hat Hesse (von 1844 an) systematisch ausgestaltet*) — beide übrigens, ohne sich von der metrischen Grundlage und von den metrischen Anwendungen (welche für Plücker sogar ein Hauptziel waren) völlig frei zu machen, während wenigstens das Zweite bei Clebsch später gänzlich zurücktritt.

*) S. Clebsch: Zum Gedächtnis an Julius Plücker. Abh. der Göttinger Ges. d. W. XV, 1872. Noether: Otto Hesse. Ztschr. f. Math. und Phys., Lit. hist. Abt. Bd. XX, 1875.

Homogene Formen.

8. Für die Theorie der algebraischen Functionen (bis 1863) liegt das Interesse an dieser Begriffsentwicklung zunächst darin, dass sie wieder auf den schon von De Gua (Rf. I, E. 22) betretenen Weg führte, von den Besonderheiten, welche durch das Metrische, namentlich das Unendlichferne, in die Sätze und Methoden hineingekommen waren, abzusehen. Dies bezieht sich vor allem auf die Schnittpunktsätze, in welchen das Auftreten der unendlich-fernen Schnittpunkte schwerfällige Unterscheidungen nötig gemacht hatte, und Fassungen, welche nur obere Grenzen für die Zahl der endlichen Schnittpunkte, statt genauer Bestimmungen, gaben. Es bezieht sich auch auf die Methode der Multiplicitätsbestimmung, welche bei einem unendlich-fernen Schnittpunkte von der im Endlichen abwich, ohne mit ihr unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt gebracht zu sein. Es bezieht sich ferner auf die Aufstellung von identischen Relationen, in welchen aus demselben Grunde für die Grade der eintretenden ganzen Functionen der nicht-homogenen Variabeln immer nur obere Grenzen angegeben werden konnten. Es bezieht sich endlich auf die Untersuchung der zu den algebraischen Functionen gehörigen Differentialausdrücke.

Vom algebraischen Standpunkte aus genügt es zu diesem Zwecke völlig, etwa statt der zwei Grössen x und y drei Grössen x_1, x_2, x_3 einzuführen, welche nur in ihren Verhältnissen definirt sind:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

und, nach Multiplication mit Potenzen von x_3, nur homogene Ausdrücke und Relationen zu betrachten. Homogene ganze Ausdrücke von x_1, x_2, x_3 werden als „Formen“ bezeichnet; sie bilden den Gegenstand der, die projective Auffassung wiedergebenden „Formentheorie“, der Invariantentheorie der linearen Substitutionen. Aus denselben setzen sich nun die algebraischen „Functionen“ als Quotienten nullter Dimension in den Variabeln x_1, x_2, x_3 zusammen. Jedem auf die ursprünglichen Gleichungen bezüglichen Processe oder Satze entspricht ein solcher, der sich auf die neuen homogenen „Formen“ bezieht — nur dass jetzt, wo die Werte unendlich für x_1, x_2, x_3 nicht mehr vorkommen, in den homogenen Relationen alle exacten Gradzahlen bei den Dimensionen der Formen explicit erscheinen, und die Resultate nicht nur in mehr symmetrischer Art sich aussprechen, sondern dass sie, vermöge der Mittel der Theorie der homogenen Formen, vielfach auch durchsichtiger in Bezug auf ihren Zusammenhang werden. Wie weit diese Vorteile ausgenutzt worden sind, ist erst im Laufe des Referats nachzuweisen. —

Die geometrischen Auslegungen, welche man jener Substitution geben

kann, sind für die hier in Frage kommende Anwendung gleichgültig. Es sei daher nur erwähnt, dass man am einfachsten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ als die Gleichungen der Seiten eines beliebig gegebenen Dreiecks, und x. y. y x als die Parameter dreier Strahlbüschel, mit je einem der Eckpunkte als Scheitel, deutet — die drei Verhältnisse also als Doppelverhältnisse je der vier Strahlen, welche von einem Eckpunkte nach den beiden anderen Eckpunkten, nach einem beliebig zu wählenden Einheitspunkte, und nach dem zu bestimmenden Punkte hinlaufen. —

Das Symmetrische der homogenen Coordinaten hat die Theorie der algebraischen Functionen in noch einer Beziehung gefördert: während das alte System der zwei Variabeln in $f(x, y) = 0$ es nahe legte, diese beiden Grössen ungleichartig aufzufassen, die eine als unabhängige Variable, die andere als algebraische Function derselben, musste vermöge einer Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ das ganze Gebiet der dieser Gleichung genügenden Wertsysteme, das algebraische Gebilde an sich, ins Auge genommen werden — eine Auffassung, welche aber natürlich auch ohne die homogenen Coordinaten sich entwickeln konnte und so bei Riemann sich entwickelt hat. Sie ist, nach Kronecker*), „sachgemässer", als die seinem zahlentheoretischen Standpunkte näher gelegene, welche alle algebraischen Functionen als von einer Unbestimmten abhängig betrachtet.

Endlich hat die Grundidee der projectiven Geometrie: die Gebilde, welche durch lineare Transformationen aus einander hervorgehen, zusammenzufassen und auf ihre gemeinsamen, durch diese Transformationen unzerstörbaren Eigenschaften hin zu untersuchen, befruchtend auf die Geometrie der rationalen Transformationen gewirkt: der Klassenbegriff Riemann's ist nur eine Erweiterung jener Idee; in der, unter V. B zu besprechenden Vorlesung Riemann's werden die homogenen Formen explicit eingeführt; für Clebsch war, wie wir unter V. C u. D (vgl. auch V. E Nr. 51) berichten werden, der projective Standpunkt, auch bezüglich der algebraischen Functionen, ein notwendiger Durchgangspunkt: und die spätere invariante Richtung in jener höheren Geometrie (s. Ref. VII) schliesst direct an die projective an.

9. A. Cayley.

Differentialausdrücke von Aronhold.

(1) On the reduction of $du / \sqrt{U}$, when U is a function of the fourth order. Cambr. and Dubl. Math. J. I, 70—73, 1846. (Collect. Math. Papers I, Abh. 33).

(2) On the cubic transformation of an elliptic function. Philos. Magazine XV, 363—364, 1858. (Papers III, Abh. 210).

---

*) Einleitung zum Aufs. über die Discriminante, J. f. M. 91.

(3) Sur quelques formules pour la transformation des intégrales elliptiques. J. f. M. 55, 1858: Papers IV, Abh. 235 (s. auch F. Brioschi, Annali di Mat. III, 1860).
Ch. Hermite.
(1) Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées. Prem. Mém. J. f. M. 52, 1856 (dat. 1854. s. auch Cayley. J. f. M. 50, S. 287 und (3). J. f. M. 55, S. 24).
(2) Sur la transformation du troisième ordre des fonctions elliptiques. J. f. M. 60 p. 304. 1861.
S. Aronhold.
(1) Algebraische Reduction des Integrals $\int F(x, y)dx$, wo $F(x, y)$ eine beliebige rationale Function von x, y bedeutet, und zwischen diesen Grössen eine Gleichung dritten Grads von der allgemeinsten Form besteht, auf die Grundform der elliptischen Transcendenten. Berl. Monatsber. 1861.
(2) Ueber eine neue algebraische Behandlungsweise der Integrale irrationaler Differentiale von der Form $\Pi(x, y)dx$, in welcher $\Pi(x, y)$ eine beliebige rationale Function ist, und zwischen x und y eine allgemeine Gleichung zweiter Ordnung besteht. J. f. M. 61, S. 95—145, Mai 1862.
F. Brioschi.
(1) Sur la théorie des formes cubiques à trois indéterminées. C. R. LVI, 1863.

Cayley, Hermite, Aronhold (1) und Brioschi sind insofern hier zu erwähnen, als ihre oben genannten Arbeiten die ersten sind, welche die Invariantentheorie der homogenen „Formen" benutzen, um Differentialausdrücke, welche zu allgemeinen algebraischen Gleichungen gehören — bei Cayley und Hermite zur binären Form vierter Ordnung, bei Aronhold und Brioschi (1) zur ternären dritter Ordnung —, auf eine Normalform des elliptischen Differentials erster Gattung zu reduciren. Bei Cayley (1) geschieht das noch mittelst linearer Transformation, während Hermite schon mittelst invariantentheoretisch bestimmter Transformation dritter Ordnung auf die Eisenstein'sche (Unters. über unendl. Doppelproducte. § 5, Cr. J. f. M. 35) — die sogenannte Weierstrass'sche — Normalform kommt. Hervorgehoben sei noch, dass auf eine Frage Aronhold's hin zu dessen Note (1) Weierstrass die Bemerkung zufügt, dass von allgemeinen Curven nur die dritter Ordnung auf elliptische Integrale führen, „wie aus Riemann und Briot und Bouquet direct folge". Dies ist wohl die erste nachweisliche Spur einer Verwertung der Riemann'schen Betrachtungen für die Geometrie.

In viel höherem Grade wird bei Aronhold (2) von der projectiven Auffassung Gebrauch gemacht.

Derselbe bemerkt zunächst, dass, wenn man homogen macht, wobei ein Differentialausdruck von der nullten Dimension wird, mehrere sonst ge-

trennt zu behandelnde Differentialausdrücke unter demselben Gesichtspunkte erscheinen: so sind $dx/xf'(y)$ und $dx/f'(y)$ als specielle Fälle von $x_3 d\varpi/(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3)$ zu betrachten, wo $d\varpi$ aus $dx/f'(y)$ durch die Substitution x_1/x_3, x_2/x_3 an Stelle von x, y hervorgeht. Bei der Ausführung dieser Operation tritt der weitere Gedanken ein, die Coordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 eines ganz willkürlichen Punktes einzuführen und zu schreiben:

$$d\varpi = \frac{dx}{f'(y)} = \frac{x_3^{n-3} \Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{\Sigma_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \xi_i},$$

wenn $x:y:1 = x_1:x_2:x_3$ gesetzt wird und $F(x_1 x_2 x_3) = 0$ ist, wo F eine ganze homogene Function, eine „Form", $n$ter Dimension in x_1, x_2, x_3 ist.

Dieser Gedanke erlaubt, auf leichte Weise eine neue unabhängige Variable $\lambda = v/w$ einzuführen — wo v und w ganze Formen gleicher Dimension in x_1, x_2, x_3 sind, λ also eine „Function (nullter Dimension) von x_1, x_2, x_3, d. h. von x, y wird —, indem man

$$\xi_1 = v_2 w_3 - v_3 w_2 \text{ etc.} \left(\text{wo } v_1 = \frac{\partial v}{\partial x_1} \text{ etc.}\right)$$

setzt. Nimmt man z. B. $v = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$, $w = \Sigma_i F_i(\xi) . x_i$, so wird, wenn $F(x_1 x_2 x_3)$ eine Form von der zweiten Dimension:

$$\int \frac{\Sigma \pm \xi_1 x_2 dx_3}{\sum\limits_i u_i x_i . \sum\limits_i F_i(x) \xi_i} = \log \frac{w}{v}.$$

Hier erhält man also den Wert des Integrals in allgemeiner Form, ohne dass man auch nur die Wurzeln von $v = 0$, $F = 0$ vorher getrennt hätte. Allgemeiner kann man mit Aronhold den Vorzug seiner Einführung des Homogenen so bezeichnen, dass sie „ohne grössere Complication symmetrische Resultate und Vermeiden unnötiger Irrationalitäten" bewirkt.

Aronhold verwendet diese Darstellung zur Erweiterung der gewöhnlichen Partialbruchzerlegung, wobei er in den Reductionen von $\int \frac{F}{\Phi} \frac{dx}{f'(y)}$, wo $f(x, y) = 0$, vor allem unterscheiden will, was nur mit Hülfe von $f = 0$, was ohne $f = 0$ ausführbar ist, und das zweite möglichst weit zu treiben sucht. Mit Hülfe von $f = 0$ ist Φ auf ein Product von Geraden zu reduciren, alles Weitere geht ohne $f = 0$. Auch die Symbolik der Invariantentheorie findet dabei Verwendung, indem es, weil in jenem Integral die Constanten von F nur linear eingehen, genügt, statt F $m$te Potenzen von linearen Functionen zu nehmen und dann das Resultat symbolisch auszulegen. Die von Aronhold beabsichtigte analoge Durchführung für alle hyperelliptischen Differentialausdrücke ist nicht erfolgt.

Höhere Verwandtschaften in der Ebene.

10. Nachdem wir den projectiven Standpunkt besprochen haben, soll hier auch das Wenige erwähnt werden, was bis 1863 von Seiten der Geometrie über die lineare Verwandtschaft hinaus in der Richtung der allgemeinen eindeutigen geleistet worden ist. Es finden sich Verwandtschaften, welche sich auf die ganze Ebene, nicht etwa auf eine einzige Curve derselben, beziehen: und zwar wird die quadratische Verwandtschaft, bei welcher den Geraden einer Ebene je Kegelschnitte durch drei feste Punkte der andern Ebene entsprechen, von verschiedenen Gesichtspunkten aus eingeführt: analytisch bei Plücker (Cr. J. f. M. V. 1829: $x' = 1/x$, $y' = 1/y$) und Magnus (J. f. M. VIII. 1831, durch 2 bilineare Gleichungen), geometrisch bei Poncelet (Traité des prop. proj. 1822, conjug. Punktepaare in Bezug auf zwei Kegelschnitte) und Steiner (Syst. Entw. 1832, windschiefe Projection); sowie später deren Specialisirungen als „Princip der reciproken Radienvectoren" (W. Thomson und Liouville in Liouv. J. X. 1845, u. XII.); als „Kreisverwandtschaft" (Möbius, 1853). Bei Magnus finden sich (in seiner Samml. v. Aufg. und Lehrs. Berl. 1833, Einleitung u. §§ 50, 63) Spuren von successiven quadratischen Transformationen.

Begrifflich wurde das allgemeine eindeutige Entsprechen zweier Ebenen, mit Hervorheben dessen, was es vor dem linearen auszeichnet, erst 1863 durch Cremona formulirt (Sulle transformazioni geometriche delle figure piane, Mem. d. Acc. di Bologna, Ser. II., t. 2, 1863 u. t. 5, 1865). Dieses Begriffliche besteht darin, dass den Geraden der einen Ebene in der anderen Ebene eine lineare zweifach-unendliche Schar von Curven $n$ter Ordnung entsprechen muss, welche so viele Ausnahmepunkte gemein haben, dass sich zwei der Curven im allgemeinen nur in je einem beweglichen Punkte, im besonderen Fall in unendlich vielen Punkten, treffen können. Der Inhalt der Cremona'schen Arbeit besteht in der Aufstellung der Kriterien für diese Forderungen, Kennzeichnung der Ausnahmepunkte (Fundamentalpunkte) als solcher, welchen je unendlich viele Punkte (eine Fundamentalcurve) entsprechen (dieses aber auch schon bei Magnus, „Sammlung etc."), und in der Angabe einer Reihe von Eigenschaften dieser Gebilde und gewisser specieller, den Forderungen genügender Systeme von Transformationen.

Wir haben diese Arbeiten hier schon erwähnt, obwohl sie Clebsch bei seinen ersten bezüglichen Aufsätzen 1863 noch unbekannt waren; denn die darin entwickelten Begriffe haben auf die Entstehung des Abschnitts über Transformation in den „Abel'schen Functionen" von Clebsch-Gordan (1866) eingewirkt.

11. Man kannte aber in jener Zeit auch schon höhere ternäre Transformationen, welche nicht zwei Ebenen, sondern nur zwei Curven ein-eindeutig in einander überführen: nämlich die zwischen einer Curve und ihrer Reciprocalcurve, und die, welche zwischen der Hesse'schen, Steiner'schen und Cayley'schen Curve einer Grundcurve nter Ordnung (letztere für $n > 3$) besteht, die von Steiner (J. f. M. 47. 1852), Cayley, Cremona, Clebsch u. s. w. behandelt worden ist. Obwohl auch hierbei schon wesentliche Eigenschaften der allgemeinen eindeutigen Curventransformation zur Geltung kommen, wie Auflösung eines Doppelpunktes etc., liessen sie sich doch schwer herauslesen, weil sie sich in diesen Beispielen mit besonderen Eigenschaften compliciren. Dagegen haben sich die Eliminationsmethoden der Formentheorie, welche noch grössere Dienste zu leisten berufen waren, an diesen verwickelten Problemen herausgebildet. — Eine andere hierher gehörige Transformation ist die Beziehung einer Curve, deren Coordinaten sich als rationale Function eines Parameters darstellen lassen, auf die Punkte einer Geraden vermittelst dieses Parameters. Sie tritt zuerst — von speciellen Beispielen bei Cramer und Euler abgesehen — bei Möbius, Baryc. Calcul (1827) und in Salmon's Higher plane curves, 1852 (auch bei Jacobi, J. f. M. 32, pag. 180, 1845), auf. Ferner die Beziehung zwischen den Punkten einer Curve und denen ihrer Evolute; endlich die Hesse'sche Beziehung zwischen einer ebenen Curve vierter und einer Raumcurve sechster Ordnung (J. f. M. 49).

Eindeutige Transformation zweier Curven.

d. Kanonische Gleichungsformen und Constantenzählung.

12. Von den Methoden, welche die geometrische Forschung der geometrisch-algebraischen Seite der algebraischen Functionen zugeführt hat, ist formal keine von grösserem Einfluss geworden, als der Gedanke, an Stelle der Gleichungsformen „kanonische" Formen zu betrachten, d. h. solche, welche sich aus zusammengesetzteren Ausdrücken nach gegebener Vorschrift aufbauen. Auch hier ist wieder Plücker in erster Linie anzuführen. Die frühesten hierher gehörigen, an Gergonne anknüpfenden Operationen bestanden in der Aufstellung von Symbolen für lineare Ausdrücke der Coordinaten und der linearen Zusammensetzung derselben, an Stelle von Eliminationen: auf diese Weise entstand eine einfache Chordaltheorie der Kegelschnitte (Plücker (1), erster Band). Durch Ausdehnung der abgekürzten Darstellung auf höhere Formen, insbesondere auf zerfallende Formen, entstand bei Plücker nach und nach eine volle Theorie der Kegelschnitte ((1), zweiter Band, (Pascal'scher Satz, wie schon im ersten Band § 392, Anm.) und (4)). Viele Partien der Theorie

Kanonische Formen.

der Curven dritter Ordnung, insbesondere die ihrer Asymptoten ((4) und (5)), (weniger die der Wendepunkte) erfuhren eine Erweiterung; ebenso die Theorie der Curven vierter Ordnung in Bezug auf ihre Doppeltangenten. Plücker lehrte, „die Gleichung eines Gebildes aus abgekürzten Ausdrücken zusammenzusetzen und dann in dieser Form der Gleichung zu lesen" (Clebsch a. a. O.); er erkannte, dass einfache Constructionen der Geometrie auch zu einfachen Gleichungsformen führen müssen. Dass ihm die algebraische Form vorzugsweise beim Beweise geometrischer Sätze als Hülfsmittel dient, nicht aber die algebraischen Zusammenhänge der Formen als solche Gegenstand seines Interesses sind — wie später bei Hesse —, dies war für die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen kein Nachteil: man verdankt diesem Umstande gerade „das Zusammenrücken und -wachsen von Construction und analytischer Darstellung, wodurch man über die grossartigen Betrachtungsweisen der Analysis gebietet, ohne die unmittelbare Anschauung aufzugeben" (Plücker's Vorrede zu (4)). So zeigt sich die Analysis als „eine Wissenschaft, die selbständig für sich dasteht, während die Geometrie bloss als die bildliche Deutung gewisser Beziehungen aus dem grossen Ganzen erscheint" (Plücker's Vorrede zu (1), zweiter Band). Dieser Charakter ist in die geometrisch-algebraische Richtung der algebraischen Functionen völlig übergegangen.

Constantenzählung.

13. Bei der Begründung der Existenz einer kanonischen Form ist Plücker zu einem „Princip" gekommen, das eine Erweiterung der in Nr. 2 besprochenen Schnittpunktbeweise ist, aber in dieser Erweiterung im allgemeinen noch weniger gerechtfertigt erscheint, als jene. Plücker nimmt einfach die Uebereinstimmung der in einer vorgeschriebenen kanonischen Gleichungsform implicit vorhandenen Anzahl der Constanten mit der Anzahl der Constanten in einer allgemeinen Gleichungsform als genügend an für die Folgerung, dass sich diese in jene überführen lasse. Er spricht diese Betrachtungsweise ausdrücklich als das Princip an, das seinen Werken (4) und (5) durchaus zu Grunde liege. Zwar war ihm bekannt, dass ausnahmsweise die wirkliche Zahl der in einer kanonischen Form vorhandenen Constanten von der scheinbaren verschieden sein kann, d. h. dass die Transformation dadurch im allgemeinen Falle unmöglich werden könnte, dass sie in besonderen Fällen, wenn überhaupt, sogleich auf unendlich viele Weisen ausführbar wird. Aber auch das Vorhandensein dieser Ausnahmen untersucht er gewöhnlich nicht. Abgesehen davon kommt Plücker auch zu einer unrichtigen Umkehrung des Princips. Ein bekanntes Beispiel ist die Theorie der Doppeltangenten der Curve

vierter Ordnung C_4. Nachdem er gezeigt hat, dass eine Ternärform vierter Ordnung immer in die Form gesetzt werden könne:

$$C_4 \equiv pqrs + \mu\Omega^2$$

(wo p, q, r, s linear, Ω quadratisch ist), weil beide Seiten 14 Constanten enthalten — wobei, da nicht unendlich viele Doppeltangenten existiren, der Ausnahmefall nicht eintreten kann —, schliesst er so: da es hiernach endlich viele Systeme p, q, r von je drei Doppeltangenten der C_4 giebt, welche zu einer kanonischen Form von C_4 der obigen Art führen, so muss also umgekehrt jedes System von drei Doppeltangenten der C_4 dies leisten. Hierbei ist vergessen, dass die Systeme sich ungleichartig verhalten könnten, d. h. algebraisch gesprochen, dass die zugehörige algebraische Gleichung höheren Grades reductibel sein könnte — wie sie es hier auch wirklich ist. Dieses Versehen hat sich im Gange der Wissenschaft rasch bemerklich gemacht (s. z. B. V. Nr. 18), während der Mangel an Vorsicht im Gebrauch des an sich wichtigen Abzählungsprincips zum Nachteil dieses Wissenszweiges nicht beanstandet wurde. S. auch V. Nr. 16: Plücker über Wendepunkte der C_3, Nr. 18: Hesse über Berührungskegelschnitte bei C_4, wo dieselbe ungenügende Schlussweise vorkommt, aber mit zufällig richtigem Resultate, wie sich auf andere Weise zeigen lässt.

e. Berührungscurven.

Für die Grundcurve dritter Ordnung f_3:

Mac Laurin, De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus. 1748, vgl. Rf. I D, Litt.

J. Plücker, s. oben a. (4).

O. Hesse.

(1) Ueber die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variabeln. Cr. J. f. M. Bd. 28, 1844.

(2) Ueber die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung. Ibd. Bd. 28, 1844.

(3) Algebraische Auflösung derjenigen Gleichungen neunten Grades etc. Ibd. 34, 1846.

(4) Ueber Curven dritter Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Curven in drei verschiedenen Punkten berühren. Ibd. 36, 1847.

J. Steiner,

(1) Geometrische Lehrsätze. Cr. J. f. M. Bd. 32, 1845.

(2) Sätze über Curven zweiter und dritter Ordnung. Ibd. 32, 1845.

Für die Grundcurve vierter Ordnung f_4:

J. Plücker, s. oben a. (5).

G. Salmon, Treatise on the higher plane curves. I. ed., Dublin 1852.

J. Steiner,
(3) Eigenschaften der Curven vierten Grades rücksichtlich ihrer Doppeltangenten. Cr. J. f. M. Bd. 49, Oct. 1852.
O. Hesse,
(5) Ueber Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbes. auf Curven vierter Ordnung. Cr. J. f. M. 49, Ap. 1853.
(6) Ueber die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung. Ibd. 49, Aug. 1853.
(7) Zu den Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung. Ibd. 55, Dez. 1857.

Berührungscurven bei der Curve dritter Ordnung.

14. Die Theorie der Berührungscurven einer gegebenen Grundcurve f, d. h. der Curven, welche durch gegebene Punkte von f gehen und ausserdem nur f in gegebener Ordnung berühren, ist dasjenige geometrische Gebiet, in welchem zuerst die functionentheoretischen Begriffe zur Anwendung kamen (1863), das Gebiet nämlich, welches von Riemann als mit dem gewisser specieller algebraischer Functionen zusammenfallend erkannt wurde (1857 und 1862). Da über diese Betrachtungen zu berichten sein wird, ist es zunächst nötig, den Inhalt und damaligen Stand der geometrischen Theorie zu skizziren.

Was die Grundcurve f_3 von der dritten Ordnung angeht, so sind mehrere Gruppen von Problemen behandelt worden, nämlich in Bezug:

α) auf Berührung erster Ordnung: Tangenten an f_3 von einem Punkt der Curve aus, „correspondirende" Punkte, Kegelschnitte, welche f_3 in drei Punkten berühren;

β) Berührung zweiter Ordnung: Theorie der Inflexionspunkte;

γ) sechspunktig berührende Kegelschnitte;

δ) die Steiner'schen Polygone.

Berührung erster Ordnung.

15. Was Nr. 14α) angeht, so wurden die von einem Punkte P der Curve ausgehenden vier Tangenten an f_3 betrachtet; das vollständige Viereck ihrer vier Berührungspunkte ($A_1, \ldots, A_4$), dessen drei Diagonalpunkte D_I, D_{II}, D_{III}, den drei Anordnungen ($A_1 A_2$; $A_3 A_4$), ($A_1 A_3$; $A_2 A_4$), ($A_1 A_4$; $A_2 A_3$) entsprechend, ebenfalls auf der Curve liegen; sodann die eindeutige Zuordnung dieser drei Anordnungen zu den ($A'_1 A'_2$; $A'_3 A'_4$), ($A'_1 A'_3$; $A'_2 A'_4$), ($A'_1 A'_4$; $A'_2 A'_3$), welche zu irgend einem andern Punkte P' von f_3 gehören, indem von dem Viereck ($A_1 A_2$; $A'_1 A'_2$) ebenfalls zwei Diagonalpunkte E_I, E'_I auf der Curve liegen, u. s. w. Diese Theorie hat mittelst der allgemeinen Schnittpunktsätze schon Mac Laurin abgeleitet (vgl. auch Poncelet, Analyse des transversales, Cr. J. f. M. 8): er hat hieraus auf die drei getrennten einfach-unendlichen Systeme von Paaren correspondirender Punkte geschlossen, welche auf der f_3 liegen. Zu einem System gehören hierbei $A_1 A_2$: $A_3 A_4$; $A'_1 A'_2$: $A'_3 A'_4$; $D_I P$, $D'_I P'$, $E_I E'_I$.

Auf ganz neue, algebraische Weise ist diese Theorie durch Hesse in (1), (2), eingehender in (4), begründet worden*). Von einem Kegelschnittnetz

$$\varkappa f + \varkappa' f' + \varkappa'' f'' = 0$$

ausgehend, erhält er als Ort der für alle Kegelschnitte desselben conjugirten Punktepaare die Jacobi'sche Curve des Netzes, eine Curve f_3 von der dritten Ordnung; und er stellt sich nun die umgekehrte Aufgabe, aus einer so definirten f_3 das zugehörige Netz zu finden. Es gelingt ihm dies formentheoretisch, indem er aus f_3 und der aus den zweiten partiellen Differentialquotienten von f_3 gebildeten Determinante H_3 ($H_3 = 0$ heisst ihre „Hesse'sche Curve") eine Form φ_3 zusammensetzt, deren Hesse'sche Determinante wiederum f_3 selbst ist, d. h. deren erste Polaren die Kegelschnitte des Netzes sind. Aber diese Aufgabe lässt drei Lösungen zu: so erhält Hesse die drei Systeme von Punktepaaren auf der f_3, von denen vorher die Rede war. Hier also geht Hesse auf eine kanonische Form von f_3 aus, die sich als eine symmetrische dreireihige Determinante aus Elementen darstellt, welche in den Coordinaten linear sind. Zum Unterschied von Plücker aber beweist er die Existenz dieser Form mittelst algebraischer Processe. Hesse untersucht ferner (4) die Transformation in sich, welcher f_3 vermöge der Punktepaare eines Systems unterworfen werden kann, und gelangt so von drei auf einer Geraden liegenden Punkten zu drei Punkten, in welchen f_3 von einem Kegelschnitt berührt werden kann: auch hiervon existiren also drei getrennte, je zweifach-unendliche, Systeme: zwei Kegelschnitte gehören zu einem System, wenn ihre sechs Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt liegen (s. auch (5)).

Hervorzuheben ist hierbei der scharfe Systembegriff, welcher alle Berührungscurven gleicher Ordnung von f_3, die sich durch lineare Constructionen aus einander herleiten lassen, zusammenordnet. Dies ist eine Frucht der Anwendung des Gedankengehaltes der Theorie der algebraischen Gleichungen auf die Geometrie, die von Hesse zuerst in grösserem Masse bethätigt worden ist (1).

Zu bemerken ist auch die Specialisirung beim Eintreten eines Doppelpunktes der f_3 (4). Hesse findet, dass dann nur noch eines der drei Systeme correspondirender Punkte übrig bleibt.

16. In Bezug auf das Problem Nr. 14 β) hatten schon De Gua (I. Nr. 23) und Mac Laurin (später Poncelet) angegeben, dass eine durch

Berührung zweiter Ordnung.

*) Ueber die Beziehungen zur Elimination und Formentheorie bei Hesse s. Noether, „Otto Hesse", Ztschr. f. Math. u. Phys. XX. 1875.

je zwei Wendepunkte von f_3 gehende Gerade die f_3 noch in einem dritten solchen trifft. Auf diesen Satz hätte Plücker seine kanonische Gleichungsform $f_3 = pqr - s^3$ stützen können: aber Plücker verfährt gerade umgekehrt (Plücker (4). 3. Abschn. § 8): die Form leitet er aus der Constantenzählung ab und daraus den geometrischen Satz. Die Schlussweise enthält also wieder die beiden in Nr. 13 angegebenen Mängel: und während Plücker die Zahl 9 der Wendepunkte der f_3 genau angeben kann, sind seine Gruppirungssätze nur zu halten durch den Satz über die Wendepunkte in gerader Linie. Bezüglich der Gruppirung spricht Plücker von den zwölf die Wendepunkte verbindenden Geraden und sagt, dass das Problem der Ueberführung von f in jene Form „auf Gleichungen führe, die „„mindestens““ den zwölften Grad erreichen“. Es geht daraus hervor, dass die Existenz der zwölf Geraden für Plücker noch nicht aussagte, dass das Problem eine algebraische Resolvente genau zwölften Grades haben müsse.

Dieser Zusammenhang ist erst von Hesse (1) erfasst worden. Hesse ging zugleich einen Schritt weiter, indem er die Gruppirung der zwölf Geraden in vier Dreiecke, die er übrigens auch aus der Plücker'schen Tabelle leicht ablas, vornahm (wie auch schon Steiner (2)) und daraus die Existenz einer Resolvente vierten Grades erschloss, nach deren Lösung nur noch reine kubische Gleichungen bleiben. Und endlich zeigte Hesse auf formentheoretischem Wege sowohl die Existenz dieser Gruppirungen, als den Weg zur Bildung dieser Gleichungen, und auch ihre Verwendbarkeit für die Ueberführung in eine neue kanonische Form, bei welcher eines der vier Dreiecke ausgezeichnet ist, und welche nur die ungeraden Potenzen der Variabeln enthält. Die Verwendung der geometrischen Ideen umgekehrt für die Algebra in (3) wird dort auf eine Anregung Jacobi's zurückgeführt.

Steiner giebt in (2) noch Erweiterungen der Inflexionssätze, welche aber durch eindeutige quadratische Ebenentransformation aus jenen folgen.

Weitere Probleme von Nr. 14.

17. Die Gruppirungsverhältnisse im Problem γ) Nr. 14 ergeben sich durch Verbindung der Betrachtungen von α) und β). Steiner hat in (1) zuerst diejenigen 27 Kegelschnitte angegeben, welche die f_3 sechspunktig berühren. Dass ihre Berührungspunkte gefunden werden, indem man von den Wendepunkten aus die weiteren noch möglichen Tangenten an f_3 zieht, hat Hesse in (4) gezeigt, wie er auch deren gegenseitige Gruppirung richtig gestellt hat.

Endlich sind hier noch die Steiner'schen Polygone zu erwähnen (Steiner (1)). Als Erweiterung der ad α) erwähnten, der

Curve f_3 eingeschriebenen vollständigen Vierseite bemerkt Steiner das Auftreten geschlossener Polygone mit gerader Seitenzahl, welche der f_3 eingeschrieben sind, und deren Seiten abwechselnd durch zwei feste Punkte von f_3 gehen, und zeigt die Construction für das Sechs- und Zehneck; ferner auf quadratischer Transformation beruhende Verallgemeinerungen. Dies Problem wurde für Clebsch zum Ausgangspunkte seiner Anwendung der elliptischen Functionen auf die Geometrie.

Doppeltangenten und Berührungskegelschnitte der Curve vierter Ordnung.

18. Von besonderer Bedeutung für die Theorie der algebraischen, namentlich der Wurzelfunctionen sind die Untersuchungen der Geometer über Berührungscurven bei den Curven vierter Ordnung geworden. Die Anzahl 28 der Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung f_4 war von Plücker mittelst seiner Singularitätengleichungen gefunden worden. Die von Plücker in (5) (s. Nr. 13) aus der kanonischen Gleichungsform $f_4 \equiv pqrs + \mu\Omega^2$ abgeleiteten unrichtigen Zahlen für die Gruppirungen der Doppeltangenten in Paare und Quadrupel wurden von Hesse (zuerst in J. f. M. Bd. 40, Brief an Jacobi), Salmon und Steiner richtig gestellt. Bei allen dreien ist der Ausgangspunkt derselbe, wenn auch die Darstellungsform verschieden ist. Sie untersuchen ein System von Kegelschnitten:

1) $$A' \equiv A + 2\lambda B + \lambda^2 C = 0,$$

welche

2) $$f_4 \equiv AC - B^2$$

in je vier Punkten berühren. Während diese Eigenschaft bei Steiner offenbar zur Definition der f_4 dient, gehen Salmon und Hesse (5) von der kanonischen Form 2) aus, und zwar beide genau in dem Plücker'schen Sinne: sie erschliessen die Darstellung der Curvengleichung in der Form 2) zunächst nur aus der Constantenzählung, ohne zu beweisen — so einfach es auch mit Hülfe der Schnittpunktsätze wäre —, dass diese Form an die Existenz jedes vierpunktig berührenden Kegelschnittes A geknüpft werden kann. Später beweist übrigens Salmon, dass jedes Doppeltangentenpaar, für A genommen, f_4 in die Form 2) zu setzen gestattet.

Wegen der Identität 3)

$$(A + 2B\lambda + C\lambda^2)(A + 2B\mu + C\mu^2) - [(A + B\lambda) + (B + C\lambda)\mu)]^2 \equiv (\lambda - \mu)^2 f_4$$

geht durch die acht Berührungspunkte je zweier Kegelschnitte des Systems 1) wieder ein Kegelschnitt; die Berührungspunkte des Systems 1) lassen sich also linear aus denen irgend eines Gliedes desselben ableiten. Dies ist es eben, was den in Nr. 15 hervorgehobenen Hesse'schen „Systembegriff" ausmacht.

Die nächsten Folgerungen waren:

Unter den Kegelschnitten jedes Systems 1) giebt es sechs zerfallende, also sechs Doppeltangentenpaare, welche zusammen — nach Steiner's Ausdruck — eine „Gruppe" bilden. Solcher „Gruppen" oder Kegelschnittsysteme giebt es 63. Die Untersuchung des Netzes, welches aus A, B, C entsteht, hat Steiner in Angriff genommen und ferner eine Reihe von Sätzen über Systeme, aus solchen Gruppen gebildet, ausgesprochen. Aus 3) ergiebt sich, indem man $f_4 = 0$ setzt und für λ drei verschiedene Werte annimmt, dass zwischen irgend drei Kegelschnitten des Systems 1), etwa A, C, A' eine Beziehung der Art besteht:

$$\sqrt{A'} = \sqrt{A} + \lambda\sqrt{C},$$

zwischen drei Doppeltangentenpaaren einer Gruppe also die Beziehung:

$$4) \qquad \sqrt{x\xi} + \sqrt{y\eta} + \sqrt{z\zeta} = 0,$$

wie schon Salmon und Hesse gesehen haben. Auf diese erste Beziehung zwischen „Wurzelfunctionen" wird späterhin zurückzukommen sein (s. V, B (Riemann's Vorlesung) und IX, über Wurzelfunctionen).

Die Hesse'schen Untersuchungen über die zwei Arten von Berührungscurven dritter Ordnung derselben.

19. Das System 1) kann man erhalten, indem man f_4 in die Form 2) setzt und die Determinante $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ seitlich und unten mit $-\lambda, 1$ rändert. Dieses Princip, f_4 in Form einer symmetrischen Determinante anzuschreiben und daraus durch einreihige Ränderung ein Berührungscurvensystem herzuleiten, hat Hesse, wie auf die f_3, so auch auf die f_4 in noch mehreren Formen angewendet, um die beiden Arten von Berührungscurven dritter Ordnung bei Curven vierter Ordnung f_4 zu erhalten: diejenigen erster Art, für welche die sechs Berührungspunkte niemals auf einem Kegelschnitte liegen, und die zweiter Art, für welche dieses immer der Fall ist. Nimmt man A als linear, C als vom dritten, B vom zweiten Grade an, so ergeben sich, je einer der 28 Doppeltangenten A zugehörig, 28 getrennte ∞^3-Systeme von sechspunktig berührenden C_3 zweiter Art (Hesse (5)). Zu einer umfassenderen Gruppirungstheorie aber ist Hesse ((5) und besonders (6)) dadurch geführt worden, dass er

$$f_4 = \Sigma \pm u_{11}\, u_{22}\, u_{33}\, u_{44}$$

setzte, wo die $u_{ik} = u_{ki}$ lineare Functionen der Coordinaten y sind. Es ist ihm gelungen, aus dieser kanonischen Form nicht nur die Theorie aller ∞^3-Systeme erster Art von berührenden C_3 zu entwickeln, sondern auch einen Algorithmus abzuleiten, welcher die ganze Berührungstheorie für die f_4 in sich enthält.

Hesse's Gedankengang, auf welchen wir im Abschnitt IX über Wurzelfunctionen zurückzugreifen haben, ist der:

Die Determinante $\Sigma \pm u_{11} \ldots u_{44} = \Delta_4(y)$ wird als Determinante eines Netzes

$$F_2(x) \equiv y_1 f(x_1, \ldots, x_4) + y_2 f'(x_1, \ldots, x_4) + y_3 f''(x_1, \ldots, x_4)$$

von Flächen zweiter Ordnung durch acht conjugirte Punkte 1, 2, ..., 8 des Raumes aufgefasst. Den Punkten y der Ebene von $\Delta_4(y)$ entsprechen die Flächen des Netzes F_2, den Punkten II von $\Delta_4 = 0$ die Kegelflächen im Netz, insbesondere die Spitzen P derselben, welche eine Raumcurve sechster Ordnung R_6 bilden. Vier auf einer Geraden gelegenen Punkten II von Δ_4 entsprechen vier Kegelspitzen eines Büschels des Netzes F_2; insbesondere entsteht eine Doppeltangente an Δ_4, wenn die Grundcurve dieses Büschels zwei Doppelpunkte erhält, also wenn sie zerfällt — was 28 Doppeltangenten liefert, mit den Symbolen (12), (13), ..., (78), den Verbindungslinien der Punkte 1, ..., 8 entsprechend.

Die eindeutige Transformation, welche die Curven $\Delta_4(y)$ und $R_6(x)$ verbindet, hat die Form

$$x_1 : \ldots : x_4 = U_{i1} : \ldots : U_{i4} \quad (U_{ik} \text{ Unterdeterminanten von } \Delta_4 \text{ nach } u_{ik}),$$
$$\text{oder } x_i x_k = \rho U_{ik}.$$

Da hiernach die $y_1^3, y_1^2 y_2, \ldots$ lineare Functionen der x_i, x_k werden, so entspricht den Schnitten von R_6 mit allen Flächen zweiter Ordnung der Schnitt von Δ_4 mit allen Curven dritter Ordnung eindeutig, insbesondere dem Schnitt von R_6 mit den doppelt gezählten Ebenen ein ∞^3-System von Berührungscurven dritter Ordnung erster Art an Δ_4: dasselbe System, welches sich aus der Ränderung von Δ_4 ergiebt.

Dieses eine System — ganz verschiedenartig von den früheren 28, da je die sechs Berührungspunkte nun auf keinem Kegelschnitt liegen — ist in der Hesse'schen Normalform ausgezeichnet. Hesse ist aber einen sehr erheblichen Schritt weiter gegangen, indem er zeigte, dass man aus diesem einen System 35 analoge Normalformen, also 35 weitere solcher Berührungssysteme C_3 erster Art ableiten kann, und dass diese 36 Systeme alle gleichberechtigt sind. Das Hülfsmittel dazu bieten die linearen Transformationen des X-Raumes, bei welchen $\Delta_4 = 0$ und ebenso alle Berührungseigenschaften von $\Delta_4 = 0$ unverändert bleiben, verbunden mit Vertauschungen. Bringt man zwei der Coordinateneckpunkte des X-Raumes in zwei der Punkte 1, ..., 8, i und k, so ergiebt sich die Theorie des Systems von Berührungskegelschnitten, welche die Doppeltangente (ik) zum ausgezeichneten System C_3 ergänzen. Bringt man die vier Coordinateneckpunkte in die vier Punkte 1, 2, 3, 4, vertauscht aber ausserdem 12 mit 34, 13 mit 24, 14 mit 23, und 56 mit 78, 57 mit 68, 58 mit 67, so ändert sich die $\Delta_4 = 0$ wiederum nicht, wohl aber geht das Netz

F_2 in ein solches F'_2 über, das nicht mehr linear in F_2 überführbar ist. So ergeben sich aus den 35 Substitutionen der genannten Art {1 2 3 4. 5 6 7 8} 35 neue Normalformen und Systeme C_3 erster Art. Aus jeder derselben kann man aber auf ganz dieselbe Weise zur ursprünglichen und zu jeder der andern übergehen. was die Gleichberechtigung der 36 liefert. Ferner zeigt Hesse. dass es keine weiteren Systeme C_3 der genannten Art geben kann. Hesse giebt also die vollständige Substitutionsgruppe für die Gleichung 28ten Grades der Doppeltangenten an.

Den Existenzbeweis der Normalform führt Hesse in so weit durch. als er zeigt. dass mit Hülfe von vier Doppeltangenten F_{23}, F_{14}, F_{24}, F_{13}, deren acht Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt

$$u = -F_{12}\,F_{34} + F_{23}\,F_{14} + F_{13}\,F_{24} = 0$$

liegen. f_4 die Form annimmt

$$f_4 = u^2 - 4\,F_{23}\,F_{14}\,F_{24}\,F_{13} \equiv \begin{vmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{12} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ F_{13} & F_{23} & 0 & F_{34} \\ F_{14} & F_{24} & F_{34} & 0 \end{vmatrix},$$

also in der That die Normalform; durch lineare Transformation und die obige Substitution erhält man daraus die allgemeine kanonische Form.

Aus dem älteren Material über die Berührungstheorie der f_4 bleibt nur noch ein Punkt zu erwähnen: es sind die Plücker'schen (5) Realitätsbetrachtungen in Bezug auf die Doppeltangenten. nämlich die Einsicht in die Gruppirung zu 2.6, welche Plücker unter der Annahme eines Doppelpunkts der f_4 aus den sechs von diesem ausgehenden Tangenten ableitet, sowie seine Ableitung einer Curve mit 28 reellen Doppeltangenten aus einer solchen mit mehreren Doppelpunkten durch Variiren. Diese Untersuchungen sind als wichtige Vorläufer von neueren solchen über die Abhängigkeit eines algebraischen Gebildes von den Moduln zu betrachten.

B. **B. Riemann (Nachlass) und G. Roch** [1862—1866].

B. Riemann, Zur Theorie der Abel'schen Functionen für den Fall p = 3. (Riemann's Werke, erste Aufl. (1876) XXX, S. 456—472), zweite Aufl. (1892) XXXI, S. 487—504.

G. Roch,

(1) De theoremate quodam circa functiones Abelianas. Habilitationsschr., Halle Oct. 1863.

(2) Ueber die dritte Gattung der Abel'schen Integrale erster Ordnung. J. f. M. Bd. 65, S. 42—51, 1865.

(3) Ueber die Doppeltangenten an Curven vierter Ordnung. Ibd. 66, 97—120. 1864.
(4) Ueber Thetafunctionen vielfacher Argumente. Ibd. 66. 177—184. Febr. 1866.
(5) Ueber Abel'sche Integrale dritter Gattung. Ibd. 68. 170—175. Juni 1866.
(6)*) Ueber die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen. Ibd. 64. 372—376, 1864.

20. Die 1876 von H. Weber herausgebenen „Gesammelten mathematischen Werke und wissenschaftlicher Nachlass" Riemann's enthalten, nach einem von Roch geführten Hefte, ein Bruchstück einer im Sommersemester 1862 gehaltenen Vorlesung Riemann's, die einmal deshalb wichtig ist, weil sie mehrere später in der Theorie der algebraischen Functionen und Curven von Bedeutung gewordene Begriffe einführt; sodann auch, weil sie die früheste Mitteilung enthält, welche sich mit einer Theorie derjenigen speciellen algebraischen Functionen beschäftigt, die von Riemann „Abel'sche Functionen" (im engeren Sinne), später Wurzelfunctionen (Weber) genannt worden sind — dem Aequivalent der Theorie der Systeme von Berührungscurven. Aus dieser Vorlesung ist, obwohl sie geometrische Ausdrücke, wie Curve etc., vermeidet, doch die geometrische Auffassung der algebraischen Beziehungen auf Roch übergegangen und gelangte durch ihn 1863 an die Oeffentlichkeit, also gleichzeitig mit Clebsch's erster Publication über diesen Gegenstand — bei gegenseitiger völliger Unabhängigkeit. Das Riemann'sche Bruchstück enthält kein Citat; trotzdem wird man annehmen müssen, dass die bezüglichen geometrischen Arbeiten, wie sie in c)—e) V. Nr. 7—19 geschildert worden, sowohl die über die homogene Gleichungsform der Curven als die Steiner-Hesse'schen Arbeiten über Berührungssysteme bei der Curve vierter Ordnung, auf Riemann von Einfluss gewesen sind.

Riemann's Nachlass.

21. Riemann führt zunächst — um eine „symmetrische Form" der Gleichung zu haben — eine neue Normalcurve ein, indem er die beiden Verhältnisse dreier beliebiger φ-Functionen (vgl. wegen dieses Ausdrucks Rf. IV, C, Nr. 15), $\xi = \varphi_1/\varphi_3$, $\eta = \varphi_2/\varphi_3$, als Variable verwendet, und setzt mittelst $\xi:\eta:1 = x:y:z$ die Gleichung in eine homogene Form, $f(x, y, z) = 0$. Er bestimmt die Gesamtdimension von $f(x, y, z)$ zu $2p-2$, die Gesamtdimension der zu f gehörigen Formen $\varphi(x, y, z)$ — die aus den Functionen $\varphi(\xi, \eta)$ durch Multiplication mit einer Potenz von z hervorgehen —

Riemann's Normalcurve der $(2p-2)$-ten Ordnung.

*) Ueber (6) ist im Anschluss an das frühere Referat über Riemann bereits berichtet worden (IV, D, Nr. 21).

zu $2p-5$, und berechnet die Zahl der Doppelpunkte von $f=0$ (für welche die φ verschwinden müssen) zu $r=2(p-1)(p-3)$. Er zeigt ferner, dass diese r Punkte die Eigenschaft haben, auf einer Curve $(2p-6)$ter Ordnung, $\psi(\xi,\eta)=0$, (aus $\varphi_3=0$ hervorgehend) zu liegen, die $f=0$ nicht weiter trifft. — Nach einem in der II. Aufl., p. 490—491, enthaltenen Zusatze zeigt Riemann weiter, dass zwischen den Functionen $\Phi^{(2)}/\psi^2$ (wo $\Phi^{(2)}$ alle möglichen ganzen Ausdrücke zweiter Dimension in $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ vorstellt), weil sie nur in den $2p-2$ Punkten, wo $z=0$ ist, doppelt unendlich werden, mindestens $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ lineare, d. h. dass zwischen den p Formen φ ebensoviele quadratische homogene Relationen bestehen müssen. Ob und wann noch weitere solche Relationen existiren, wird nicht untersucht; noch weniger wird die Frage berührt, wie sich diese Relationen zur Darstellung allgemeinster algebraischer Functionen oder gar zur Definition des algebraischen Gebildes selbst verhalten.

Wurzelformen und Charakteristiken.

22. Das Vorlesungsfragment ist eine Einleitung in die Theorie der Relationen zwischen den $\sqrt{\varphi_e(s,z)}$, wo $\varphi_e(s,z)$ irgend eine der in endlicher Zahl existirenden Functionen φ ist, die in $p-1$ Punkten je 0^2 werden. Der Quotient zweier solcher Functionen

$$\sqrt{\frac{\varphi_e(s,z)}{\varphi_f(s,z)}}$$

lässt sich, bei gegebener Zerschneidung der Fläche T in die früher (Rf. IV, Nr. 18) erwähnte T', nach Art. 27 der Abel'schen Functionen in die Form setzen

$$A\cdot\frac{\vartheta\left(\int_{s_1,z_1}^{s,z} du_1-e_1,\ldots\right)}{\vartheta\left(\int_{s_1,z_1}^{s,z} du_1-f_1,\ldots\right)}\equiv c\cdot\frac{\vartheta_e\left(\int_{s_1,z_1}^{s,z} du\right)}{\vartheta_f\left(\int_{s_1,z_1}^{s,z} du\right)},$$

wo die e eindeutig von den Nullpunkten $\eta_i^{(e)}$ von $\varphi_e(s,z)$, die f eindeutig von denen, $\eta_i^{(f)}$ von $\varphi_f(s,z)$ abhängen; A eine Exponentialgrösse in u, c eine Constante ist; wo ferner $\vartheta(e_1,\ldots)=0$, $\vartheta(f_1,\ldots)=0$, d. h. wo die e und die f halbe Perioden sind, deren Zahlencoefficienten $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_p;\ \varepsilon_1',\ldots,\varepsilon_p'$ die Bedingung $\sum_h \varepsilon_h\varepsilon_h' \equiv 1 \pmod 2$ erfüllen. Solcher „ungerader" Complexe giebt es (mod. 2) $2^{p-1}(2^p-1)$; also ebensoviele „Abel'sche Functionen $\sqrt{\varphi_e(s,z)}$", denen je der aus den e entstehende Zahlencomplex als bez. „ungerade Charakteristik" zugeschrieben wird [letztere bei Riemann bezeichnet mit $(\sqrt{\varphi_e(s,z)})$]: nach seinem Ursprung eine „ϑ-Charakteristik". Nimmt man die „Summe" der beiden Charakteristiken dadurch, dass man

entsprechende Elemente addirt, so erhält man eine zu $\sqrt{\frac{\varphi_e(s, z)}{\varphi_f(s, z)}}$ — also auch zu der mit dieser Function rational verbundenen $\sqrt{\varphi_e(s. z)} . \sqrt{\varphi_f(s. z)}$ — gehörige Charakteristik, welche „Gruppencharakteristik" genannt wird, der Art

$$\begin{bmatrix} \delta_1, \ldots, \delta_p \\ \delta'_1, \ldots, \delta'_p \end{bmatrix},$$

mit der Bedeutung, dass jene Function beim Ueberschreiten der $2p$ Querschnitte die Factoren ± 1 annimmt, je nachdem das bez. δ zu $\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}$ (mod. 2) wird: sie sind nach ihrem Ursprunge den halben Integralperioden

$$e_h - f_h = \sum_{i=1}^{p-1} \int_{\eta_i^{(f)}}^{\eta_i^{(e)}} du_h \quad (h = 1, \ldots, p)$$

zugeordnet. Von diesen „Gruppencharakteristiken" ist also $\begin{bmatrix} 0, \ldots 0 \\ 0, \ldots 0 \end{bmatrix}$ ausgeschlossen, und es giebt $2^{2p}-1$ solcher. (Eingehenderes im IX. Abschnitt über „Wurzelfunctionen".)

23. Riemann geht alsbald auf den Fall $p = 3$ über, wo die $2^{p-1}(2^p - 1) = 28$ Gleichungen $\varphi_e = 0$ die 28 Doppeltangenten einer Grundcurve vierter Ordnung darstellen. Er führt drei derselben, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, als Seiten des Coordinatendreiecks ein, um die übrigen φ_e, unter Zuordnung zu den „ungeraden Thetacharakteristiken", linear und homogen durch x, y, z auszudrücken. Die Rechnungen sind dabei wesentlich algebraischer Natur und analog den in V. 18 skizzirten geführt, welche Hesse (bes. Cr. J. f. M. 55) auf die Gleichungsform der Curve vierter Ordnung

Wurzelformen für $p=3$.

$$\sqrt{x\xi} + \sqrt{y\eta} + \sqrt{z\zeta} = 0 \quad (\text{aus } (z\zeta - x\xi - y\eta)^2 - 4x\xi y\eta = 0)$$

hingeleitet haben, wo x, ξ; y, η; z, ζ drei der sechs Doppeltangentenpaare vorstellen, welche eine Steiner'sche Gruppe (V. Nr. 18) constituiren. Als „Gruppencharakteristik" kann man für diese Gruppe eine beliebige der $2^{2p} - 1 = 63$ wählen, den sechs Paaren die sechs Zerlegungen derselben in Paare ungerader Thetacharakteristiken zuordnen. Aus den drei Paaren ergeben sich sowohl die drei übrigen der Gruppe, als die 16 weiteren Doppeltangenten mittelst einer biquadratischen Gleichung, und ebenso ihre Charakteristiken-Zuordnungen; wobei nur der — von Riemann aus der obigen Gleichungsform gefolgerte — Satz zu benutzen ist, dass $\sqrt{xyz}$ zu einer „geraden Thetacharakteristik" gehört, d. h. dass in der Gruppe $[\sqrt{xy}]$ kein $(\sqrt{z})$ enthaltendes Paar vorkommt, oder, im Sinne von Nr. 19

ausgesprochen: dass $xyz = 0$ eine Berührungscurve C_3 erster Art bildet. An der obigen Gleichung ist bemerkenswert, dass sie als Constanten nur die sechs Moduln des Gebildes enthält, die in den gegebenen linearen Ausdrücken der ξ, η, ζ durch x, y, z auftreten.

Constantenzahl der Wurzelformen bei Riemann und Roch.

24. Ferner ist zu beachten, dass — nach Roch (1) — Riemann die in Nr. 23 angegebene Gleichung als ganz speciellen Fall eines allgemeinen „algebraischen Satzes" erkannt hat, welcher eine der Grundlagen der Theorie der Wurzelfunctionen und der Berührungssysteme ist: „dass bei einem Gebilde vom Geschlecht p zwischen je p einer Gruppe angehörigen Producten zweier Abel'schen Functionen

$$\sqrt{x_1 \xi_1}, \quad \sqrt{x_2 \xi_2}, \quad \ldots, \quad \sqrt{x_p \xi_p}$$

eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten besteht". Der Satz folgt einfach aus der Anzahl der Constanten der in den $2p-2$ Nullpunkten einer Form $\sqrt{x_p \xi_p}$ zu ∞^1 werdenden algebraischen Functionen, wobei man weiss, dass diese Nullpunkte nicht durch eine φ-Function verknüpft sind: und so hat Riemann denselben auch erschlossen. Nach Roch (1) hat Riemann auch für $p = 4$ diese Relationen in seiner Vorlesung discutirt; leider ist aber darüber nichts veröffentlicht.

Roch's Arbeit (1) hat den Beweis dieses „algebraischen Satzes" zum Gegenstande. Der Riemann'sche algebraische Beweis genügt ihm nicht, weil der Satz über die Constantenzahl, auf den er sich gründet, von den in Art. VI der Abel'schen Functionen gemachten speciellen Voraussetzungen über die Fläche T, welche das Auftreten besonderer Singularitäten ausschliessen, Gebrauch mache. Dass übrigens diese Annahme nicht zutrifft, hat Roch durch seinen kurz darauf folgenden Beweis (6) des Satzes von der Constantenzahl selbst gezeigt. So führt denn Roch noch einen transcendenten Beweis, welcher dem von Riemann mittelst des Dirichlet'schen Princips und der Periodicitätseigenschaften geführten Beweis für die Anzahl p der linear-unabhängigen Formen φ, d. h. der linear-unabhängigen Integrale erster Gattung in Art. 4 der Abel'schen Functionen völlig analog ist: es werden statt dieser nur die Integrale $\int \frac{\sqrt{\varphi_e \varphi_f} \cdot dz}{\frac{\partial f}{\partial s}}$ betrachtet. Zu bemerken ist noch die Bezeichnung „Symplegma" an Stelle von Steiner's „Gruppe".

Roch und die Berührungscurven.

25. Auch die Roch'sche Arbeit (3) über die Doppeltangenten der f_4, im Sommer 1864 verfasst, ist ganz unabhängig von der Clebsch'schen entstanden (vom October 1863, J. f. M. Bd. 63, im Spätsommer 1864

erschienen), wenn auch erst in J. f. M. Bd. 66, 1866 gedruckt*). Um den Doppeltangenten, berührenden Kegelschnitten etc. Charakteristiken zuzuordnen und damit dieselben zu trennen und ihre Anzahlen zu bestimmen, macht Roch, wie Riemann für $p = 3$, von der Darstellung von Ausdrücken wie $\sqrt{\varphi_e/\varphi_f}$ durch Thetaquotienten Gebrauch; er benutzt weiter den algebraischen Satz (5), um Lagenbeziehungen zwischen Curven eines oder verschiedener Systeme zu entwickeln (wobei übrigens die Angaben über Systembeziehungen und Anzahlen nicht alle zutreffen).

Ferner wird die Theorie der Doppeltangenten für eine Grundcurve vierter Ordnung $f_4(O^2)$ (nämlich mit einem Doppelpunkt O) aus den Thetafunctionen für $p = 2$ abgeleitet; und zwar werden nicht nur die durch O gehenden (also „adjungirten") Berührungscurven, sondern auch die nicht durch O gehenden (nicht-adjungirten), also auch die 16 eigentlichen Doppeltangenten aufgestellt. Roch steht hierbei, was bemerkenswert ist, ganz auf dem Standpunkte Riemann's (Abel'sche Functionen, Artikel 8), wonach die Quotienten von Formen, die in O verschwinden, die allgemeinsten bei gegebenen Unendlichkeitspunkten existirenden Functionen liefern, die Quotienten aber aus Formen, die in O nicht verschwinden, im allgemeinen nur einen Teil jener Functionen ergeben, welcher durch eine specielle algebraische Bedingung aus denselben auszuscheiden ist. So erhält Roch durch $\sqrt{\varphi_e/\varphi_f} = c.\vartheta_e(u)/\vartheta_f(u)$ zunächst nur die sechs Tangenten an $f_4(O^2)$ von O aus; hier sind aber ausnahmsweise auch die Quotienten A/A_0 der nicht-adjungirten linearen Formen A, A_0 die allgemeinsten Functionen, die in $A_0 = 0$, $f_4 = 0$ unendlich werden, und man kann demnach auch $\sqrt{r/t}$, wo r und t zwei eigentliche Doppeltangenten von $f_4(O^2)$ sind, durch einen einfachen Thetaquotienten darstellen. Indem dann Roch auch den „algebraischen Satz" auf Verbindungen von Producten $\sqrt{rt}$ unter sich und mit jenen $\sqrt{\varphi_e\varphi_f}$ ausdehnt, erhält er ganz ähnliche Resultate, wie für die allgemeine f_4, nur modificirt durch das Verhalten zu den beiden Zweigen des Doppelpunktes. Den elliptischen Fall $f_4(a^2, b^2)$ erledigt Roch nicht in dieser Weise; ebensowenig wird die Bedeutung jener speciellen Functionen in Bezug auf rationale Transformation genauer erörtert.

Die Arbeit (4) von Roch löst geometrische Berührungsaufgaben andrer Art, nämlich solche für Curven, welche f_4 nur an einer Stelle m-punktig, sonst 1-punktig, treffen, und zwar mit Hülfe von $\vartheta(mu - e)$

*) Die in der Roch'schen Arbeit befindlichen Citate auf Clebsch wurden nach dem den Verfassern zugänglich gewesenen Briefwechsel zwischen Roch und Clebsch erst während der Correctur zugefügt.

als Function von s, z. Da algebraische Sätze über Constantenzählung angeführt werden, die nicht durchaus zutreffen, so bedarf diese Arbeit einer Prüfung: sie ist aber als Vorläufer der transcendenten Untersuchung über Correspondenzverhältnisse in einem algebraischen Gebilde zu nennen.

Im ganzen kann in den geometrisch-functionentheoretischen Betrachtungen bei Roch gegenüber Riemann ein Fortschritt nur darin erblickt werden, dass er dessen Auffassung des Nichtadjungirten in explicitere Behandlung umzusetzen begonnen hat, indem Roch auch für Berührungsprobleme einen directen Weg wenigstens angedeutet hat, wie er erst in neuester Zeit wieder aufgenommen und verfolgt worden ist. — Jedenfalls aber hat Roch das Verdienst, für die letzten Paragraphen der Riemann'schen Abhandlung das Verständnis, auch nach der geometrisch-algebraischen Seite hin, vermittelt zu haben — wie dies für den allgemeinen Riemann'schen Gedankengang überhaupt Prym und Roch gemeinsam in Anspruch nehmen können.

C. **Alfred Clebsch** [1863—1865].

A. Clebsch,

(1) Ueber einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung. J. f. M. Bd. 63. 94—121, Sept. 1863.

(2) Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie. Ibd. Bd. 63. 189—243, Oct. 1863.

(3) Ueber die Singularitäten algebraischer Curven. Ibd. Bd. 64. 98—100, Apr. 1864.

(4) Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind. Ibd. Bd. 64. 43—65, Mai 1864.

(5) Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen. Ibd. Bd. 64. 210—270, Oct. 1864.

S. ferner:

H. A. Schwarz, De superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum. J. f. M. Bd. 64. 1—16, Juni 1864.

A. Brill, Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als hyperelliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen. Ibd. Bd. 65. 269—283, Oct. 1865.

(Mit dem Zusatz:

Note über die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt. Math. Ann. Bd. 6. 66—71, Mai 1872.)

Clebsch's Anwendung des ellipt. Additionstheorems

26. Während Roch damit beschäftigt ist, einzelne Riemann'sche Resultate geometrisch zu deuten, erscheint, unabhängig davon, die Reihe der Abhandlungen, in denen Clebsch zum ersten Male systematisch die

in der Theorie der algebraischen Curven gewonnenen Anschauungen mit den in der Theorie der elliptischen und Abel'schen Functionen aufgestellten Begriffen und Resultaten in Verbindung setzt: die Schnittpunktsätze mit dem Begriff der algebraischen Function und mit dem Abel'schen Theorem, die Sätze über Berührungscurven mit dem Umkehrproblem der Abel'schen Functionen.

auf Curven dritter Ordnung.

Den Ausgangspunkt bei Clebsch bildet die Fragestellung: ob nicht, ähnlich wie die Sätze von Steiner über die zwei Kreisen ein- und umgeschriebenen Polygone (Cr. J. II) und deren projective Erweiterungen von Poncelet (Traité des propr. proj.) durch Jacobi an die Theorie der elliptischen Functionen angeknüpft wurden (Cr. J. III. Ges. Werke erster Bd. S. 277), so auch die Sätze Steiner's über die einer Curve dritter Ordnung eingeschriebenen Polygone (Rf. V. No. 17) in diese Theorie gehören? Diese Vermutung lag Clebsch nahe, nachdem Aronhold 1861 das zur C_3 gehörige Integral erster Gattung auf ein elliptisches Normalintegral u zurückzuführen gelehrt hatte (s. V, 9); denn Clebsch entnahm daraus die Möglichkeit, die Coordinaten der Curve eindeutig durch elliptische Functionen von u auszudrücken, d. h. die Punkte der Curve dem transcendenten Parameter u — von ganzen Perioden abgesehen — eindeutig zuzuordnen. In der That: benutzt man den Aronhold'schen Parameter eines Strahlbüschels, das seinen Scheitel auf der Curve C_3 hat, so werden jene Coordinaten rationale Functionen von λ und $\sqrt{\varphi(\lambda)}$ von der Form $(A+B\lambda+C\lambda^2+\alpha\sqrt{\varphi(\lambda)})$, wo $\varphi(\lambda)$ der kubische Ausdruck der Aronhold'schen Normalform ist, also auch rationale Functionen von $\sin^2 \mathrm{am}\, u$ und $\sin \mathrm{am}\, u . \cos \mathrm{am}\, u . \Delta \mathrm{am}\, u$. Die Bedingung dafür, dass drei Punkte $\lambda, \lambda', \lambda''$ (d. h. u, u', u'') von C_3 in einer Geraden liegen, lautet:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \sqrt{\varphi(\lambda)} \\ 1 & \lambda' & \lambda'^2 & \sqrt{\varphi(\lambda')} \\ 1 & \lambda'' & \lambda''^2 & \sqrt{\varphi(\lambda'')} \\ 1 & \lambda^0 & \lambda^{02} & \sqrt{\varphi(\lambda^0)} \end{vmatrix} = 0,$$

wo λ^0 eine gewisse Constante ist, der u^0 zugehört; und diese lässt sich wiederum nach dem Abel'schen Theorem in die transcendente Form setzen

$$u+u'+u''+u^0 \equiv 0 \quad \text{(mod. Perioden).}$$

Somit kommen die Steiner'schen Sätze in der That auf additive Combinationen solcher Gleichungen zwischen den u zurück, d. h. auf die Umkehrung, insbesondere die Teilung der elliptischen Functionen. Und ebenso erhält Clebsch die Lösungen bekannter wie neuer Berüh-

rungsaufgaben für die C_3 und die Beziehungen zwischen den Berührungscurven verschiedener Arten in einfachster Weise durch Zusammenstellung und Auflösung der transcendenten Gleichungen.

Auf einen Punkt ist dabei hinzuweisen. Um die Bedingung

$$\sum_{i=1}^{6} u^{(i)} + 2u^0 \equiv 0$$

dafür zu erhalten, dass sechs Punkte der C_3 auf einem Kegelschnitte liegen, wendet Clebsch den bekannten Schnittpunktsatz an, dass sich sechs solche Punkte ergeben, wenn man durch drei auf einer Geraden gelegene Punkte je eine Gerade zieht; aber jene Gleichung, die ihm wohl für sechs auf 2 Geraden gelegene Punkte selbstverständlich wäre, dünkt Clebsch merkwürdig. Offenbar war diese Relation für ihn die Veranlassung zu einer allgemeinen Untersuchung des Abel'schen Theorems.

Clebsch's Anwendung der Riemann'schen Begriffe auf die allgemeine Curve nter Ordnung.

27. Die Ergebnisse, die Clebsch für die Curven dritter Ordnung aus ihrem Zusammenhang mit den elliptischen Functionen gezogen hatte, legten die Frage nahe nach einem ähnlichen Zusammenhang höherer Curven mit höheren Transcendenten. Clebsch musste bald bemerken, dass diese Frage bereits von Riemann, freilich in einer für die Geometrie durchaus fremdartigen Gestalt, in Angriff genommen worden war, und es handelte sich für ihn nun darum, in dessen Abhandlung über Abel'sche Functionen einzudringen. Welche Mühe dies Clebsch verursachte, dem es doch an Belesenheit und Vielseitigkeit keineswegs fehlte, geht aus einem Brief an Roch vom August 1864 hervor, wo Clebsch erklärt, dass er selbst nach den grössten Bemühungen von Riemann's Abhandlung nur sehr wenig verstanden habe, und dass ihm auch Roch's Dissertation der Hauptsache nach unverständlich geblieben sei.

Aber gleich als erste Frucht seiner Bemühungen erhielt Clebsch einen neuen Einteilungsgrund für die algebraischen Curven, die man bis dahin nur dem Grad nach unterschieden hatte: das „Geschlecht", und im Anschluss daran eine Fülle von Ergebnissen über Berührungscurven: alles dies, indem er von den invarianten-theoretischen Besonderheiten absieht, durch welche (1) noch hindurchgegangen war.

Allerdings stellt sich Clebsch zunächst, indem er in (2) statt der Riemann'schen Fläche die algebraische Curve zu Grunde legt, in der Formulirung seiner Probleme ganz auf den früher geschilderten projectiven Standpunkt, welcher sich in der algebraisch-geometrischen Curventheorie herausgebildet hatte. Da die Riemann'sche allgemeine Form $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z}) = 0$, in welcher die Coefficienten aller Potenzen von s auf die

$m$te Dimension in z aufsteigen, auf eine Curve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ mit vielfachen Punkten führen würde (einem n-fachen in $A = 0$, $B = 0$, und einem m-fachen in $C = 0$, $D = 0$ — d. h. auf eine im Clebsch'schen Sinne „specielle" Curve —, wenn man s und z als Parameter zweier Strahlbüschel $A - sB = 0$, $C - zD = 0$ auffasst), so geht Clebsch umgekehrt von einer Curve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, $n$ter Ordnung, ohne Doppelpunkte — d. h. von einer im projectiven Sinne „allgemeinen" Curve — aus, und gelangt von da aus, durch Hinzunahme zweier gegen $f = 0$ nicht speciell gelegener Strahlbüschel mit den Parametern s und z, zu einer speciellen Riemann'schen Form, $F(\overset{n}{s}, \overset{n}{z}) = 0$, in welcher nun die Werte $s = \infty$ oder $z = \infty$ nichts Ausgezeichnetes mehr haben. Die w Parameter z_i der eigentlichen Tangenten des z-Büschels liefern die w Verzweigungspunkte der s darstellenden Riemann'schen Fläche über der Z-Ebene; und somit wird $p = \frac{1}{2}w - (n-1) = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, bez. $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d$, wenn $f = 0$ d gewöhnliche Doppelpunkte hat.

Hierbei wird also die Definition der Verzweigungspunkte (aus $F = 0$, $\partial F / \partial s = 0$) und die Gleichung $p = \frac{1}{2}w - (n-1)$ einfach aus Riemann herübergenommen; für p sind die transcendenten Riemann'schen Definitionen: durch den Flächenzusammenhang, die Anzahl der endlichen Integrale, die Anzahl der zu bestimmenden Punkte im Umkehrproblem adoptirt, von algebraischen Definitionen oder Eigenschaften von p indirect nur die eine durch das Abel'sche Theorem vermittelte, dass im Schnitt von $f = 0$ mit einer Curve „im allgemeinen" p Schnittpunkte durch die übrigen bestimmt sind.

28. Das Abel'sche Theorem für Integrale erster Gattung, in Verbindung mit den Thatsachen der Periodicität der Integrale und der Eindeutigkeit des Umkehrproblems, bildet bei Clebsch die Quelle für seine geometrischen Sätze. Der Weg ist im Princip dem von Roch (s. V. 25) eingeschlagenen völlig äquivalent, da ja auch bei dem letzteren trotz der wirklichen Darstellung von rationalen Functionen durch Thetaquotienten die Anwendungen sich auf die Eigenschaften der Integralsummen erster Gattung, also wesentlich auf diese drei Grundlagen stützen. Der Unterschied besteht bloss darin, dass Clebsch den algebraischen Inhalt des Abel'schen Theorems in einer Form ausspricht, welche dem Ausgangspunkte, der — projectiv gedacht — allgemeinen Curve, besonders angepasst ist. Indem Clebsch beim Beweise des Theorems den Abel'schen Gedankengang verfolgt, aber sich in den Formeln, wegen Anwendung des Homogenen, auf den „Jacobi'schen Satz" (s. V, 3, wo für U_i einzusetzen ist: $\Theta . \partial\varphi_m / \partial\lambda$,

Besondere Form des Abel'schen Theorems.

wenn Θ eine Form $(n-3)$ter Dimension, λ ein Parameter einer Form $m$ter Ordnung, φ_m, ist) stützt, findet er zunächst, dass

$$1)\quad \sum_{i=1}^{mn}\int^{x^{(i)}} du_h = \sum_i \int^{x^{(i)}} \Theta_h(h) \frac{\Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{\sum_{k=1}^{3} c_k \frac{\partial F(x)}{\partial x_k}} = \text{Const.} = j_h^{(m)}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)),$$

d. h. dass die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Summen von Integralen, in welchen Θ_h alle ganzen Functionen $(n-3)$ter Ordnung vorstellen, und wo die Summen über die mn Schnittpunkte von $f=0$ mit irgend einer Curve $\varphi_m = 0$ der $m$ten Ordnung erstreckt sind, von den Parametern der φ_m unabhängig sind. Dies ist also die directe Verallgemeinerung der am Schlusse von Nr. 26 erwähnten Formel für $n = 3$. Zugleich schliesst Clebsch auf die an sich richtige Umkehrung des Theorems (über die Schlussweise s. unten Nr. 31): dass diese $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ transcendenten Gleichungen, bei geeigneter Annahme der Integrationsconstanten, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür sind, dass die mn Punkte $x^{(i)}$ der volle Schnitt der gegebenen Curve $f(x)=0$ mit irgend einer Curve $m$ter Ordnung sind. In dieser Form des Satzes spricht sich der projective Standpunkt am deutlichsten aus: denn volle Schnittsysteme gehen nur bei linearer Transformation der Curve $f(x)=0$ in ebensolche über. Für projective Probleme aber lässt sich nun das Abel'sche Theorem mit besonderer Leichtigkeit handhaben.

Anwendungen auf Berührungsaufgaben.

29. Die Berührungsaufgaben, auf welche sich die Anwendungen beziehen, und welche überhaupt Anlass und Ziel der Betrachtungen waren, sind zunächst folgender Art: Gegeben seien auf $f_n = 0$ $mn - pr$ Punkte $y^{(k)}$, für $m > n-3$; man soll durch dieselben eine C_m legen, welche f_n weiter an $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Stellen je r-punktig trifft. Diese Aufgabe kann, wie eine Constantenzählung zeigt, algebraisch als auf endlich-vielfache Weisen lösbar angenommen werden: die zugehörigen Integralgleichungen des Abel'schen Theorems — von der Form

$$r\sum_{i=1}^{p}\int^{x^{(i)}} du_h + \sum_k \int^{y^{(k)}} du_h \equiv j_h^{(m)} \quad (\text{mod. Per.})$$

— können nach jener algebraischen Umkehrung keine anderen Lösungen zulassen, als Curven C_m der gesuchten Art; und die Lösungen ergeben sich somit durch r-Teilung der Abel'schen Functionen. Die Möglichkeit unendlich vieler Bestimmungsweisen der p Punkte $x^{(i)}$ wird nicht berührt. Ist insbesondere mn durch r teilbar, und lässt man, durch Zusammenrücken der $mn - pr$ Punkte $y^{(k)}$ zu je r, die C_m zu reinen Berührungscurven

werden, so erscheint hier der Systembegriff Hesse's in neuer Beleuchtung, indem alle zu denselben Perioden-rteln gehörigen Curven, welches auch die $\gamma^{(k)}$ seien, zu demselben „System" gerechnet werden, da sie nach dem Abel'schen Theorem rational auseinander ableitbar sind. Die Systeme werden also durch die die Perioden-rtel bestimmenden $2p$ Zahlen charakterisirt. Besonders wichtig wird aber weiter die Aufgabe der reinen Berührungscurven für $m = n - 3$, $r = 2$: denn hier muss eine Zuordnung der Lösungen zu den Thetafunctionen selbst eintreten: der Charakter des Ungeraden der halben Integralperioden wird für das Verschwinden der Thetafunction mit diesen als Argumenten, und damit für die Existenz der Lösung „im allgemeinen" massgebend. Während für beliebige Werte von n diese letztere Theorie von Clebsch's projectivem Standpunkt aus nicht weiter verfolgt werden konnte — da ja alle seine Resultate von dem zahlentheoretischen Charakter der Zahl n afficirt sind —, giebt Clebsch für $n = 4$, $p = 3$, in welchem Falle man auch in höherem Sinne die „Normalcurve" (s. Rf. VIII. Abschnitt) vor sich hat, ähnlich wie Roch, die Systemeinteilungen auch für die berührenden $C_2, C_3, \ldots (r = 2)$.

Erweiterung auf Raumcurven.

30. Vom Gesichtspunkte der projectiven Geometrie sowohl, als von dem der Theorie der algebraischen Functionen aus ist noch die Ausdehnung der Untersuchung auf den Raum von drei Dimensionen und die darin enthaltenen Raumcurven, als Substrat der algebraischen Gebilde, wie sie von Clebsch in (2) vorgenommen wird, wichtig. Wiederum wird die Raumcurve R durch Einführung zweier Ebenenbüschel mit den Parametern s, z eindeutig in eine Curve $\overset{n}{F}(\overset{n}{s, z}) = 0$ übergeführt und ihr Geschlecht $p = \frac{1}{2}w - (n-1)$ bestimmt. Aber die endlichen Integrale werden nur für den Fall einer vollständigen Schnittcurve R hergestellt, und nur für diesen Fall wird das auf den vollen Schnitt von R mit beliebigen Flächen bezügliche Abel'sche Theorem entwickelt und angewendet. Es tritt hierbei, wenn R der Schnitt zweier Flächen Φ_m, Φ_n ist, die linke Seite einer Flächengleichung $(m+n-4)$ter Ordnung — von denen von der Form $A_{n-4}\Phi_m + A_{m-4}\Phi_n$ abgesehen — zum ersten Male als Form φ auf, d. h. als Zähler in dem Integranden erster Gattung. Im übrigen ist alles directe Erweiterung der in Nr. 28 und 29 gedachten Betrachtungen; nur ist zu erwähnen, dass Clebsch in der Theorie der Berührungsflächen $r = 2$ (Nr. 29) für die Grundcurve R_6, welche vollständiger Schnitt von Φ_2, Φ_3 ist, bereits die Analogie mit der entsprechenden Theorie für die ebene Curve f_4 erkennt: heute nennt man R_6 die „Normalcurve" für $p = 4$, wie f_4 für $p = 3$ (s. VIII. Abschn.).

Beleuchtung von Nr. 28.

31. Es ist nun die in Nr. 28 erwähnte Umkehrung des Abel'schen Theorems 1) zu beleuchten. Man kann das Clebsch'sche Resultat so aussprechen: „Die Congruenzen (mod. Perioden)

$$1')\quad \sum_{i=1}^{mn} \int_{y^{(i)}}^{x^{(i)}} du_h \equiv 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)),$$

wo die $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(mn)}$ den vollständigen Schnitt von $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ mit einer Curve C_m der $m$ten Ordnung vorstellen, sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass auch die $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(mn)}$ einem solchen Schnitt zugehören." Clebsch stützt seinen Beweis darauf, dass erstens nach Riemann die $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Differentialgleichungen

$$2)\qquad \sum_{i=1}^{mn} du_h^{(i)} = 0 \quad (h = 1, \ldots, \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2))$$

eine vollständige algebraische Integration zulassen; und dass zweitens jene particuläre algebraische Integration, mit völliger Constantenbestimmung, indem sie auf Gleichungen der Art 1') führt, den transcendenten Gleichungen 1') völlig äquivalent sein müsse, weil sie, wie 1'), von den Punkten $x^{(i)}$ $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ (s. V, 3), oder in speciellen Fällen weniger, durch die übrigen bestimme. Riemann beweist in der That das Erstere; und ferner — (dessen Ab. Funct. Artt. 14, 16, 23) unter Hinzuziehung des transcendenten Schlusses, dass Functionen ohne Perioden mit überall rationalem Charakter rational sind (analog wie Weierstrass) —, dass 1') mit der vollständigen algebraischen Integration äquivalent ist, die folgendes aussagt: Es giebt eine algebraische Function λ, welche in den Punkten $y^{(1)}, \ldots, y^{(mn)}$, von denen $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, oder weniger, die Stelle der Integrationsconstanten vertreten, je zu ∞^1, in den Punkten $x^{(1)}, \ldots, x^{(mn)}$ je zu 0^1 wird, d. h. — nach dem späteren Ausdrucke — die Gruppe $x^{(1)}, \ldots, x^{(mn)}$ ist äquivalent (corresidual) der gegebenen Gruppe $y^{(1)}, \ldots, y^{(mn)}$.

Damit ist aber noch nicht gesagt, dass diese algebraische Function λ gerade die Form $\lambda = C'_m/C_m$ hat, wo nämlich C'_m, wie das gegebene C_m, ein Ausdruck $m$ter Dimension in x_1, x_2, x_3 ist. Das folgt erst, wenn man nachgewiesen hat, dass dies die Form der allgemeinsten Function ist, welche in $y^{(1)}, \ldots, y^{(mn)}$ zu ∞^1 wird; was entweder nach Riemann'schen Principien durch Untersuchung von $\lambda . C_m/x_3^m$ zu geschehen hat, oder durch eine strenge Constantenzählung. Den letzteren Weg hat Clebsch eingeschlagen; auch ist seine Zählung der Constanten von C'_m hier, wo $f = 0$ keine vielfachen Punkte hat, streng. Aber er bleibt von dem Riemann'schen transcendenten Schlusse abhängig, weil ihm zur Zählung der vermöge 1') in λ wirklich noch willkürlich bleibenden Con-

stanten die Mittel fehlen. Denn da diese Gleichungen 1') von einander abhängig werden können, wie es für $m \leqq n-3$ sicher eintritt, so wäre die Zahl der in 1') in jedem Falle unabhängig bleibenden Gleichungen zu ermitteln, was auf eine erst von Roch (6), J. f. M. Bd. 64, durchgeführte Untersuchung führen würde.

Noch weniger nahe liegt es Clebsch, die Lücke auszufüllen, die analog bei der Anwendung des Abel'schen Theorems auf Raumcurven offen bleibt; seine Formulirung trifft auch nur in dem Falle zu, dass die Raumcurve der volle Schnitt zweier Flächen ist.

Auf die allgemeine Riemann'sche Formulirung des Satzes geht Clebsch auch deswegen nicht ein, weil er eben einen rein projectiven Satz sucht, während Riemann's Satz auch bei höheren Transformationen erhalten bleibt.

Insbesondere ist in den Anwendungen des Abel'schen Theorems auf „reine" Berührungscurven die Frage, ob nicht einer der unbestimmten Fälle der Umkehrung vorliegen könne, nicht berücksichtigt. Diese Fälle, welche nur bei Curven mit speciellen Moduln vorkommen können, treten gerade bei den von Clebsch behandelten Curven auf, so bei der Curve $(2n+1)$ter Ordnung ohne Doppelpunkte in Bezug auf die überall berührenden Curven $(2n-2)$ter Ordnung, unter welchen sich auch die Schar der doppelt zählenden Curven $(n-1)$ter Ordnung befindet. Die vollständige Erledigung dieser Fälle, welche die Untersuchung des Zusammenhangs jener unbestimmten Fälle mit dem Verschwinden der Thetafunction und ihrer Differentialquotienten für specielle Argumente und Moduln erfordert, ist erst durch Riemann's Abhandlung im J. f. M. Bd. 65 ermöglicht worden.

Erhaltung der Zahl p.

32. Von den bei rationalen Transformationen der Curve invarianten Bildungen hat Clebsch in jener Periode 1863—1865 eine aus Riemann herübergenommen: die Klassenzahl p, die Clebsch als „Geschlechtszahl der Curve $F(x_1, x_2, x_3) = 0$" bezeichnet. Sie hat (3) für eine Curve $n$ter Ordnung mit δ gewöhnlichen Doppel- und $\varkappa$ gewöhnlichen Rückkehrpunkten den Wert

$$p = \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - \delta - \varkappa.$$

Indem Clebsch die Invarianz von p auf die eindeutige Beziehung zwischen Curve und Reciprokalcurve anwendet, erhält er eine elegante Formel, eine neue Verbindung der bekannten Plücker'schen Gleichungen. — Die Bedeutung der Zahl p für die Geometrie wurde übrigens unabhängig von Clebsch auch von Schwarz (J. f. M. 64) erkannt, der insbesondere die zu $p = 0$ gehörigen „planaren" abwickelbaren Flächen behandelt hat.

Modificationen für Curven mit Doppel- und Rückkehrpunkten.

33. Einer weiteren Serie von Arbeiten Clebsch's liegt die Fragestellung zu Grunde: Wie modificiren sich die Ergebnisse der Arbeit (2), J. f. M. Bd. 63, wenn durch das Auftreten von Doppel- oder Rückkehrpunkten der Grundcurve das Geschlecht derselben soweit erniedrigt wird, dass an Stelle der allgemeinen Abel'schen rationale, bezw. elliptische Functionen treten? Die genaue Kenntnis, die man von diesen Functionen hat, liess im voraus eine grosse Ausbeute an Sätzen in der angegebenen Richtung erwarten. Die Arbeiten (4) und (5) sind den Fällen $p = 0, 1$ gewidmet: die anschliessende Arbeit von Brill, welche den Fall $p = 2$ behandelt, hatte indessen, was das Verhalten der Integrale dritter Gattung und ihre Darstellung betrifft, die von Riemann nur angedeutet waren, erst weitere Klarheit zu schaffen. Denn in dem sogenannten „erweiterten" Umkehrproblem, in das bei Hinzutreten mehrfacher Punkte das gewöhnliche ausartet, ist ein Teil der Integrale erster Gattung in solche anderer Gattung, mit anderen Periodicitätseigenschaften übergegangen. Die genannten Arbeiten erledigen dieses „erweiterte" Problem in eingehender Weise durch Zurückführung desselben auf das gewöhnliche Umkehrproblem mittelst des Abel'schen Theorems, und zwar ganz direct durch die zu $p = 0, 1$, bezw. 2 gehörigen Transcendenten. Sie stehen hiermit also im wesentlichen auf dem Riemann'schen Standpunkte der rationalen Transformationen.

Derselbe Standpunkt wird in den erwähnten Arbeiten auch bezüglich der Discussion der Singularitätseigenschaften der Curven nter Ordnung, f_n, eingenommen. Mittelst Curvenbüschel vom Parameter λ, deren Curven durch die vielfachen Punkte der Grundcurve f_n gelegt werden, werden die Coordinaten dieser Curve für $p = 0$ als rationale Functionen von λ, für $p = 1$ und 2 als rationale Functionen von λ und $\sqrt{\varphi(\lambda)}$, wo $\varphi(\lambda)$ eine ganze Form vierten, bezw. sechsten Grades in λ ist, ausgedrückt, d. h. es wird je die einfachste Normalcurve der betreffenden Klasse eingeführt und f_n eindeutig auf sie bezogen. An dieser rationalen Darstellung werden die Eigenschaften der f_n studirt: so die Zahl ihrer Doppelpunkte, als der Punkte, denen je zwei verschiedene Parameter λ entsprechen, u. s. w. An diesen Problemen hat sich nicht nur die Eliminationstheorie vervollkommnet, auch die Fundamentalpunkte der rationalen Transformationen, d. h. Ausnahmepunkte derselben, sind durch sie der algebraischen Auffassung zugänglich geworden (s. V, 42).

Ein Festhalten am projectiven Standpunkte findet sich nur noch in der Formulirung der algebraischen Beziehungen zum Umkehrproblem: im Abel'schen Theorem, indem die Auszeichnung der vollständigen

Schnitte der Grundcurve f_n beibehalten, und weiter, indem der Schnitt von f_n mit den durch einige der Doppelpunkte der f_n gehenden Curven mter Ordnung als specieller Fall des Schnittes von f_n mit allen C_m behandelt wird. Es findet sich übrigens hierbei die Beweislücke, dass (s. (5), S. 232) die auf einen solchen Doppelpunkt bezügliche Gleichung des Abel'schen Theorems als „illusorisch" einfach weggelassen wird, ohne dass die Frage eines Grenzübergangs berührt wird. Auf rationale Raumcurven nter Ordnung, $p=0, 1, 2$, wäre jene Formulirung nicht anwendbar.

34. Da für die rationalen Curven, $p=0$, die zugehörigen Integrale ausführbar werden, so gelangt Clebsch hier zu besonders einfachen Formen für das Abel'sche Theorem: seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_{mn}$ die Parameterwerte für die mn Schnittpunkte der Grundcurve $f_n=0$ mit einer C_m, so erhält man, wenn

Geschlecht $p=0$.

$$\Omega(\lambda) = c(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_{mn}),$$

und wenn $a^{(h)}, b^{(h)}$ die beiden einem Doppelpunkte zukommenden Parameterwerte von λ sind, als algebraische Gleichung:

$$\Omega(a^{(h)}) = c_h^m \cdot \Omega(b^{(h)}), \quad (h=1, 2, \ldots, \nu;\ \nu=\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2))$$

wo die c_h Constanten sind.

Wir bemerken, dass diese Gleichungen genau die Gestalt derjenigen haben, welche nach Riemann und nach Roch die durch Quotienten nicht-adjungirter Formen zu bildenden Functionen aus den allgemeinen Functionen ausscheiden (V, 25).

Die hier zu lösenden Berührungsaufgaben führen, indem man c_h^m durch $c_h^m . e^{2k_h i\pi}$ ersetzt, auf Kreisteilungsgleichungen. Auch die Modification für Rückkehrpunkte, wobei der Factor $e^{2k_h i\pi}$ wegfällt, wird durch Grenzbetrachtung durchgeführt. Wichtig ist ferner die Behandlung der Frage, unter welchen Umständen sich die Summen von je ν Integralen des Umkehrproblems auf solche von je $\nu-1$ reduciren lassen: dies tritt insbesondere dann ein, wenn diese ν einzelnen Summen gleich halben Perioden $k.i\pi$ sind, deren Summe von der Form $2li\pi$ (k, l ganze Zahlen) ist: die Integrale gehören dann zu Berührungscurven $(n-3)$ter Ordnung.

35. Die Theorie der elliptischen Curven f_n, $p=1$, wird durch die Darstellung der Coordinaten in der Form:

Geschlecht $p=1$.

$$\rho x_i = P_i + Q_i \sqrt{\Phi} \quad (P_i, Q_i, \Phi \text{ bezw. von den Ordnungen } n, n-2, 4 \text{ in } \lambda)$$

eingeleitet und die Erniedrigung der Formen rechts auf die $(\frac{1}{2}n)$te Ordnung mittelst einer Transformation der Art:

$$\lambda = \sin^2 \text{am}\, u, \quad u' = u - c\, n, \quad \lambda' = \sin^2 \text{am}\, u'$$

gewonnen. Es kommt dies geometrisch darauf hinaus, dass man aus einer Normalcurve $f_3 \equiv \mu^2\nu - \lambda(\nu-\lambda)(\nu - k^2\lambda) = 0$ die ihr entsprechende Curve nter Ordnung, f_n, dadurch ableitet, dass Ausdrücke $\rho x_i = \psi_i(\lambda, \mu, \nu)$ von möglichst niedrigem Grade eingeführt werden mit je n beweglichen Schnittpunkten und gemeinsamen Basispunkten, die in den Wendepunkt $\nu = 0$, $\lambda = 0$ von f_3 verlegt sind.

Im Abel'schen Theorem hat man neben der einen Gleichung für das endliche Integral u:

$$\sum_{i=1}^{mn} u^{(i)} \equiv c$$

noch $n' = \frac{1}{2}n(n-3)$ weitere analoge Gleichungen für Integrale dritter Gattung, die nur in je einem der n' Doppelpunkte, und zwar in beiden Zweigen $\alpha^{(h)}$, $\beta^{(h)}$ desselben, logarithmisch unendlich werden; unter Einführung von u als Parameter lauten dieselben:

$$\prod_{i=1}^{mn} \frac{H(\alpha^{(h)} - u^{(i)})}{H(\beta^{(h)} - u^{(i)})} = c_h \quad (h = 1, 2, \ldots, n'),$$

wo H die ungerade Thetafunction Jacobi's ist. Dass die Constantenbestimmung — wie auch für $p = 0$ — unter Benutzung specieller C_{n-3}, hier derjenigen durch alle Doppelpunkte, noch weiter geführt wird, ist unwesentlich. — Hinzuzufügen ist, dass auch diese n' Gleichungen, nach einem Satze von Hermite (Brief an Jacobi, J. f. M. 32), nichts weiter als den Uebergang vom Adjungirten zum speciellen Fall des Nichtadjungirten aussagen.

Setzt man in den obigen Gleichungen statt der Constanten c beliebige Grössen v, so erhält man das erweiterte Umkehrproblem, eine Verallgemeinerung des von Rosenhain erledigten. Clebsch führt dasselbe mittelst des Abel'schen Theorems auf das gewöhnliche elliptische Umkehrproblem zurück, giebt die vollständige Lösung und behandelt auch wieder die zahlentheoretischen Bedingungen zwischen den v, damit die linken Seiten in den Summen ein Integral weniger enthalten können. Bei den Anwendungen dieser Theorien auf Berührungsaufgaben ist insbesondere zu bemerken, dass Clebsch die symmetrischen Functionen der Berührungspunkte überall wirklich darzustellen sucht; auch die eingehende Behandlung der Doppeltangenten einer f_4 mit 2 Doppelpunkten sei hervorgehoben.

Geschlecht $p=2$.

36. Was den Fall $p = 2$ angeht, so handelt es sich bei Brill wesentlich um die explicite Erledigung des „erweiterten" Umkehrproblems bei ultraelliptischen Functionen, aus der dann die geometrischen Anwendungen den Fällen $p = 0, 1$ analog folgen. Zu diesem Zwecke werden einmal, durch

Erweiterung des Hermite'schen auf elliptische Functionen bezüglichen Satzes, gewisse Thetaquotienten durch rationale symmetrische Functionen von Punkten der Normalcurve ausgedrückt, und so Formeln erhalten, die, das Additionstheorem für ultraelliptische Functionen enthaltend, als Verallgemeinerung solcher von Rosenhain und Prym erscheinen. Hieraus wird weiter die explicite Darstellung der Summe zweier Integrale dritter Gattung durch den Logarithmus eines Thetaquotienten abgeleitet: eine Formel, bei der sich also Brill mit Roch (5) begegnet (s. V, 25). Auf diese Weise lässt sich das Abel'sche Theorem für Integrale dritter Gattung in Beziehungen zwischen Thetafunctionen umwandeln, und das Umkehrproblem und alle damit zusammenhängenden Aufgaben in demselben Umfange und in derselben Auffassung lösen, wie es Clebsch für $p = 1$ gethan. Insbesondere ergeben sich so (s. auch Math. Ann. VI.) die 2.15 Systeme von Doppeltangentenpaaren der Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkt, die auch Roch (3) erhalten hat.

37. Vergleicht man den in diesen Berührungsproblemen von Clebsch, Brill eingenommenen Standpunkt mit dem von Riemann, Roch, so erkennt man, ausser der projectiven — aus Plücker, Hesse, Aronhold gewonnenen — Auffassung der Ersteren, der rationalen der Letzteren, keinen wesentlichen Unterschied. Dass der Ausgangspunkt von Riemann, Roch: die Darstellung der einfachsten Abel'schen Wurzelfunctionen, wie $\sqrt{\varphi_1/\varphi_2}$, durch einfache Thetaquotienten, bei Clebsch, Brill nicht vorkommt, liegt nur darin, dass jene projectiven Functionen sich complicirter ausdrücken, als die Quotienten adjungirter Formen. Rückblick.

Die Beweismittel in den genannten Arbeiten sind nicht-algebraische, mehrere aus Riemann direct herübergenommen; und zwar ist entnommen: 1) die Bedeutung von p als Klassenzahl und ihr Ausdruck in n und der Zahl w der Verzweigungspunkte; 2) das Besondere des Schnittes der C_{n-3} mit der Grundcurve f_n und deren Auftreten in den Integralen erster Gattung; 3) die Thatsache der algebraischen Umkehrbarkeit des Abel'schen Theorems; 4) die Thatsache der eindeutigen Lösbarkeit des Jacobi'schen, auf p Punkte von f_n bezüglichen Umkehrproblems durch Thetafunctionen; 5) der Satz über Thetafunctionen, aus dem sich die Bedingungen ergeben, dass die linken Seiten des Umkehrproblems sich auf Summen von nur $p-1$ Integralen reduciren lassen; 6) die Periodicitätseigenschaften der Integrale. Bei Roch ist der Inhalt von 3)—6) durch die explicite Darstellung von rationalen und Wurzelfunctionen mittelst Thetaquotienten zusammenfassend ersetzt. Während aber jene Riemann'schen Beweismittel von Clebsch schon in einer Weise ver-

wertet sind, welche der Geometrie eine Fülle neuen Gehaltes zugeführt hat, ist Clebsch bis 1865 zu den Grundgedanken von Riemann, insbesondere dem Begriffe der allgemeinsten, durch ihre Unendlichkeitspunkte bestimmten rationalen Function der Coordinaten einer Grundcurve, also zu dem vollen Gehalt des Abel'schen Theorems, noch nicht durchgedrungen. Eine Entwicklung in dieser Richtung gehört, nachdem Brill bei $p = 2$ und Roch vorangegangen, den folgenden Zeiten an, zu denen wir uns nun wenden.

D. Clebsch-Gordan'sche Richtung [1865—1870].

L. Cremona,
(1) Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane. Mem. dell'Accad. di Bologna, Ser. 2, t. II, V, 1863—65.

A. Cayley,
(1) On the transformation of plane curves. Proc. of the London Math. Soc. I, Oct. 1865, Collected Mathem. Papers VI.
(2) On the correspondence of two points on a curve. Proc. of the London Math. Soc. I., Apr. 1866, Math. Pap. VI: ferner Philosophical Transactions 1868.

A. Clebsch und P. Gordan, Theorie der Abel'schen Functionen. Leipzig, Teubner 1866 (Vorwort von Aug. 1866).

A. Brill,
(1) Beiträge zur Lehre von den eindeutigen Transformationen. Habilitationsschrift, Giessen. 1867.
(2) Note bezüglich der Zahl der Moduln einer Klasse von algebraischen Gleichungen. Math. Ann. I, Jan. 1869.
(3) Zweite Note etc., Math. Ann. II, Jan. 1870.

L. Cremona,
(2) Sulla trasformazione delle curve iperellittiche. Rend. Ist. Lomb., Apr. 1869.
(3) Sugli integrali a differenziale algebrico (Bruchstück einer Vorlesung). Mem. dell'Accad. di Bologna, Ser. 2, t. X, Apr. 1869 (33 Seiten).

F. Casorati e L. Cremona,
(4) Intorno al numero dei moduli delle equazioni o delle curve algebriche di un dato genere. Rend. Ist. Lomb., Mai 1869.

H. Weber, Zur Theorie der Umkehrung der Abel'schen Integrale. J. f. M. Bd. 70, Mai 1869.

Litteratur zur Erhaltung der Zahl p:

L. Cremona,
(5) Preliminari di una teoria geometrica delle superficie, Bologna 1866 (Mem. Acc. Bologna Ser. 2, t. VI, VII).

E. Bertini, Battaglini Giorn. VII, H. G. Zeuthen, C. R. t. 70 u. Math. Ann. III, 1870.

A. Voss, Gött. Nachr. 1873, A. Clebsch, Vorlesung (s. Noether, Math. Ann. VIII, pag. 497).

Litteratur zur Schleifentheorie:

J. Lüroth, Note über Verzweigungsschnitte und Querschnitte in einer Riemann'schen Fläche. Math. Ann. IV, 1871.

A. Clebsch, Zur Theorie der Riemann'schen Fläche. Math. Ann. VI, 1872.

L. Schläfli, Ueber die linearen Relationen zwischen den 2p Kreiswegen erster Art und den 2p zweiter Art in der Theorie der Abel'schen Functionen der Herren Clebsch u. Gordan. J. f. M. Bd. 76, 1873.

F. Casorati, Le relazioni fondamentali tra i moduli di periodicità degli integrali Abeliani di prima specie. Annali di Matem. Ser. 2, t. II.

Uebergang zu den Abel'schen Functionen von Clebsch-Gordan. Cayley's Normalcurve.

38. Von den in den vorhergehenden Arbeiten Clebsch's bezeichneten Gedanken aus entwickelte und verbreitete sich zuerst die von Clebsch aufgenommene Riemann'sche Idee, die Curven, statt nach dem Grade, nach der Geschlechtszahl p anzuordnen, und diejenigen von gleichem p wiederum in Klassen einzuteilen, wobei zu einer Klasse alle diejenigen Curven gerechnet werden, welche sich aus irgend einer irreductibeln Curve der Klasse rational und eindeutig umkehrbar ableiten lassen. Denn nach Riemann geht aus einer irreductibeln Curve $F(s, z) = 0$ vermöge einer rationalen Substitution $\sigma = \psi(s, z)$, $\zeta = \chi(s, z)$, immer entweder eine irreductible $F'(\sigma, \zeta) = 0$ hervor, während zugleich s, z rationale Functionen von σ, ζ werden; oder $F'(\sigma, \zeta)$ wird eine Potenz einer irreductibeln Form. Schon vor der gemeinsamen Arbeit von Clebsch und Gordan begannen die Bemühungen, Eigenschaften, welche den Curven einer Klasse gemeinsam sind — rational-invariante Eigenschaften —, auf geometrisch-algebraischem Wege zu ermitteln. Diese Richtung konnte um so eher Boden finden, als sie durch die Cremona'sche Theorie (Cremona (1)) der speciellen Klasse von eindeutigen Transformationen, die in der ganzen Ebene eindeutig sind (s. V, 10), befruchtet wurde.

Clebsch hatte schon früher alle Curven mit $p = 0$ auf eine Gerade, alle Curven mit $p = 1$ auf Curven f_3, etwa der Art

$$s^2 = z(1-z)(1-k^2 z) \quad \text{oder} \quad x_3 x_2^2 - x_1(x_3 - x_1)(x_3 - \varkappa^2 x_1) = 0,$$

eindeutig bezogen. Zwei Curven dritter Ordnung aber (s. Clebsch (5), J. f. M. Bd. 64, p. 223) können, wie aus der Theorie der Transformation der elliptischen Integrale erster Gattung folgt, nur dann ein-eindeutig in einander übergehen, wenn sie dasselbe $\varkappa^2$ (oder besser dieselbe absolute Invariante J der Form vierten Grades mit den Wurzeln $0, 1, 1/\varkappa^2, \infty$, eine rationale Function des Doppelverhältnisses $\varkappa^2$) enthalten. Die Grösse $\varkappa^2$ (bezw. J) muss also von den willkürlichen Punkten der Grundcurve nter Ordnung, f_n, welche man bei der Transformation der $f_n(p = 1)$ auf eine f_3 als Basispunkte des Büschels $(n-2)$ter Ordnung mit dem

Parameter z — oder eines sonstigen in je zwei beweglichen Punkten schneidenden Büschels — benutzt hat, völlig unabhängig sein: sie ist ein Modul der ganzen „Klasse", welcher f_3 angehört, und f_3 ist als eine „Normalcurve" der Klasse zu betrachten. Es giebt einfach unendlich viele Klassen für $p = 1$.

Daraus ergiebt sich der Salmon'sche Satz (J. f. M. 42), dass das Doppelverhältnis $\varkappa^2$ der vier von einem Punkte $x_1 = x_3 = 0$ der Curve f_3 an diese selbst gehenden Tangenten unabhängig ist von der Wahl des Scheitels dieses Büschels auf f_3. Umgekehrt ergiebt sich auch jener allgemeine Satz aus diesem specielleren, wie Cayley (1) bemerkt (s. auch Clebsch-Gordan S. 75). Der specielle Satz hätte sich übrigens auch auf ähnlichem Wege wie jener beweisen lassen: durch Betrachtung einer der unendlich vielen Transformationen der f_3 in sich, welche einem Strahlbüschel mit Scheitel auf f_3 irgend ein anderes solches vorgegebenes linear zuzuordnen erlaubt.

Für eine beliebige Klasse des Geschlechts p — nach Cayley's Bezeichnung $p = D =$ Deficiency $=$ Defect einer Curve, d. h. Differenz zwischen der höchstmöglichen Anzahl $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ der Doppelpunkte einer irreductibeln f_n und der wirklichen Anzahl — wollte Cayley eine „Normalcurve" einführen, die in der Gesamtdimension möglichst niedrig ist, statt, wie bei Riemann, in Bezug auf die beiden Variabeln einzeln.

Er erhält durch Transformation von

$$f_n(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad y_1 : y_2 : y_3 = \psi_1(x) : \psi_2(x) : \psi_3(x),$$

wo die ψ Ausdrücke $(n-2)$ter oder höherer Dimension sind, welche in den Doppelpunkten von $f_n = 0$ und in so vielen willkürlichen festen Punkten von $f_n = 0$ verschwinden, dass in den ψ noch drei (homogene) Constanten willkürlich bleiben, Normalcurven $(p+3)$ter, bez. $(p+2)$ter Ordnung. Offenbar kann man aber auf diesem Wege immer zu Curven $(p+2)$ter Ordnung kommen. Cayley erwähnt auch, dass, nach einer Mitteilung von Clebsch, für $p > 2$ die Normalcurve dadurch auf die $(p+1)$te Dimension herabgedrückt werde, dass man für die ψ Ausdrücke $(n-3)$ter Dimension nimmt. Aehnlich wie für $p = 1$ glaubte Cayley auch für höhere p in den für lineare Transformationen absoluten Invarianten dieser Normalcurven, an Zahl $4p-6$, die Moduln der ganzen „Klasse" nachweisen zu können; dass dies aber nicht richtig sein kann, ist am Falle $p = 4$ von Brill (1) und (2) durch directe Transformation auf eine Normalcurve mit nur neun Moduln gezeigt worden, und der Schlussfehler wurde später allgemein nachgewiesen (vgl. unten, Nr. 62).

39. Es möchte hier der Ort sein, mit einigen Worten die oben erwähnte Art der Einführung von neuen Functionen x_1/x_3 etc., gegenüber Riemann, zu beleuchten. Schneidet man $f_n(x_1, x_2, x_3) = 0$ mit einer linearen ∞^r-Schar von Curven mter Ordnung, mit den Parametern $\alpha_0 : \alpha_1 : \ldots : \alpha_r$:

Transformation durch eine Curvenschar und Functionsbegriff.

$$\psi(x_1, x_2, x_3) \equiv \alpha_0 \psi_0 + \alpha_1 \psi_1 + \cdots + \alpha_r \psi_r = 0,$$

welche alle durch eine Reihe von festen Punkten der Curve gehen und $f = 0$ in Gruppen von je R beweglichen Punkten treffen, so kann man $f_n = 0$ mittelst:

$$\xi_1 = \frac{\psi_1}{\psi_0}, \quad \ldots, \quad \xi_r = \frac{\psi_r}{\psi_0}$$

transformiren, was insbesondere für $r = 2$ den obigen Fall giebt. Nun betrachten Riemann (Werke, erste Ausg. S. 458) und Roch ((3) J. f. M. 66) die Function

$$\psi(s, z) \equiv \frac{\psi(x_1, x_2, x_3)}{x_3^m} \quad \text{für} \quad z = \frac{x_1}{x_3}, \quad s = \frac{x_2}{x_3},$$

(z. B. $\varphi(s, z)$, wo φ der Zähler des Riemann'schen Integranden erster Gattung ist, $m = n - 3$), welche in n.m Punkten $x_3 = 0$ zu ∞^1 und in $n.m > R$ Punkten zu 0^1 wird, wovon die obigen R aber nur einen Teil bilden. Auch ist im allgemeinen dies nicht die allgemeinste in den n.m Punkten $x_3 = 0$ zu ∞^1 werdende Function. Daher ist es besser, die der Sache fremden Punkte $x_3^m = 0$ nicht heranzuziehen und die Gruppen von beweglichen Punkten dadurch rein darzustellen, dass man, wie dies implicit dem Clebsch'schen Ansatze entspricht, die Function

$$\lambda = \frac{\psi(x_1, x_2, x_3)}{\psi_0(x_1, x_2, x_3)}$$

betrachtet, welche in R Punkten ($\psi_0 = 0$) unendlich wird, in Gruppen von je R Punkten irgend einen gegebenen Wert annimmt. Die obige Transformation muss dann zu einer Curve Rter Ordnung im linearen Raume von r Dimensionen führen.

40. Die Arbeit (2) von Clebsch über die Anwendung der Abel'schen Functionen auf die Geometrie hat nicht wenig dazu beigetragen, Riemann's Ideen über den Kreis seiner engeren Schüler hinaus zu verbreiten und ihre Fruchtbarkeit darzuthun. Bald nach ihr erschienen auch die C. Neumann'schen Vorlesungen über die Theorie der Abel'schen Integrale und Functionen, und förderten durch ihre ausführliche Darstellung das Verständnis der Riemann'schen Abhandlung in Bezug auf Flächenzusammenhang, Periodicität und Existenztheoreme. Da-

Clebsch-Gordan's Abel'sche Functionen. Unabhängigkeit der Beweise.

neben lag die Weierstrass'sche Lösung des Umkehrproblems im hyperelliptischen Gebiete seit langem vor, eine Lösung, die auf directerem Wege erfolgt war, als bei Riemann im Gebiete der allgemeinen Abel'schen Functionen, und die auf einen geringeren und weniger fremdartigen functionentheoretischen Apparat sich stützte. So machten Clebsch und Gordan, die beide durch die Jacobi'sche Schule gegangen waren, gemeinsam den Versuch einer Vermittlung zwischen beiden Richtungen, indem sie die Riemann'schen Resultate in der Theorie der Abel'schen Functionen auf Grund der geometrisch-algebraischen Anschauungen und einiger allgemein anerkannter functionentheoretischer Entwicklungen, insbesondere der von Puiseux, abzuleiten suchten. Wir wenden uns nun dazu, den geometrisch-algebraischen Standpunkt dieses Werkes zu kennzeichnen; indessen werden wir die auf die transcendenten Functionen bezüglichen Partien des Werkes unbesprochen lassen.

Gegenüber den vorhergehenden Publicationen von Clebsch tritt zunächst die gänzliche Unabhängigkeit des Beweisgangs von Riemann hervor. Die Definition und die Eigenschaft der Invarianz der Zahl p, die algebraische Umkehrbarkeit des Abel'schen Theorems etc. werden nicht mehr Riemann entnommen; der Nachweis dieser Beziehungen bildet vielmehr geradezu einen Teil des neuen Programms. Aber es ist zu beachten, dass die algebraischen Beweise nicht Selbstzweck sind, sondern nur Mittel zur Erreichung der transcendenten Ziele. Clebsch-Gordan denken nicht daran, eine irgend ausgeführte Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Eigenschaften an sich geben zu wollen. Nicht nur die Theorie der rationalen Functionen einer Variabeln gilt als gegeben, sondern auch die auf eine allgemeine Gleichung $F(s, z) = 0$ bezüglichen Eigenschaften werden, als Schnittpunkteigenschaften einer Curve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, als bekannt vorausgesetzt und ohne erneute principielle Prüfung angewendet. Wenn nun auch Clebsch-Gordan sich nicht die Festigung der Grundlage als Aufgabe stellten, so ist ihnen um so mehr an der Aufnahme und Weiterentwicklung der algebraischen Ideen auf der gegebenen Grundlage gelegen.

Deren adjungirte Curven.

41. Indem für die zu Grunde gelegte algebraische Curve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ eine beliebige Zahl der gewöhnlichen Singularitäten — Doppel- und Rückkehrpunkte — (wie bei Clebsch (4) und (5)) zugelassen wird, treten die auf adjungirte (hier: durch die Doppel- und Rückkehrpunkte einfach gehende) Schnittcurven bezüglichen Eigenschaften zweckmässiger Weise in den Vordergrund. Riemann hatte ausschliesslich solche Schnittcurven, insbesondere das auf sie bezügliche gewöhnliche Umkehr-

problem, behandelt: die Ausdrücke Φ in denjenigen Integralen $\int \frac{\Phi}{\Psi} \cdot \frac{dx}{\partial f/\partial s}$, welche nicht in den singulären Punkten von $f=0$ — Stellen, die doch nur in der willkürlich aus der Klasse heraus-gewählten Grundcurve ausgezeichnet sind — unendlich werden, sind, wenn Ψ in den singulären Stellen von $f=0$ nicht verschwindet, „zu $f=0$ adjungirt". — Das „erweiterte Umkehrproblem", welches sich bei Clebsch (4) und (5) und Brill auf Integrale bezog, die teilweise endlich, teilweise in den in Doppelpunkten von $f=0$ liegenden Punktpaaren unendlich wurden, erscheint in § 43 des Clebsch-Gordan'schen Werkes nun im Lichte der rationalen Transformation, indem an Stelle der letztgenannten Punktpaare beliebig gewählte Punktpaare von $f=0$ treten, die für die Schnittcurven sich gegenseitig bedingen. Hierdurch, und durch die Zurückführung dieses Problems auf das gewöhnliche Umkehrproblem mittelst des allgemeinen Abel'schen Theorems, also mittelst algebraischer Formeln, ist principiell die Einordnung dieser Theorie unter die der „Adjunction" vollzogen, wenn dieser Umstand auch nicht explicit angegeben wird: wie denn auch das Wort „adjungirt" späteren Ursprungs ist (Rf. V, Nr. 55). Der Umstand, dass das Problem in Wirklichkeit mit Hülfe neuer Transcendenten gelöst wird, die, bei q Integralen dritter Gattung, von $p+q$ Variabeln abhängen, und dass seine formale Fassung der Einfachheit halber (11. Abschn. von Clebsch-Gordan) wieder auf die Doppelpunkte als Unendlichkeitsstellen zurückkommt, zeigt nur seine Analogie mit den allgemeinen Problemen über Curven vom Geschlecht $p+q$ und ist so auch vom analytischen Standpunkte bedeutsam; lässt aber jene algebraische Einordnung unberührt.

Deren homogene Formen. Eindeutige Transformation.

42. Für Curve und Differentialausdruck wird die **homogene** Schreibweise angewandt. Der damit verbundene Vorteil, dass die unendlich grossen Werte der Variabeln, die unendlich fernen Punkte der Curve, nicht mehr ausgezeichnet sind, wird voll ausgenutzt, indem die Gesamtdimensionsverhältnisse überall zum Ausdrucke kommen. Dem schmiegt sich die projectiv-geometrische Sprechweise besonders gut an. Wenn in dieser Beziehung noch auf besondere Capitel verwiesen werden soll, so müsste es zunächst der § 6 über die Bildung der Integranden dritter Gattung sein, deren Form nicht nur in Bezug auf die Variable, sondern auch in Bezug auf die Parameter der beiden Unstetigkeitspunkte aus den dortigen Angaben deutlich abgelesen werden kann, wenn die letztere auch in dem Buche selbst nicht völlig entwickelt ist. Vor allem aber ist der ganze dritte Abschnitt über die eindeutigen Transformationen bemerkenswert. Hier wird der Schnitt von $f(x)=0$ mit jener Curvenschar

$$\alpha_0 \psi_0(x) + \alpha_1 \psi_1(x) + \alpha_2 \psi_2(x) = 0$$

erörtert, welche aus der Transformation $y_1/y_3 = \psi_1/\psi_0$, $y_2/y_3 = \psi_2/\psi_0$ von $f = 0$, d. h. aus der gewöhnlichen gesonderten Einführung zweier neuer Variabeln, folgen (s. oben V, 39); ferner die im allgemeinen nur mehrdeutig umkehrbare Transformation von $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ vermittelst

$$\rho x_i = \Psi_i(y_1, y_2, y_3) \quad (i = 1, 2, 3)$$

in $M.F(y_1, y_2, y_3) = 0$, mit der Bedeutung, dass $M = 0$ oder vielmehr $M/D = 0$ die zugleich mit $F(y) = 0$ entstehende weitere Bildcurve von $f = 0$ ist, wo D die Determinante der $\Psi_i(y)$ ist, und $D = 0$ auf $F(y) = 0$ die den singulären Punkten von $f(x) = 0$ entsprechenden Punktpaare u. s. w. ausschneidet. Die Discussion dieser Verhältnisse (§ 16) liefert nicht nur den ersten rein algebraischen Beweis für die Erhaltung der Geschlechtszahl p bei rationaler Transformation, wenn p durch Ordnung und Singularitätszahlen der Curve $f = 0$ numerisch definirt wird; sie ist auch wichtig wegen ihrer Methode. Der Begriff der Fundamentalpunkte der Transformation (derjenigen Punkte von $f = 0$, in welchen alle ψ verschwinden), der sich Clebsch schon früher dargeboten hatte (s. oben Nr. 33), wird aus den Cremona'schen Ebenentransformationen herübergenommen und algebraisch, und zwar gleich in homogenen Coordinaten, behandelt. Daneben hat das Verfahren, nach welchem die selbstverständlichen und unbrauchbaren Lösungen der Gleichungen

$$\Psi_i(y') = \lambda \Psi_i(y)$$

(ähnlich wie in Clebsch (4)) beseitigt werden, den Anlass gegeben zur späteren Entwicklung einer neuen wirksamen Eliminationsmethode.

Als methodisch bedeutsam ist auch der erste Beweis für die Erhaltung von p, §§ 14, 15 desselben dritten Abschnitts, zu betrachten. Hierbei ist p als Anzahl der linear unabhängigen Integrale erster Gattung gedacht; die Eigenschaft, dass diese Integrale für alle Wertsysteme x, für die $f(x) = 0$ ist, endlich sind, würde offenbar genügen, um zu zeigen, dass eine Transformation der Art $\rho x_i = \Psi_i(y)$ dieselben wiederum in Integrale erster Gattung überführen muss, dass also eine 1-1-deutige Transformation die Zahl p invariant lässt. Aber Clebsch-Gordan wünschen unabhängig von jener Eigenschaft zu zeigen, dass auch die algebraische Form des Integranden, welche das Integral zu einem solchen erster Gattung macht, erhalten bleibt, der Ausdruck nämlich $\varphi(x).d\varpi_x$, wo $d\varpi_x = \dfrac{\Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{\Sigma_i c_i f'(x_i)}$ und $\varphi(x)$ die allgemeinste, p willkürliche Parameter linear und homogen enthaltende ganze Form $(n-3)$ter Dimension

ist, welche für die Doppel- und Rückkehrpunkte von $f = 0$ verschwindet. Hierbei tritt zum ersten Male (vgl. indess Cayley (1), s. oben Nr. 9) die durch das Homogene nahegelegte Trennung des Integranden in das Product mehrerer Formen auf, die gesondert transformirt werden: $\Sigma \pm c_1 x_2 dx_3$ geht über in $D \Sigma \pm k_1 y_2 dy_3$, $\Sigma c_i f'(x_i)$ in $M \sum_h k_h F'(y_h)$, die Form $\varphi(x)$ in $M/D \cdot \Phi(y)$, für $F(y) = 0$, wo nun $\Phi(y)$ die vorher für φ angegebenen Eigenschaften, nur gegenüber $f(x) = 0$ erhält. Uebrigens lag es Clebsch-Gordan fern, aus dieser letzteren Ueberführung weitere Schlüsse auf die Beziehung der Formen φ zum Gebilde $f = 0$, wie etwa auf deren Schnittpunktsysteme, zu ziehen.

43. Die Auszeichnung der Curven φ durchzieht, wie schon die Riemann'sche, so die ganze Clebsch-Gordan'sche algebraische und transcendente Theorie. In algebraischer Beziehung tritt die Auszeichnung darin hervor, dass im Schnittpunktsystem von $f = 0$ mit den adjungirten Curven von höherer als $(n-3)$ter Ordnung p Punkte durch die übrigen bestimmt sind, mit adjungirten Curven $(n-3)$ter Ordnung nur $p-1$ Punkte, mit adjungirten Curven von niedrigerer Ordnung aber eine nicht von p allein abhängige Zahl von Punkten — Angaben, welche bei Clebsch-Gordan freilich auf blosser Constantenzählung beruhen. Auf transcendentem Wege wiederum, und im Princip streng, wird bei Clebsch-Gordan die Umkehrung bewiesen: p durch das Jacobi'sche Umkehrproblem, und speciell durch das Abel'sche Theorem, zu bestimmende Punkte ergeben sich dann als unbestimmt, wenn sie auf einer zu f adjungirten Curve $(n-3)$ter Ordnung, $\varphi = 0$, liegen. Eingehend wird noch der Zusammenhang der Nullpunkte dieser Curven $\varphi = 0$, auch für den Fall, dass in den p Punkten eine ganze Schar von Curven φ verschwindet, mit dem Verhalten der von Clebsch-Gordan benutzten Transcendenten untersucht, insbesondere mit dem Verschwinden der Thetafunction und ihrer Differentialquotienten, und zwar unabhängig von Riemann's Abhandlung über das Verschwinden der Thetafunctionen, J. f. M. Bd. 65, die nur kurze Zeit vor dem Buche erschienen sein kann.

Adjungirte Curven φ. Normalcurve.

Die Thatsache, dass man durch $p-3$ beliebige Punkte von $f = 0$ noch eine lineare zweifach unendliche Schar von Curven φ legen kann, und dass man so auf $f = 0$ Schnittpunktgruppen von nur je $p+1$ Punkten erhält, wird von Clebsch-Gordan zur Transformation von $f = 0$ in eine Normalcurve $(p+1)$ter Ordnung benutzt (s. Rf. V, 38). Indessen halten die Verfasser diese Curve bei der allgemeinen Riemann'schen Klasse für die Normalcurve niedrigster Ordnung. Dass dies nicht zutrifft, hätten sie aus dem § 61 des eigenen Werkes erkennen können, der später (s. Rf. V, E) den

Anlass zur Einführung der „Specialgruppen" gegeben hat. An dieser Stelle werden nämlich von Clebsch-Gordan solche Punktgruppen von $f=0$ behandelt, durch welche von linear unabhängigen Curven φ eine mehr hindurchgeht, als die Abzählung liefert. So existiren für eine ∞^2-Schar von Curven φ, die durch $p-3$ willkürlich gewählte Punkte von $f=0$ gehen, noch Punktpaare, durch die je ein Büschel der Schar geht — entsprechend je einem der Doppelpunkte der transformirten Normalcurve. Solche Gruppen, und die analogen noch specielleren mit mehr als einem überzähligen Punkte, hätten, wenn man sie als Basispunkte für φ-Curven zur Transformation benutzte, die Transformationscurve in ihrer Ordnung noch weiter herabzudrücken erlaubt. Das Problem steht natürlich in directem Zusammenhange mit dem vorher genannten über das Verschwinden der Thetafunction, und so bietet es sich auch bei Clebsch-Gordan dar.

Von einer Untersuchung der Normalcurven in Bezug auf invariante Ausdrücke für die Klasse, wie die Moduln, haben sich Clebsch-Gordan (s. deren Vorrede) im Hinblick auf die V, 38 besprochene Cayley'sche Note (1) abhalten lassen.

Reduction der Integrale.

44. In der Klassificirung der zu $f(x)=0$ gehörenden Integrale in drei Gattungen schliessen sich Clebsch-Gordan an Riemann an, der aus seiner transcendenten Definition auch die Bildung der Integranden aus der Gleichung $F(s,z)=0$ ableitet. An Stelle der bei Riemann aus den transcendenten Eigenschaften geschlossenen Reducirbarkeit aller Integrale auf drei Gattungen tritt aber bei Clebsch-Gordan die rein algebraische Reduction des allgemeinsten Ausdrucks $M/N.d\varpi_x$, in welchem der Zähler M um $n-3$ Dimensionen höher ist als der Nenner N. Die Ausführung dieser Reduction geschieht nicht in homogenen Coordinaten, sondern an der Gleichung $F(s,z)=0$, indem der Nenner N mit Hülfe von $F=0$ auf eine Function $R(z)$ von z allein gebracht $[AN+BF=R(z)]$ und die gewöhnliche Partialbruchzerlegung angewandt wird. An Stelle dieser Zerlegung ist später in Clebsch-Lindemann's Geometrie, I. Band S. 778ff., eine dem Geiste des Aronhold'schen Verfahrens (V, 9) insofern mehr entsprechende getreten, als das Homogene durchaus beibehalten wird, indem der Nenner zwar ebenfalls zuerst in ein Product von Geraden durch einen festen Punkt verwandelt, dann aber an Stelle der gewöhnlichen Partialbruchzerlegung eine Zerlegung durch identische Relationen vorgenommen wird. Ein dem letzteren ganz analoges Verfahren, nur in mehr geometrischer Form, findet sich schon bei Cremona (3). Wie man auch ohne die Productzerlegung des Nenners algebraisch zum Ziele kommen kann, ist von Noether, Math. Ann. 37, gezeigt worden.

Unter „allgemeinstem" Ausdruck $\int M\,N.d\varpi_x$ wird bei Clebsch-Gordan ein Integral verstanden, in welchem M, wie N, für die vielfachen Punkte von $f = 0$ nicht zu verschwinden braucht. Ein solches Integral würde also wegen dieses Verhaltens von M gerade in diesen, nur für die zu Grunde gelegte Gleichung $f = 0$ (nicht für alle Gleichungen der Klasse) ausgezeichneten Punkten unendlich werden. Man sieht hieraus, dass auch das Werk von Clebsch-Gordan sich von der Auszeichnung einer bestimmten Curve der Klasse (dem projectiven Standpunkte) nicht völlig frei macht.

45. Das Abel'sche Theorem wird nur für Integrale dritter Gattung, die in zwei Punkten ξ, η von $f = 0$ logarithmisch unendlich werden, aufgestellt und für die übrigen Gattungen durch Specialisiren abgeleitet. Der Weg ist genau der von Clebsch (2) eingeschlagene (s. oben Nr. 28), indem zum Zweck der Einführung des Parameters $\lambda = \psi(x)/\chi(x)$ als unabhängig Variabler die willkürlichen Grössen c_i des Aronhold'schen Differentialausdruckes $d\varpi_x$ mit den Unterdeterminanten aus den Differentialquotienten von $\psi(x)$ und $\chi(x)$ proportional gesetzt werden. Auch hier wird wieder der Fall, wo $\psi(x)$ und $\chi(x)$ für die vielfachen Punkte von $f = 0$ nicht verschwinden, als der formal-allgemeine behandelt. Unter Einführung nicht-homogener Coordinaten werden die Entwicklungscoefficienten so weit berechnet, dass sich die Summe der Integrale, ausgedehnt über die Schnittpunkte der Curve $\lambda = 0$ bis zu denen $\lambda = \infty$ durch irgend welche einem beliebigen λ-Wege zugehörige Zwischenlagen, in der eleganten Form $\lg [\psi(\xi)/\chi(\xi) : \psi(\eta)/\chi(\eta)]$ darstellt. Es ist dies dieselbe Form, welche für den hyperelliptischen Fall schon Abel (Werke, herausg. v. Sylow und Lie, I, pag. 445; Cr. J. III, „Remarques etc.") vollständig entwickelt hat, während die Formel von Abel für allgemeine $f = 0$ (Werke I, p. 159, Pariser Mém.) dieser übersichtlichen Darstellung entbehrt, dafür aber gleich auf das allgemeinste Integral sich bezieht, also die Reductionsformeln auf Integrale erster, zweiter, dritter Gattung mitumfasst. Dass übrigens die Beibehaltung des Homogenen die Rechnung nicht länger, aber geometrisch übersichtlicher gestalten würde, hat Cremona (3) gezeigt; und aus Harnack's Arbeit (Math. Ann. IX, s. Rf. V. 3) entnimmt man, dass man das Abel'sche Theorem für Integrale dritter Gattung auch aus dem für Integrale erster Gattung erhalten kann.

In Bezug auf die Umkehrung des Abel'schen Theorems bleiben die früheren Einwendungen (s. V. Nr. 31, bes. Schluss von Nr. 33) auch für das Buch in unveränderter Gültigkeit. Es kommt sogar hier ein

Abel'sches Theorem.

weiterer Einwand hinzu. Da bei Riemann und Weierstrass die algebraische Umkehrung des Abel'schen Theorems auf einen functionentheoretischen Satz gestützt wird, von dem Clebsch-Gordan nicht Gebrauch machen können, so wird der Abschluss des Beweises bei Clebsch-Gordan nur durch die Lösung des Umkehrproblems geliefert und somit erst S. 216 (bezw. 202) erbracht. Nun wird an mehreren vorhergehenden Stellen schon von dem das Theorem umkehrenden Satze gesprochen. Betrachtet man indessen diese Anwendungen genauer, so erkennt man, dass dieselben sich alle auf die Reduction einer Summe von Integralen auf eine Summe von nur p Integralen beziehen; und hierfür hätte schon das Theorem in seiner ursprünglichen Form, nur mit den notwendigen Bedingungen für die Umkehrung, genügt.

Das Abel'sche Theorem selbst wird übrigens von Clebsch-Gordan noch auf einem anderen Wege bewiesen, der zwar transcendent ist, aber deshalb hier erwähnt werden soll, weil er eine bedeutende Verallgemeinerung einer Riemann'schen Methode vorstellt und zugleich eine grosse Reihe von Resultaten liefert. Bedeutet $S_{\xi\eta}$ ein Integral dritter Gattung mit den Unstetigkeitspunkten ξ, η; Q entweder ein Integral dritter Gattung oder eine algebraische Function $\psi(x)/\chi(x)$ oder den Logarithmus einer solchen, so wird das Integral $\int Q dS_{\xi\eta}$ zu Null, wenn man die Integration über die ganze Begrenzung der Riemann'schen Fläche T′ — bei Clebsch-Gordan also über sämtliche n „Umgänge" (s. unten) — und um alle Unstetigkeitspunkte herum führt. Es ergiebt sich auf diese Weise das Theorem über die Vertauschbarkeit von Parameter und Argument für Integrale dritter Gattung, bezw. die erwähnte Form des Abel'schen Theorems, oder auch der Ausdruck von $\lg \psi(x)/\chi(x)$ durch eine Summe von Integralen dritter Gattung mit derselben Grenze x, bezw. die Darstellung der algebraischen Function $\psi(x)/\chi(x)$ durch eine Summe von Integralen zweiter Gattung mit der Grenze x; ferner erhält man, wie bei Riemann, Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln. — Der später von Humbert eingeschlagene Weg zum Beweise des Abel'schen Theorems für beliebige Integrale (J. de Math., Sér. 4, t. III u. t. V, 1887, 1889) ist genau der eben beschriebene, nur dass er aus der Theorie der Fuchs'schen Functionen eine Variable λ einführt, durch welche sich s und z in $F(s, z) = 0$ eindeutig darstellen lassen: die Formel erscheint dann in der λ-Fläche als eine Residuenformel. — Dass zwischen der algebraischen und der transcendenten Reductionstheorie die Cauchy'sche Residuenformel das Band bildet, wird von Clebsch-Gordan nicht erwähnt (vgl. Ref. über Weierstrass (zweiter Teil), Abschn. VII, Nr. 15).

Die Schleifentheorie bei Clebsch-Gordan und ihre weitere Entwicklung.

46. Zu den bedeutendsten Leistungen des Clebsch-Gordan'schen Werkes gehört die Ausbildung der Puiseux'schen Schleifentheorie, die Anordnung der in dem algebraischen Gebilde möglichen cyklischen Wege (s. Ref. über Puiseux, II. D). Es werden alle Schleifen zu n vollständigen „Umgängen", den n verschiedenen Wurzeln s der Ausgangsstelle z_0 zugeordnet, zusammengefasst, von denen jeder wieder aus einer Anzahl von Cyklen besteht; und vermöge der Umgänge werden alle $2p+n-1$ Cyklen auf nur $2p$ unabhängige zurückgeführt. Der Fortschritt besteht aber vor allem in der Einführung noch eines zweiten Schleifensystems. Denkt man sich nämlich die Verzweigungspunkte der Z-Ebene der Reihe nach durch eine Linie verbunden (später „Absonderungsschnitt" (Lüroth), bei Fuchs, J. f. M. Bd. 71, „Hauptschnitt" genannt) und fallen die früheren Schleifen, von einem festen Punkte z_0 ausgehend, alle auf eine Seite dieser Linie, so werden die neuen Schleifen von demselben Punkte aus in derselben Ordnung, aber auf der anderen Seite jener Linie, gezogen; die reciproken Beziehungen zwischen diesen beiden Systemen werden eingehend entwickelt. Wendet man diese Theorie auf die Integration $\int J\,dH$ über alle Umgänge an, wo J und H Integrale erster Gattung sind, so ergeben sich zunächst durch Combination der einzelnen Cyklen bilineare Relationen $\sum_{i,k}^{1 \ldots 2p} c_{ik}(b_i)(a_k) = 0$ zwischen den Periodicitätsmoduln (a_k), (b_i) der beiden Integrale, und die Betrachtung des Zahlensystems c_{ik} (mit windschiefer Determinante) führt zu neuen Combinationen der Art, dass die Periodicitätsmoduln einander paarweise zugeordnet und die Relationen von der Form $\sum_i^{1 \ldots p} (M^{(2i-1)}N^{(2i)} - M^{(2i)}N^{(2i-1)}) = 0$ werden, also zu den „normalen" Periodicitätsmoduln. Eine hierfür noch ausgiebigere Ausnutzung der Reciprocität der Schleifen findet sich bei Casorati, Annali di Matem. Ser. 2, t. III, wie andererseits bei Schläfli, J. f. M. 76, die analysis situs herangezogen wird. — Es fehlt bei Clebsch-Gordan nur der, später von Schläfli, J. f. M. 76, freilich mittelst transcendenter Abbildung, nachgelieferte Beweis (vgl. auch Prym, J. f. M. 71, p. 231), dass die bei der Aufstellung der zugehörigen p Normalintegrale vorkommende Determinante nicht verschwindet. — Die Clebsch-Gordan'sche Theorie ist also, wenn auch nicht so anschaulich wie die Riemann'sche Zerschneidungstheorie, doch ein vollständiges Aequivalent für dieselbe, hat aber den Vorzug, dass sie einen bestimmten Weg vorzeichnet, auf dem man zu einer kanonischen Zerschneidung gelangen kann.

Ihre volle Bedeutung ist übrigens erst durch die weitere Entwick-

lung ins Licht gesetzt worden, die deshalb hier kurz angedeutet sei. Von Lüroth (Math. Ann. IV) wurde die Schleifentheorie soweit durchgebildet, dass der Uebergang von ihr zu der Riemann'schen Fläche T' mit ihrem kanonischen Querschnittsystem klar zu Tage tritt. Lüroth verbindet die Verzweigungspunkte der Z-Ebene durch ein geschlossenes Polygon, das den Ausgangspunkt 0 der Schleifen erster Art in seinem Inneren enthält, und betrachtet als „Uebergangslinien" (Verzweigungsschnitte) die Linien von den Verzweigungspunkten nach einem Punkte 0', der ausserhalb des Polygons liegt. Indem er die Vertauschungen unter den Wurzeln verfolgt, welche durch Abänderung des Polygons entstehen, leitet er den Satz ab: „Die Verzweigungsschnitte können so gelegt werden, dass sie in n — 1 Gruppen zerfallen (bei n Blättern), so dass die Schnitte je einer Gruppe immer dieselben Blätter verbinden." Welch mannigfacher Abänderung und übersichtlicher Anordnung aber diese typische Darstellung der Riemann'schen Fläche für F(s, z) = 0 noch fähig ist, hat Clebsch, Math. Ann. VI, nachgewiesen. Sowohl die Punkte einer Gruppe als ihre Anzahl lassen sich variiren, wenn nur immer die Zahl der Gruppen = n — 1 ist, und in jeder Gruppe eine gerade Zahl von Punkten bleibt; insbesondere lässt sich immer der hyperelliptische Typus erreichen, für welchen eine Gruppe aus w — 2(n — 2), die übrigen n — 2 Gruppen aus je zwei Verzweigungspunkten bestehen (s. auch Bertini, Rendic. d. Acc. d. Lincei, Febr. 1894). Da das Integral $\int J dH$ über die Schleifen jeder Gruppe für sich gleich 0 ist, so ergeben sich unmittelbar die Relationen zwischen kanonischen Periodicitätsmoduln.

Im Anschluss an die letzterwähnte typische Fläche hat F. Klein (Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale, Leipzig 1882) den wichtigen Schluss gezogen, dass alle Klassen algebraischer Gebilde — jede Klasse als ein Individuum aufgefasst — zusammen eine irreductible algebraische Mannigfaltigkeit, und zwar nach der Riemann'schen Abzählung von 3p — 3 Dimensionen, bilden.

Während die bisher besprochenen Untersuchungen immer nur einfache Verzweigungspunkte voraussetzen und eine Riemann'sche Fläche von beliebiger Gestalt nur als Grenzfall dieses einfachen Falles erscheint (für die dreiblättrige Fläche gab Kasten, Dissert. Göttingen 1876, eine Erweiterung des Lüroth'schen Ganges auf Verzweigungspunkte zweiter Ordnung), hat Lüroth eine directe Behandlung des allgemeinsten Falles unternommen und für diesen die kanonischen Periodenwege in zwei Abhandlungen aufgestellt „Ueber die kanonischen Perioden der Abel'schen Integrale" (Abh. der Münchener Akad. Bd. 15, 1885 — vorher Sitzungsber. der phys. med.

Soc. Erlangen. 1883 — und Bd. 16. 1887), die beide an die Ideen des Clebsch-Gordan'schen Buches anschliessen, die eine mehr die geometrische Vorstellung der Riemann'schen Fläche benutzend, die zweite nur mit der Tafel der Verzweigungen rechnend. Insbesondere die letztere Abhandlung erledigt das Problem in sehr einfacher und übersichtlicher Weise. Man findet dort auch die übrige bezügliche Litteratur (Klein's Arbeiten über Riemann'sche Flächen etc.) zusammengestellt, zu der neuerdings noch Arbeiten mit gruppentheoretischer Auffassung (Hurwitz, Math. Ann. 39, Hoyer, ibid. 42) getreten sind.

47. Zu dem Werke von Clebsch-Gordan zurückkehrend, bemerken wir ferner, dass auch die Anwendung der Abel'schen Functionen auf Berührungsprobleme, insbesondere die Zweiteilung, in dem Buche gefördert ist. Es wird gezeigt, dass unter den „Systemen" von Berührungscurven, welche man den geraden Thetafunctionen zuordnen kann, bei jeder kanonischen Zerschneidung der Riemann'schen Fläche jeweils eines ausgezeichnet wird, das der gewöhnlichen Thetafunction von der Charakteristik (0, ... 0; 0, ... 0) entspricht, und dass durch Einführung der Berührungspunkte einer Curve aus diesem System die Bestimmung der Constanten in den Argumenten der Thetafunction bei der Riemann'schen Umkehrung geleistet wird. Dies bedeutet einen wesentlichen Fortschritt, der auch sehr bald von allen weiterhin die Umkehrung behandelnden Arbeiten (Weber, Fuchs, ...) aufgenommen worden ist. Ein weiterer bezieht sich auf die Behandlung des Zweiteilungsproblems, insbesondere auf die Ausdehnung der aus der Theorie der elliptischen Functionen geläufigen Unterscheidung von allgemeiner und specieller Teilung, und die Unterscheidungen der verschiedenen Fälle von reiner Zweiteilung. Gegenüber Clebsch, J. f. M. Bd. 63, beruht der Fortschritt in der Ausdehnung auf die adjungirten Curven. Indessen liegt, gruppentheoretisch betrachtet, bei Clebsch-Gordan noch nicht völlige Klarheit in diesen Verhältnissen vor (so ist die am Schlusse des § 76 erwähnte Sonderung in zwei Klassen nicht richtig). Weiteres darüber s. in Capitel IX über „Wurzelfunctionen".

Zweiteilung.

48. Zu den Schwächen des Clebsch-Gordan'schen Buches gehört die in der Plücker'schen Tradition begründete mangelhafte Constantenzählung. So namentlich wird die Frage, wie viele von den Schnittpunkten der Grundcurve $n$ter Ordnung f_n mit einer zu f_n adjungirten Curve φ durch die übrigen mitbestimmt sind, dahin beantwortet, dass, wenn φ von einer Ordnung $> n-3$, p Punkte, wenn aber von der Ordnung $n-3$, im allgemeinen $p-1$ abhängige Punkte $(p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)-d-r)$, gefunden werden. Dabei wird aber die Anzahl der unabhängigen Bedin-

Constantenzählung.

gungen, welche die Curve ψ zu erfüllen hat, wenn sie durch die d+r Doppel- und Rückkehrpunkte von f_n geht, einfach gleich d+r angenommen, ohne dass die Richtigkeit dieser Annahme geprüft wird. Denn die Sätze der Vorrede: „da es sich zunächst um eine neue Festlegung der allgemeinen Grundzüge einer sehr weiten Theorie handelt, so wird man es uns nicht verdenken, wenn wir auf Besonderheiten nirgends eingegangen sind ... Solche Besonderheiten, welche immer an specielle Eigenschaften der algebraischen Fundamentalgleichung geknüpft sind, treten namentlich auch bei den hyperelliptischen Functionen hervor, u. s. w.", erklären in dieser Beziehung nichts. Sobald nämlich die Zahl der Doppelpunkte für das bezügliche p nur etwas gross ist (z. B. Clebsch-Gordan'sche Normalcurve für p = 8, eine f_9 mit 20 Doppelpunkten), liegen diese Punkte immer sehr speciell, es treten von selbst unbekannte „Besonderheiten" ein, ohne dass man von einem „Ausnahmefalle" reden könnte. Eine Modification in der Anzahl der φ etc. könnte also schon in dem „allgemeinen" Falle eintreten; und wenn nicht, so bliebe immer noch die Frage, wie man entscheiden soll, ob eine gegebene Gleichung sich dem allgemeinen Falle unterordnet oder entzieht. Es fehlen bei Clebsch-Gordan die Mittel, um sich über die Richtigkeit und Tragweite der algebraischen Sätze zu vergewissern. Die Bedeutung des Clebsch-Gordan'schen Werkes für die Theorie der algebraischen Functionen besteht aber darin, dass die algebraischen Sätze, wie das Abel'sche Theorem, klar ausgesprochen, in ihrer functionentheoretischen Bedeutung erkannt und zur Auffassung und Lösung der Probleme der Abel'schen Functionen fortwährend benutzt werden; dass überhaupt der algebraische Teil der Theorie mehr in den Vordergrund gerückt und teilweise (wie die Transformationstheorie) bereits auf selbständige Grundlage gestellt wird.

An Clebsch-Gordan anschliessende Forschungen. Ausnahmeelemente. Moduln. Erhaltung der Zahl p.

49. Die Transformationstheorie und die Frage nach den Moduln der algebraischen Gebilde bilden den Gegenstand, wie der dem Clebsch-Gordan'schen Werke unmittelbar vorausgehenden, so auch der zunächst an dieses Werk anschliessenden Forschungen. Die allgemeinen Verhältnisse, die bei einer eindeutigen Transformation einer Curve auftreten, hat Brill (1) näher untersucht, insbesondere auf die Ausnahmeelemente (Fundamentalpunkte von f(x) = 0 und Schnitt von F(y) = 0 mit den entsprechenden Fundamentalcurven, nach der Bezeichnung von Nr. 42) hin. Durch specielle Transformationen von f werden höhere vielfache Punkte der transformirten Curve F erzeugt, und vielfache Punkte von F mit verschiedenen Tangentenrichtungen aufgelöst in Gruppen einfacher Punkte von f, die immer zugleich auf einer nur von

der Transformation abhängigen rationalen Curve (Fundamentalcurve) liegen müssen. Durch eindeutig umkehrbare Ebenentransformationen wird der Uebergang von der Clebsch'schen auf die Riemann'sche Normalform bis zu $p = 5$ hergestellt. Die höheren Fälle verlangen eine algebraische Untersuchung gewisser Specialgruppen (vgl. oben Nr. 43). Der Fall $p = 6$ wird in (3) aus Anlass einer von Casorati und Cremona gemeinsam verfassten Note (4) auf die Aufgabe zurückgeführt, für eine Curve f_7 mit neun Doppelpunkten zwei nur in je vier Punkten unendlich werdende Functionen, d. h. zwei adjungirte Curvenbüschel, deren Curven f_7 nur je vierpunktig beweglich treffen, zu bestimmen, und dieses Problem wird weiterhin auf die Frage nach den vierfach schneidenden Sehnen einer Raumcurve achter Ordnung reducirt (s. unten Nr. 51), wobei sich dann fünf verschiedene Lösungen des Problems ergeben.

Die Modulfrage selbst wird über die hier bezeichneten niedrigsten Geschlechter nicht hinausgeführt. Für $p = 4$ erhält Cremona (4) die Zahl 9 der Moduln dadurch, dass er durch Transformation einen der Doppelpunkte von $f_5 = 0$ zu einem Rückkehrpunkte macht, für $p = 6$ die Zahl 15 durch eine räumliche Betrachtung (vgl. übrigens dazu Brill-Noether, § 16, Math. Ann. VII). — Dagegen zeigt noch Weber (J. f. M. Bd. 70) — mittelst conformer Abbildung —, dass für die Moduln mindestens eine Relation bestehen muss, wenn für die Klasse unendlich viele Formen φ existiren sollen, die alle in je $p - 1$ Punkten zu 0^2 werden sollen. Von Curven mit speciellen Moduln benutzt Cremona (2) als Normalform der hyperelliptischen Curven eine Curve $(p+2)$ter Ordnung mit p-fachem Punkte zur Ableitung einiger Eigenschaften dieser Curven.

Unabhängig davon begannen übrigens damals bereits die Versuche, eine algebraische Function s von z in ihrer algebraischen Abhängigkeit von den Moduln in der Weise zu untersuchen (übrigens ganz vom Riemann'schen Standpunkt aus), dass man die Verzweigungspunkte sich auf geschlossenen Wegen bewegen liess. Wegen der Litteratur über diese „Monodromie“-Untersuchungen s. VIII. Abschn. (Schlussnummer).

Andererseits wurden durch die Betrachtungen über den Satz von der Erhaltung der Zahl p auch die Geometer zu neuen Beweisen angeregt. Cremona (5) legt die beiden sich entsprechenden Curven in zwei verschiedene Ebenen, construirt die windschiefe Fläche, welche durch die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte erzeugt wird, und erhält den Satz dadurch, dass er die Ordnung der Doppelcurve der Fläche aus jeder

der beiden ebenen Curven bestimmt. Bertini nimmt die einander entsprechenden Curven $C(x)$, $C'(x')$ in einer Ebene an, dazu zwei Punkte a, a', und construirt als Ort des Schnittes der Strahlen ax mit den entsprechenden $a'x'$ eine Curve Γ; indem er für Γ die Klasse auf doppelte Weise ausdrückt, erhält er wieder den Satz. Der Zeuthen'sche Beweis verfolgt denselben Gedanken, nur mit Ausdehnung auf mehrdeutig sich entsprechende Curven, wobei eine Relation zwischen deren p und p' gefunden wird (s. Ref. über singuläre Punkte, VI, 19). Modificationen dieses Beweises finden sich bei Voss und Clebsch, bei letzterem in algebraischer Formulirung: es zeigt sich, dass die Sache auf successive Einführung der beiden neuen Variabeln hinauskommt. Aus der Zeuthen'schen Relation zwischen p und p' folgt, wenn man sich auf 1-k-deutige Beziehung beschränkt, der von Weber, J. f. M. Bd. 76, ausgesprochene, und ähnlich hergeleitete Satz: Führt $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, $x_1 : x_2 : x_3 = \psi_1(y) : \psi_2(y) : \psi_3(y)$ auf eine Curve $F(y) = 0$ von demselben Geschlecht p, so ist die Substitution dann eindeutig umkehrbar, wenn $p > 1$ ist.

Rückblick. 50. Wir hatten in dem Referat V, C über Clebsch, 1863—1865, hervorgehoben, dass derselbe zwei heterogene Wissensgebiete, die Theorie der Abel'schen Functionen und die der algebraischen Curven, in systematische Verbindung gesetzt hat. Da sein algebraischer Ausgangspunkt die Eliminationstheorie ist, und diese zunächst nur vollständige Schnitte von Curven im Auge hat, so wird es ihm, besonders beim Abel'schen Theorem, schwer, die projective Seite der Fragen abzustreifen. Aber bei seiner Beschäftigung mit ganzen Klassen von Curven von den ersten Geschlechtszahlen rücken auch seine Problemstellungen denjenigen von Riemann und Roch immer näher; und in den Abel'schen Functionen von Clebsch-Gordan sind die geometrisch-algebraischen Anschauungen und Sätze in solchem Masse umgestaltet und inhaltreicher geworden, dass sich selbst für die transcendente Seite des Jacobi'schen Umkehrproblems, bei beliebigem Geschlecht aber einer nicht zu speciellen Grundcurve, neue Wege erschliessen.

Wiewohl wir in den Referaten über Göpel und Rosenhain (III, D), Weierstrass (III, E), Riemann (IV, C, D) das Umkehrproblem in den Kreis unserer Besprechung gezogen haben, können wir doch bei Clebsch-Gordan auf die Einwirkung, welche die Geometrie auf die Gestaltung dieses Problems ausgeübt hat, nicht eingehen; wie wir auch in dem Referat VII über Weierstrass' algebraische Theorien das Umkehrproblem bei Seite lassen werden. Von Abel und Jacobi nämlich bis Riemann hin war es eben die Beschäftigung mit diesem Problem, an

der sich der Functionsbegriff, speciell der Begriff der algebraischen Functionen, herausbildete. Nachdem aber durch Riemann dieser Schatz einmal gehoben und in die Form einer Theorie gebracht war, spielt in den nach-Riemann'schen Theorien der algebraischen Functionen das Umkehrproblem nur noch die Rolle einer Anwendung dieser oder analoger Darstellungen.

Wenn so bei Clebsch-Gordan die oben bezeichnete Verbindung zweier Gebiete zunächst den transcendenten Partien zu gut kam, erstreckte sich in der Folge ihre Wirksamkeit auch auf die andere Seite, und zwar weit über die ursprünglich von Clebsch gestellten Probleme hinaus. Dies zeigt sich nicht nur in der oben V. Nr. 41—47 und Nr. 49 besprochenen Umgestaltung der algebraischen Transformationsprincipien und in der ebenfalls in Nr. 49 erwähnten Ausbreitung der geometrischen Probleme über den nun erweiterten Gesichtskreis: auch eine algebraische Theorie der algebraischen Functionen ist unter dem Zeichen des Clebsch-Gordan'schen Werkes entstanden, über die, als zeitlich erste ihrer Art, zunächst zu berichten ist.

E. Brill-Noether'sche Richtung [von 1871 an].

A. Brill,

(1) Ueber zwei Eliminationsprobleme etc., Göttinger Nachr., Dez. 1870.

(2) Ueber diejenigen Curven eines Büschels, welche eine gegebene Curve zweipunktig berühren. Math. Ann. III. 1871.

(3) Zur Theorie der Elimination und der algebraischen Curven. Math. Ann. IV. 1871.

(4) Ueber zwei Berührungsprobleme. Math. Ann. IV. 1871.

(5) Ueber Elimination aus einem gewissen System von Gleichungen. Math. Ann. V. 1871.

(6) Ueber Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve. Math. Ann. VI. 1872 (vorher Gött. Nachr. Oct. 1871).

M. Noether,

(1) Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen. Math. Ann. II (s. S. 314), 1869.

(2) Ueber einen Satz aus der Theorie der algebraischen Functionen. Math. Ann. VI. 1872 (vorher Gött. Nachr. 1872).

A. Brill und M. Noether, Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie. Math. Ann. VII, S. 269—310. Sept. 1873.

Vorher: Note dazu in den Gött. Nachr. v. Jan. 1873, S. 116—132, und in Salmon's Höhere ebene Curven, übersetzt von Fiedler, als Anhang, 1873.

J. Sylvester in Salmon's Higher plane curves, II ed. 1873, und deren Uebertragung von Fiedler 1873 (Theory of Residuation bei kubischen Curven). Dazu:

E. Bertini, La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico. Annali di Matem. Ser. 2, t. XXII. 1894.

Siehe auch:

Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, 1, 4. Abt. (Cap. VII) und 6. Abt., 1876, mit den Bemerkungen in Noether's Recension, Ztschr. f. Math. u. Phys. XXII, lit. hist. Abt., 1877;

Klein-Fricke. Elliptische Modulfunctionen. Bd. I 1890, Abschn. 3, Cap. 2;

E. Study. Ein Reciprocitätsgesetz in der Theorie der algebraischen Functionen. Ber. der Sächs. Ges. d. Wiss. 1890.

Das Problem der Specialgruppen. Ausgezeichnete Punktgruppen.

51. Das Werk von Clebsch-Gordan über die Abel'schen Functionen reizte durch seine Probleme und durch seine Lücken zu neuen algebraischen Forschungen, aus denen eine rein algebraische Theorie der algebraischen Functionen hervorgegangen ist.

Zunächst lag das Problem der Aufsuchung der Specialgruppen vor. Von einigen besonderen Fällen ist bereits berichtet worden: von der Aufsuchung der Minimalgruppen — den Unendlichkeitspunkten der Functionen, die in möglichst wenigen Punkten unendlich werden — für die niedrigsten Werte der Geschlechtszahl p. Sie dienten zur Transformation des algebraischen Gebildes auf die Riemann'sche Normalform. Die Riemann'sche Definition solcher und analoger Specialgruppen G giebt an sich kein algebraisches Mittel zu ihrer Aufsuchung an die Hand; erst wenn man den Durchgang durch die geometrisch-algebraische Auffassung nimmt, erscheinen jene Gruppen als Schnittpunkte einer Schar von Curven φ von gleicher (etwa mter) Ordnung, die durch die d Doppelpunkte gehen (adjungirten Curven), und die auf der Grundcurve f (nter Ordnung) noch eine gewisse Gruppe Γ von festen Punkten (Basisgruppe) gemeinsam haben. Wenn man diese Gruppe Γ_Q von Q Punkten ($Q < mn - 2d - p$) beliebig annimmt, so wird im allgemeinen zu ihr eine ∞^r-Schar von Gruppen G („eine Gruppe $G^{(r)}$") gehören ($r = mn - 2d - Q - p$), weil durch Γ und die Doppelpunkte noch, vermöge $f = 0$, ∞^r Curven φ gehen. — Im Falle der Specialgruppen G nun hat die Gruppe Γ die Eigenschaft, dass durch Γ und die Doppelpunkte von f mehr Curven φ der mten Ordnung gehen, als die einfache Abzählung liefert; und die Aufsuchung solcher „ausgezeichneten" Basisgruppen Γ (s. auch Abschn. X, Nr. 12) ist ein algebraisches Problem, angreifbar nach Art der in § 61 von Clebsch-Gordan's Abel'schen Functionen für den Fall $m = n - 3$ angeführten.

Nach der Forderung sollen von den s Gleichungen der Art

$$\psi_m(x^{(j)}) \equiv \sum_{h=1}^{k} \lambda_h \psi_h(x^{(j)}) = 0, \quad \text{wo} \quad f(x^{(j)}) = 0$$
$$(j = 1, 2, \ldots, s),$$

eine gegebene Anzahl i eine lineare Folge der übrigen sein, was auf das Verschwinden aller Determinanten einer gewissen Ordnung aus der Matrix der Ternärformen $\psi_h(x^{(j)})$ führt. Die Aufgabe nun, die Zahl der Lösungssysteme eines solchen Gleichungssystems zu finden, erfordert Eliminationsbetrachtungen, welchen durch die Salmon'schen Matricesuntersuchungen nur teilweise vorgearbeitet war; sie sind von Brill in Note (5) zunächst für $p = 0$ und später in (6), Hand in Hand mit den algebraischen Correspondenzuntersuchungen für Curven von beliebigem Geschlecht, entwickelt worden, mit explicitem Beweis damals freilich nur für kleinere Werte von i.

Ueber den Zusammenhang der Specialgruppen mit den Correspondenzuntersuchungen wird später im Zusammenhange berichtet werden (Ref. X). Es handelt sich dabei wesentlich um besondere Schnittpunkte mit Curven aus einer gegebenen Schar ψ_m. Eine bei diesem Anlass von Brill 1870 in die Theorie der Curven eingeführte Auffassung ist hier zu erwähnen, weil sie später von den Geometern systematisch verwendet wurde. Die Lösungen der für die Schar ψ_m aufgestellten Probleme sind unabhängig von den linearen Substitutionen, welchen man die Constituenten $\psi_1, \ldots, \psi_k$ der Schar ψ_m unterwerfen kann; man nehme (s. auch Abschn. X, Nr. 14) nun die $\psi_1(x) : \ldots : \psi_k(x)$ als homogene Coordinaten $y_1 : \ldots : y_k$ eines Raumes $[k-1]$ von $k-1$ Dimensionen, so liefert die Transformation

$$y_1 : \ldots : y_k = \psi_1(x) : \ldots : \psi_k(x)$$

eine der ebenen Curve $f(x) = 0$ im allgemeinen 1-1-deutig entsprechende Raumcurve in $[k-1]$, für welche das Problem als ein projectives, und zwar als ein bloss auf ebene Räume und ihre Schnitte bezügliches, auftritt. Dieser begrifflich einfache Zusammenhang wird bei Brill (1)—(4) mit einem allgemeinen Reciprocitätssatze für Matrices in Verbindung gebracht und zu Abzählungen verwertet; bei Brill-Noether wird diese Auffassung als ganz selbstverständlich vorausgesetzt (s. auch oben Nr. 39).

Algebraische Fragen.

52. Wenn eine ausgezeichnete Gruppe Γ gegeben vorliegt (s. Nr. 51), so haben, wie oben erwähnt, die zugehörigen Gruppen G die Eigenschaft, dass weniger als p Punkte einer solchen Gruppe durch die übrigen bestimmt

sind: d. h. auch die Punkte einer zugehörigen Gruppe G sind nicht willkürlich auf $f=0$ anzunehmen, sondern durch gewisse Bedingungen verknüpft, die nach Riemann („Verschwinden der Thetafunctionen", oder Riemann-Roch'scher Satz über die Constantenzahl der algebraischen Functionen, s. IV, D) darin bestehen, dass eine, bezw. mehrere, Formen φ für die Gruppe verschwinden. Es entsteht nun die Frage, ob sich diese Thatsache nicht algebraisch nachweisen lässt. Es entsteht weiter die Aufgabe, auf algebraischem Wege zu erkennen, dass sich hierbei die aus jenen Formen ψ_h gebildeten Quotienten durch solche aus Formen φ ersetzen lassen, ohne die Gruppen G zu ändern. Aber auch umgekehrt, wenn man solche Quotienten φ'/φ'' hat, die in einer Specialgruppe G unendlich werden, so fragt es sich, ob es nicht noch andere Formen ψ_h giebt, durch deren Quotienten ψ'/ψ'' jene φ'/φ'' ersetzt werden können, d. h. wie weit ohne Aenderung der G die Ordnung m der ψ_h und ihre Basisgruppen Γ noch abänderungsfähig sind, und welches die allgemeinsten Scharen der Art ψ_h sind.

Indem man diese Fragestellungen verallgemeinerte, ergab sich zum ersten Male die Forderung, alle jene Schnittpunktsätze, welche bisher, besonders bei Clebsch-Gordan, nur mit Hülfe des Abel'schen Theorems, also unter Gebrauch der Integralsummen und der sie begleitenden unvollständig bewiesenen Folgerungen, ausgesprochen und angewendet worden waren, algebraisch zu formuliren und zu beweisen, und zwar in einer alle Gruppen von $f=0$, auch die Specialgruppen, umfassenden Weise und in einer für Curven $f=0$ von jeder beliebigen Art gültigen Form. Aus dieser Forderung entstand der „Restsatz" von Brill-Noether und die Untersuchung (2) von Noether, durch die jener Satz streng bewiesen werden konnte.

Der Fundamentalsatz.

53. Wenn es sich nur um Schnittpunktsätze bezüglich einer Curve $f=0$, die keine mehrfachen Punkte hat, gehandelt hätte, so wäre die Beantwortung jener Frage mit den bisherigen geometrischen Mitteln vorauszusehen, wenn auch nicht zu beweisen gewesen. In der That ist z. B. der Ersatz des Quotienten φ'/φ'', wo φ'' die Curve f in der Gruppe G (und weiteren mit φ' gemeinsamen Basispunkten) trifft, durch den Quotienten ψ'/ψ'' identisch mit der Aufstellung einer Gleichung

$$\psi''\varphi' = \psi'\varphi'' + Af,$$

bei gegebenen φ', φ'', f; d. h. es soll ψ'' so bestimmt worden, dass $\psi''\varphi'$ durch den vollständigen Schnitt von φ'' mit f geht; wenn nun alle Schnittpunkte von φ'' mit f einfache sind, so wird, nach einer in der Geometrie oft benutzten Annahme, von ψ'' nichts weiter verlangt, als

durch G zu gehen. Auf diese Weise ist denn auch von Sylvester für eine gewöhnliche Curve dritter Ordnung, $f=0$, eine Schnittpunkttheorie entwickelt worden, die in Salmon's Higher plane curves, second edit., unter dem Namen „theory of residuation", gleichzeitig mit der Note von Brill-Noether in den Göttinger Nachrichten veröffentlicht wurde.

Aber die Geometrie hatte bis dahin die von einer Form F zu erfüllenden Bedingungen, wenn eine Gleichung $F=B\varphi+Af$ besteht, wo f und φ gegeben sind, auf blosse Constantenzählung gestützt, so dass die Richtigkeit in speciellen Fällen zweifelhaft blieb. Erst 1869 wurde von Noether (1) ein von Abzählungen absehender, auf Elimination beruhender und für einfache Schnittpunkte strenger Beweis erbracht, während der Fall vielfacher Schnittpunkte in diesem Beweise noch nicht genügend erledigt war. Einen auf demselben Gedankengange beruhenden, alle möglichen Fälle erledigenden Beweis hat derselbe in (2) gegeben.

In (1) handelte es sich darum, die in § 14 der Abel'schen Functionen von Clebsch-Gordan enthaltene Ueberführung von Integranden erster Gattung in eben solche bei 1-1-deutiger Transformation strenger zu machen; der Beweis war angeregt worden durch eine Stelle dieses Werkes, Seite 7, die sich auf die Reduction der Integranden bezieht. Will man, bei gegebenen ternären Formen $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, $f(x_1, x_2, x_3)$, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für eine Form $F(x_1, x_2, x_3)$ erkennen, welche einer Gleichung genügt:

$$1)\qquad F\equiv Af+B\varphi,$$

wo A, B ebenfalls ganze Formen in x_1, x_2, x_3 sein sollen, so wird man dieses Problem zunächst dadurch auf ein binäres zurückführen können, dass man die durch Elimination von x_1 entstehende Resultante $R(x_2, x_3)$ aus f und φ, für die bekanntlich:

$$2)\qquad R=Cf+D\varphi$$

ist, aufstellt und R statt φ in die zu suchende Identität einführt. Hier sind C und D ganze Functionen, und ist nur angenommen, dass R nicht $\equiv 0$, d. h. dass f und φ keinen Factor gemeinsam haben, und weiter — damit $R=0$ sich auf alle Schnittpunkte von $f=0$, $\varphi=0$ beziehe — dass $x_2=x_3=0$ kein Schnittpunkt von $f=0$, $\varphi=0$ sei, die letztere Annahme nur für den Gang des Beweises, nicht für den Satz. Dies ist ja im Princip der Weg, auf dem sowohl Abel, als Clebsch-Gordan und Weierstrass den Factor F/φ im Integranden reduciren. Man hat also nur die Bedingungen für F zu suchen, damit eine Gleichung der Art bestehe:

3) $$FD = A_1 f + BR,$$
wo auch A_1 eine ganze Form ist.

Für die letztere Identität ergeben sich nun offenbar getrennte Bedingungen, die sich je auf die einzelnen Factoren von R beziehen; und daraus folgt unmittelbar, dass die Bedingungen für F nur solche sein können, die sich je auf die einzelnen Schnittstellen von $f = 0$, $\varphi = 0$ beziehen.

In der Ausführung des Beweises wird erst FD durch Teilung mit der Form f, die in x_1 auf die nte Potenz ansteigen möge, auf die $(n-1)$te Potenz in x_1 erniedrigt, dann werden die Bedingungen aufgestellt, dass dieser Rest Glied für Glied durch R teilbar sei. — Das Resultat lässt sich so aussprechen: Für die obige Identität ist die für eine Schnittstelle von $f = 0$, $\varphi = 0$ zu erfüllende und hinreichende Bedingung die, dass die Glieder von F nur mit den Gliedern einer Entwicklung $A'f + B'\varphi$ — wo A', B' irgend welche ganze Formen von endlicher oder unbegrenzt hoher Dimension — bis zu gegebener, genügend hoher Dimension hin übereinzustimmen brauchen. Ist z. B. die Stelle für f i-fach, für φ k-fach, mit nur ik-facher Multiplicität im Schnittsystem (d. h. hat R den bezüglichen Factor nur ik-fach, der sogenannte „einfache Fall"), so genügt der Vergleich bis zur Dimension $i + k - 2$ incl. Hat insbesondere F daselbst einen $(i + k - 1)$-fachen Punkt, so sind die hier auftretenden Bedingungen auf besondere Weise, nämlich identisch, erfüllt. Von diesem letzteren Falle wird bei Brill-Noether Gebrauch gemacht.

Ueber den Sinn des Satzes ist noch eine Bemerkung zu machen. Nach dem auf homogene Formen F, f, φ, von den Dimensionen r, n, m, bezüglichen Beweise wird in der Identität

1) $$F = Af + B\varphi$$
die Form A von der Dimension $r-n$, B von der Dimension $r-m$. Geht man statt von Formen von nicht-homogenen ganzen Functionen in s, z aus, wo $s = x_1/x_3$, $z = x_2/x_3$, und macht man über etwaige im Unendlichen (auf $x_3 = 0$) gelegene Schnittpunkte von $f(s, z) = 0$, $\varphi(s, z) = 0$ keine Annahmen, so ergiebt sich bei Erfüllung der erwähnten Bedingungen in den endlichen Schnittstellen von $f = 0$, $\varphi = 0$ für $F(s, z)$ ebenfalls eine Identität:

1') $$F = A_1 f + B_1 \varphi,$$
wo aber die Grade von A_1, B_1 nun nicht bestimmt sind. Die Gleichung 1') sagt also nicht voll das aus, was 1) ausspricht, und ist in dieser Form für die geometrisch-algebraischen Schnittpunktsätze noch unbrauch-

bar. Die auf 1′) führende Frage: „Unter welchen Bedingungen für F ist F/φ mit Hülfe von $f(s, z) = 0$ in die Gestalt einer rationalen ganzen Function von s, z transformirbar?", die sich dahin erledigt, dass an jeder einzelnen endlichen Stelle von $f = 0$, wo φ verschwindet, F/φ sich wie eine rationale ganze, also nicht-adjungirte Function von s, z verhalten muss, — diese Frage, wenn sie sich auch nur teilweise mit der auf 1) führenden Frage deckt, ist functionentheoretisch deshalb berechtigt, weil ihre Beantwortung den Unterschied zwischen einer rationalen ganzen Function von s, z und einer „algebraisch-ganzen Function von z" (wenn s selbst eine solche, d. h. Wurzel einer Gleichung ist, deren Coefficienten ganze Functionen von z sind, und deren höchstes Glied den Coefficienten 1 hat) kennen lehrt — eine Unterscheidung, auf welcher die algebraische Theorie von Kronecker (s. Rf. VI, Nr. 3, 4), die frühere von Weierstrass (s. VI, Nr. 5 und VII, Nr. 4, 5), die von Dedekind-Weber und von Hensel beruhen. — Ist übrigens die auf 1′) führende Frage erledigt, so ist der Uebergang zu 1) einfach. In der That ergiebt sich aus 1′):

$$x_3^k F(x_1, x_2, x_3) = A_2(x_1, x_2, x_3) f(x_1, x_2, x_3) + B_2(x_1, x_2, x_3)\varphi(x_1, x_2, x_3).$$

In dem Falle nun, dass keine gemeinsamen Schnittpunkte für $x_3 = 0$ existiren, erkennt man, dass für $k > 0$ B_2 von der Form $B_3 x_3 + Lf$ sein muss, und hieraus, dass jene Gleichung sich auf eine solche von der Form

$$x_3^{k-1} F = A_3 f + B_3 \varphi$$

reducirt, u. s. w.

54. Wir wollen gleich hier die weitere Litteratur über den Satz besprechen. Halphen modificirt in einer Note „Sur une proposition d'Algèbre", Bull. Soc. Math. de France, Bd. V, 1877, den Beweis dadurch, dass er an Stelle der Resultante R ein System von anderen Geraden durch die Schnittpunkte von $f = 0$, $\varphi = 0$ setzt; aber ausserdem wird vorausgesetzt, dass der Beweis für einfache getrennte Schnittpunkte von $f = 0$, $\varphi = 0$ erbracht sei, und die höheren Fälle werden durch Vermittlung eines unübersichtlichen Grenzübergangs behandelt, wobei die bei einem grundlegenden Satze wünschenswerte Strenge nicht gewahrt bleibt. Voss, „Ueber einen Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Functionen", Math. Ann. 27, 1886, erledigt den oben (Nr. 53) sogenannten „einfachen Fall" dadurch, dass er in dem Product F.R, das nach der Eliminationstheorie durch Ränderung der Determinante R in die Form $Jf + K\varphi$ gebracht werden kann, bei Erfüllung der Bedingungen bis zur Dimension $i + k - 2$ hin den zu der Stelle gehörigen ik-fachen Factor von R aus J und K direct heraushebt. Das von Voss für den allge-

Weitere Litteratur über den Fundamentalsatz.

meinsten Fall angeführte Kriterium verlangt zunächst zu viele Bedingungen für F; indessen zeigt Noether in Math. Ann. 30 („Ueber den Fundamentalsatz der algebraischen Functionen", 1887), dass dieser Fall vermöge der Gleichung 3) (Nr. 53) unmittelbar auf den „einfachen" Fall zurückkommt. Bertini hat („Zum Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Functionen", Math. Ann. 34, 1889) den Ausspruch des Satzes für den allgemeinsten Fall mit Hülfe jenes Voss-Noether'schen Beweisganges dadurch wesentlich vervollständigt, dass er für die früher noch unbestimmt gelassene Dimension, bis zu welcher hin man den Vergleich der Glieder von F mit denen einer Entwicklung $A'f+B'\varphi$ vorzunehmen hat, die Zahl $\alpha'=(\alpha-ik)+(i+k-2)$ angiebt, wenn die Stelle i-fach für f, k-fach für φ ist, mit zugehörigem α-fachem Factor für R. Er weist ausserdem darauf hin, dass hierdurch der Ausspruch und Beweis des Satzes in rein algebraischer Form erscheint, und hat von diesem Gesichtspunkte aus die Theorie nochmals zusammenfassend dargestellt („Rappresentazione di una forma ternaria per combinazione lineare di due altre", Rendiconti del R. Ist. Lomb. Ser. 2, Vol. 24, 1891). Dass jene mit der Existenz einer oberen Grenze α' verbundene Eigenschaft auch aus dem Beweise von Noether in Math. Ann. Bd. 6 abgelesen werden kann, zeigt dieser in Math. Ann. 40 (1891) durch eine nochmalige, mehr geometrische Darlegung dieses Beweises. Das Festhalten an dem rein algebraischen Beweise hat insofern Bedeutung, als der Satz den rein algebraischen Theorien von Brill-Noether zur Grundlage dienen soll. Ueber diesen Zweck hinaus geht der functionentheoretische Beweis, welchen Stickelberger in den Math. Ann. 30 („Ueber einen Satz des Herrn Noether", 1887) mitteilt: Er setzt die Entwicklung von F in der Form $A''f+B''\varphi$ voraus, indem er die Ausdrücke A'', B'' als in der Umgebung der betrachteten Stelle convergente Potenzreihen der beiden Variabeln annimmt, und benutzt den Weierstrass'schen Satz über die Zerlegung, bezw. Umformung, solcher Reihen von mehreren Variabeln (Weierstrass, Abhandl. aus der Funct.theor., Seite 107 ff.; s. auch Rf. VI, Nr. 7, VII, Nr. 2). Diese Forderung geht also weiter, als die von Noether gestellte; aber in Band 39 der Math. Ann. zeigt Brill („Ueber Functionen von zwei Veränderlichen und einen Satz des Herrn Noether", 1891), ebenfalls im Anschluss an jenen Weierstrass'schen Satz, dass die Forderung, identisch genügende convergente Reihen A'', B'' zu finden, immer erfüllt werden kann, sobald Polynome der früher genannten Art A', B' existiren, welche die Gleichung nicht völlig, sondern nur bis zu einem gewissen Gliede hin befriedigen. In einem Zusatze zu dieser Note leitet

endlich Baker (Math. Ann. 42. 1893) für die daselbst nicht näher untersuchte obere Grenze hinsichtlich der Gliedervergleichung die Bertini'sche Zahl α' ab.

55. Die durch den Satz von Nr. 53 gewonnene feste Grundlage benutzen nun Brill-Noether zunächst dazu, um für eine Grundcurve f, die nur gewöhnliche vielfache Punkte (mit getrennten Elementen) hat und als irreductibel angenommen ist, die Riemann'schen Sätze mit rein algebraischen Mitteln zu erfassen und wiederzugeben. Die Form, in welcher sie jenen Satz für den Restsatz (in der ursprünglichen Note noch „Aequivalenzsatz" genannt) verwenden, ist die folgende: Sei ψ/ψ_0 eine rationale Function nullter Dimension von x_1, x_2, x_3, die in den Punkten $a_1, \ldots, a_Q$ (oder einigen dieser Punkte) von $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ zu ∞^1 wird; und sei χ_0 irgend eine zu f „adjungirte" ganze rationale Function von x_1, x_2, x_3 (d. h. $\chi_0 = 0$ habe die i-fachen Punkte von $f = 0$ zu $(i-1)$-fachen Punkten), welche weiter für die Punkte $a_1, \ldots, a_Q$ verschwinde, so kann, nach der in Nr. 53 erwähnten speciellen Art der Erfüllung des Fundamentalsatzes, $(\psi/\psi_0)\chi_0$ vermöge $f = 0$ in eine rationale ganze Form χ in x_1, x_2, x_3, vom Grade von χ_0 und zu f adjungirt, verwandelt werden; d. h. ψ/ψ_0 ist durch den Quotienten χ/χ_0 zweier adjungirten Curven von gegebener Ordnung ersetzbar. Die volle Gleichung des Restsatzes lautet dann:

Der Restsatz und die adjungirten Curven. Vollschar.

$$\chi_0\psi - \chi\psi_0 = Af,$$

oder der von den Parametern von ψ und λ abhängige Teil des Schnittes von $\psi - \lambda\psi_0 = 0$ mit $f = 0$ ist ersetzt durch den von $\chi - \lambda\chi_0 = 0$.

Zur Darstellung der Function ψ/ψ_0 in der Form χ/χ_0, d. h. zur Aufstellung der neuen Curvenschar $\chi - \lambda\chi_0 = 0$, ist also hierbei zunächst nur die eine Gruppe $(a_1, \ldots, a_Q)$ benutzt; die χ sind unter den zu f adjungirten Curven der (von einer gewissen Grenze an aufwärts) willkürlichen Ordnung s von χ_0 enthalten, welche durch den Restschnitt von χ_0 mit f gehen. Ist ψ nicht weiter specialisirt, als durch die Annahme, dass ψ/ψ_0 höchstens in $(a_1, \ldots, a_Q)$ zu ∞^1 werde, so ist hiernach der Schnitt der ψ mit f immer durch den der χ (von genügend hoher Ordnung) ersetzbar. Die letzteren hängen also ebenso wie ihr Schnitt mit f ausschliesslich von der einen Gruppe $(a_1, \ldots, a_Q)$ auf f ab: der Schnitt von $f = 0$ mit einer Schar von adjungirten Curven gleicher Ordnung bildet eine Vollschar (von Brill-Noether „ganze Schar" genannt) von Gruppen auf f, welche durch irgend eine ihrer Gruppen schon vollständig bestimmt ist.

Dies ist der Satz, welcher an die Stelle der Riemann'schen Bestimmung der **allgemeinsten** durch ihre Unendlichkeitspunkte gegebenen algebraischen Function tritt. Aber es ist damit nicht nur die Grundaufgabe der Theorie der algebraischen Functionen gelöst; es darf auch, Clebsch und Clebsch-Gordan gegenüber, als ein Fortschritt bezeichnet werden, wenn über die am Projectiven hangenden Operationen mit den Schnittcurven gegebener Ordnung hinausgegangen wird bis zu dem Begriffe der Punktgruppen von f, d. h. zu einer Geometrie von Punkten auf der Grundcurve f, deren gegenseitige Beziehungen bei ein-eindeutiger Transformation von f sich nicht mehr ändern („invariant" sind).

Rational-invariante Geometrie auf der Curve. Punktgruppenbegriff.

56. In der That erweist sich vermöge des Restsatzes zunächst die Ordnung der ψ als unwesentlich; sodann ist die das Projective charakterisirende Auszeichnung der nicht durch die Doppelpunkte von $f=0$ gehenden Curvenscharen, wie z. B. der Geraden der Ebene, überwunden. Denn der Satz ersetzt für $f=0$ eine solche nicht-adjungirte Schar ψ durch einen Teil einer linearen Schar von adjungirten Curven χ, welche eine Anzahl von festen Punkten von f gemeinsam haben, aber durch einen Teil mit noch linear eingehenden Parametern, also durch eine „lineare Teilschar" der „Vollschar" der χ. Ebenso würde sich irgend eine specielle Bedingung zwischen den Parametern der ψ auf Parameter der χ übertragen. Von der Vollschar der χ aus aber gehen alle Begriffe über auf die Vollschar der auf f von den χ ausgeschnittenen Gruppen von je Q Punkten, ausser den unwesentlichen Basispunkten, und dieser Punktgruppenbegriff wird nun auf alle seine invarianten Merkmale hin ausgebildet: Bestimmung der Vollschar durch irgend eine ihrer Gruppen (wie $a_1, \ldots, a_Q$), d. h. Corresidualität oder Aequivalenz (nach dem neueren Ausdruck) dieser Gruppen; linearer Charakter der Vollschar; Mannigfaltigkeitszahl der Schar; Anzahl der Punkte in jeder Gruppe; Grad der Willkürlichkeit in den Punkten der die Schar bestimmenden Gruppe; Parameterrelationen für Teilscharen, etc. Zwar wird bei Brill-Noether von den zur ebenen Curve $f=0$ adjungirten Curven als Durchgangspunkt Gebrauch gemacht; aber nur, um zur Wiedergabe des invarianten Begriffs der allgemeinsten zur Klasse gehörigen algebraischen Function zu gelangen, und von hier aus zu den invarianten Merkmalen der Punktgruppen, welche nun für sich den Ausgangspunkt der weiteren Festlegungen, wie Aufstellung der Zahl p, Definition der Specialgruppen etc., bilden.

Auch Riemann gegenüber lässt sich Neues in diesen Betrachtungen nachweisen. Bei Riemann findet sich im einzelnen der Begriff

der Invarianz der zu $f = 0$ gehörigen algebraischen Functionen, wenigstens was die Merkmale der Punktgruppen anbelangt, nicht durchgebildet, sicher nicht in der Weise, dass die Theorie auch für die Geometrie unmittelbar verwendbar wäre. Ferner wird bei Brill-Noether ein Begriff entwickelt, der bei Riemann explicit überhaupt nicht vorkommt, der aber für die algebraischen Beweise und Anwendungen wesentlich ist: die Einführung von festen Punkten in die Gruppenscharen. Eine Gruppe der Schar wird im allgemeinen teilweise aus beweglichen, d. h. von den Parametern der Schar abhängenden Punkten, und teilweise aus festen, d. h. in allen Gruppen der Schar vorkommenden, Punkten bestehen: und zwar kann dies letztere auch bei einer durch eine Gruppe $a_1, \ldots a_Q$ gegebenen, Vollschar eintreten. Dies entspricht dem Vorkommnis, dass die allgemeinste algebraische Function, welche höchstens in $a_1, \ldots a_Q$ zu ∞^1 werden soll, nicht notwendig in allen diesen Punkten wirklich zu ∞^1 wird, sondern möglicherweise nur in einem Teile dieser Gruppe; die übrigen Punkte bilden dann die festen Punkte der ganzen Gruppenschar und können, obwohl die Function in ihnen bestimmte Werte annimmt, zu jeder Gruppe der Schar, in welcher die Function irgend einen gegebenen Wert λ, auch $\lambda = \infty$, annehmen soll, hinzugenommen werden.

Es soll noch gesagt werden, weshalb die algebraische Theorie von Brill-Noether von der ebenen Curve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ ausgeht, welche doch die algebraischen Functionen $x_1 : x_2 : x_3$ vor den übrigen der Klasse auszeichnet. Zunächst weil sie das Homogene, den Formenbegriff, und damit zugleich den Ausschluss des unnötigen Metrischen zulässt (was übrigens auch F. Klein später durch die Ersetzung der einen complexen Variabeln z durch eine binäre erreicht); sodann weil jede Klasse auf eine Gleichung $f = 0$ führt, und umgekehrt jede solche irreductible Gleichung zur Definition einer Klasse von algebraischen Gebilden genügt. Dies letztere wäre nicht der Fall, wenn ein System von algebraischen Gleichungen zwischen mehr Variabeln zur Definition genommen werden sollte: da ja ein solches System, beliebig herausgegriffen, ein Gebilde von mehr oder weniger als einer Dimension definiren könnte. Ferner tritt bei der Gleichung $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ die Auffassung aller auftretenden Ausdrücke als Functionen einer einzigen ausgezeichneten Function der Klasse schon in den Hintergrund.*) Endlich aber — und dies ist der wichtigste Grund — beherrscht man das durch eine einzige Gleichung gegebene Gebilde mittelst des „Fundamentalsatzes".

*) Vgl. das Citat auf Kronecker, V, Nr. 8 dieses Referats.

Restsatz und Abel'sches Theorem.

57. Der Restsatz ersetzt die früher erwähnte Verwendung des Abel'schen Theorems vollständig, oder besser: er liefert diejenigen geometrisch-algebraischen Beziehungen, welche noch notwendig waren, um die Umkehrung dieses Theorems streng zu begründen; macht aber dann das Theorem selbst überflüssig, indem er die erforderlichen Schnittpunktsätze mitliefert. Man kann die Schlüsse aus dem Restsatz auch direct in die Form des Abel'schen Theorems bringen, indem man eine symbolische Addition etc. von Punktgruppen einführt (s. z. B. Clebsch-Lindemann, erster Band, p. 808): nur sind diese additiven Beziehungen nicht rational-invariant, so wenig wie der Begriff des „Restes" einer Punktgruppe. Die Idee des Restsatzes ging, wie wir beiläufig bemerken wollen, umgekehrt aus dieser symbolischen Auffassung hervor.

Auch der Ausdruck des Restsatzes liesse sich formal in eine dem Kronecker'schen Standpunkte näher kommende Fassung bringen. Man könnte, statt in $\chi_0\psi - \chi\psi_0 = Af$ die Form f gleich 0 zu setzen, also Punktgruppen auf dem Gebilde $f = 0$ zu betrachten, auch nur Congruenzen, mod. f, nehmen und würde so aus dem Bereiche des Rationalen überhaupt nicht hinausgehen. Nur wäre hiermit weder der Sinn der Theorie leichter zu fassen, noch wäre die Auffassung für die geometrischen Anwendungen passend. Gegenüber einer Bemerkung von Dedekind und Weber (Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen, J. f. M. 92, Einleitung), dass „bei den bisherigen Untersuchungen über den Gegenstand gewisse Grundsätze über die Stetigkeit und Entwickelbarkeit zugelassen würden, deren Evidenz sich auf geometrische Anschauung verschiedener Art stützt", möge hier noch darauf hingewiesen werden — was aus dem Vorstehenden sich übrigens von selbst ergiebt —, dass auch bei Brill-Noether nichts weiter als die Auflösbarkeit einer algebraischen Gleichung vorausgesetzt ist; insbesondere werden die Coefficienten der Gleichung $f = 0$ des Gebildes durchaus als festgegebene, unveränderliche Grössen angesehen, und ebenso wird von geometrischer Anschauung an keiner Stelle irgendwie Gebrauch gemacht.

Invariante Sätze. Formen und Zahlen: Specieller Rest- (Reductions-), Specialgruppen-, Riemann-Roch'scher, Reciprocitäts-Satz. Die Zahl p.

58. Wir besprechen nun den Gang, in welchem bei Brill-Noether die Merkmale der Punktgruppen erfasst und wiedergegeben werden (vgl. dazu Bertini's Arbeit, Litt. zu V, E):

Eine lineare Vollschar von Gruppen von je Q Punkten, von der Mannigfaltigkeit q wird durch $g_Q^{(q)}$, die einzelne Gruppe daraus durch $G^{(q)}$ bezeichnet.

Die verschiedenen Beweise von Brill-Noether bedienen sich alle eines Schlussgliedes, das die Unterscheidung von beweglichen und festen

Punkten einer Schar betrifft, das aber in Math. Ann. VII nicht als besonderer Satz formulirt ist. Als solcher ist es bei J. Bacharach (Ueber Schnittpunktsysteme algebraischer Curven, Erlanger Sitzungsber. 1879; Dissert. 1881 oder Math. Ann. 26) und bei Dedekind-Weber (J. f. M. 92, 1880) ausgesprochen, von Noether später (Math. Ann. 37, p. 424) „Reductionssatz für algebraische Functionen" genannt worden, aber besser als „specieller Restsatz für feste Punkte" zu bezeichnen:

„In einer, aus einer Gruppe $a_1, \ldots, a_Q$ abgeleiteten Vollschar g_Q von Gruppen von je Q Punkten ist der Punkt a_Q ein fester, wenn durch $a_1, \ldots, a_{Q-1}$ eine Curve φ (eine zu f_n adjungirte Curve $(n-3)$ter Ordnung) gelegt werden kann, welche nicht durch a_Q hindurchgeht."

Der Beweis ergiebt sich unmittelbar daraus, dass man diese φ mit einer durch a_Q gelegten Geraden verbindet und den Restsatz anwendet. — Dieser Satz allein schon würde den Invariantencharakter der φ zeigen. Eine andere Seite der Invarianz zeigt der daraus folgende „Specialgruppensatz" (nach der Bezeichnung von Noether, Raumcurven, Abh. d. Berl. Akad. 1882 oder J. f. M. 93), der in seiner ersten Hälfte so ausgesprochen werden kann:

„Gehört die Gruppe $G_Q = (a_1, \ldots, a_Q)$ zu einer Schar $g_Q^{(q)}$ von der Mannigfaltigkeit $q > 0$, und sind $a_1, \ldots, a_Q$ auf $f_n = 0$ nicht speciell gewählt, so ist diese Mannigfaltigkeit $q = Q - p$, wo p von Q unabhängig ist; d. h. aus $Q - p + 1$ linear-unabhängigen Gruppen kann man die ganze Schar homogen-linear zusammensetzen. Diese Grösse p ist also ihrer Definition nach invariant; sie wird gleich der numerisch zu bestimmenden Zahl $\frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \Sigma \frac{1}{2} i(i-1)$ und ist das Geschlecht von f_n."

Die Beziehung zu den φ zeigt wieder die zweite Hälfte des Specialgruppensatzes:

„Nur wenn die Punkte der Gruppe $a_1, \ldots, a_Q$ durch eine Curve φ verknüpft sind, d. h. nur wenn die Gruppe eine sogenannte Specialgruppe ist, wird die Mannigfaltigkeit q der Schar $g_Q^{(q)} > Q - p$; insbesondere tritt dies auch immer ein für $Q < p$."

Gehen dann durch die Gruppe $a_1, \ldots, a_Q$ noch $r + 1 = \rho$ linear-unabhängige Curven φ, so werden, wenn man ρ nicht speciell gelegene Punkte $b_1, \ldots, b_\rho$ zufügt, in der aus $a_1, \ldots, a_Q$, $b_1, \ldots, b_\rho$ zusammengesetzten Schar die Punkte $b_1, \ldots, b_\rho$ zu festen; und aus der ersten Hälfte des Specialgruppensatzes ergiebt sich nun die genaue Constantenzahl für solche „Specialscharen" im „Riemann-Roch'schen Satze":

„Gehen durch $G_Q^{(q)} = (a_1, \ldots, a_Q)$ noch $r + 1 = \rho$ linear-unabhängige Curven φ, so wird die Mannigfaltigkeit $q = (Q - p) + \rho$."

Bei Roch, J. f. M. 64, ist dieser Satz mit der Beschränkung auf Gruppen von je Q beweglichen Punkten zu verstehen. Die von Brill-Noether gegebene allgemeinere Auffassung erlaubt nun aber, eine Reciprocität zwischen je zwei Vollscharen von Specialgruppen auf dem Gebilde f zu entwickeln. Zur obigen Schar $g_Q^{(q)}$ gesellt sich nämlich, indem man die weiteren $R = 2p - 2 - Q$ Basispunkte $(a'_1, \ldots, a'_R)$ irgend einer die $g_Q^{(q)}$ ausschneidenden Schar von Curven φ ins Auge fasst, eine aus $(a'_1 \ldots, a'_R)$ hervorgehende Specialschar $g_R^{(r)}$, von der Mannigfaltigkeit $r = \rho - 1$ und der Art, dass durch jede Gruppe dieser Schar noch $q + 1$ linear-unabhängige Curven φ gehen. Es wird $Q + R = 2p - 2$, $Q - R = 2(q - r)$; also $q = r - (R - p) - 1$. Jede Specialisirung in Bezug auf die Zahl der φ, die über die früher erwähnte Annahme, dass die Scharen durch Curven φ ausschneidbar sind, hinausgeht, tritt bei beiden Scharen in gleicher Weise auf. Diese Zuordnung („Reciprocitätssatz" nach Klein), welche bei Brill-Noether in den Riemann-Roch'schen Satz einbezogen ist, tritt in dem Roch'schen Gedankengange überhaupt noch nicht auf, wohl aber hat Riemann („Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen", J. f. M. 65) zwei specielle Fälle derselben ausgesprochen (s. IV D, Nr. 22).

Auch die andere Bedeutung der Zahl p: dass es genau p linear-unabhängige Curven φ giebt (d. h. dass im Schnitt von φ mit f durch $p - 1$ nicht speciell angenommene Punkte die $p - 1$ übrigen bestimmt sind), ergiebt sich aus dem Riemann-Roch'schen Satz, oder aus den vorhergehenden Sätzen, wenn man zu den $2p - 2$ Punkten einer Schnittgruppe einen weiteren Punkt hinzunimmt; ebenso die Eigenschaft, dass die φ nicht alle die Curve f in Gruppen mit einem festen Punkte treffen. —

Es sei den Referenten gestattet, an dieser Stelle eine aufklärende Bemerkung in eigener Angelegenheit einzuschalten. Aus dem Vorstehenden geht zur Genüge hervor, dass bei Brill-Noether der Charakter der Invarianz der Curvenschar der φ, oder die absolute Invarianz der Gesamtheit der Verhältnisse der Formen φ, insofern diese bei beliebiger rational-eindeutiger Transformation des Gebildes sich nur linear unter einander vertauschen, ausdrücklich hervorgehoben wird. Aber dieser Gedanke hat sich bei Brill-Noether auch zuerst entwickelt (s. deren Arbeit SS. 285, 286), wie auch von ihnen zuerst der Schluss gezogen wird (S. 286), dass eine rational-eindeutige Transformation des Gebildes einer linearen Transformation der φ äquivalent sei. Wir müssen dies betonen gegenüber der von H. Weber, J. f. M. 88, S. 84, geäusserten Meinung, dass jene Thatsache von Brill-Noether zwar zuerst explicit ausgesprochen

sei, der Gedanke des „covarianten Charakters der φ“ ihm aber implicit schon in dem Werke von Clebsch-Gordan enthalten scheine, ziemlich deutlich z. B. in § 15 [besser wohl in der Gleichung $\varphi . D/M = \varphi'$ (vermöge $f = 0$) von § 14]. Denn weder verbanden, wie wir durch persönliche Mitteilung wissen, die Verfasser jenes Buches bei Erscheinen desselben oder später irgend einen solchen Gedanken damit; noch hatten sie Grund, wenn sich ihnen ein solcher aufgedrängt hätte, ihn zu unterdrücken. Uebrigens ist noch in Klein's Programm von 1872*), das gerade die Betrachtung der invarianten Eigenschaften bei verschiedenen Transformationsgruppen zum Gegenstande hat, nicht einmal eine Andeutung jener Eigenschaft zu finden, indem Klein bei der rationalen Gruppe als invariante Charaktere nur die Zahl p und die Moduln aufführt; ebenso wenig kommt der Gedanke vor Brill-Noether bei Noether vor, trotz dessen eingehender Beschäftigung seit 1869 gerade mit jener Gleichung (Math. Ann. 2). Es führte eben erst die ganze im Vorhergehenden geschilderte Entwicklung zu jener Auffassung hin.

Anderweitige Fassungen.

59. Die in unserer Darstellung der Brill-Noether'schen Theorie eingehaltene Ordnung der Sätze und Beweise ist diejenige der Abhandlungen von Noether über „Raumcurven“, J. f. M. Bd. 93 und Abh. der Berl. Akad. 1882, und über „rationale Operationen“, Math. Ann. 23; sie ist auch in die Darstellung von Bertini (s. Vorrede d. Ref.) übergegangen. In Clebsch-Lindemann's Geometrie, Bd. I, welche die algebraischen Untersuchungen reichhaltig wiedergiebt, findet sich diese Theorie mehr erläutert, als systematisch entwickelt (s. die citirte Recension in Schlöm. Ztsch. lit. hist. Abt. 1877). Klein's autographirte Vorlesungen über Riemann'sche Flächen und Klein-Fricke, Elliptische Modulfunctionen, Bd. I, Abschn. III, Cap. 2 (1890) gehen von der Riemann'schen Auffassung aus zu der von Brill-Noether über. Auch E. Picard (Traité d'Analyse, Cap. 14 u. 15 des Bd. II, 1893) giebt die algebraischen Sätze, stützt sich aber in seinen Beweisen wesentlich auf die Riemann'sche Theorie und das Abel'sche Theorem. Den daselbst vermissten Satz bezüglich der Transformation auf die Clebsch-Gordan'sche Normalcurve $(p+1)$ter Ordnung, dass nämlich die durch $p-3$ oder $p-2$ nicht-speciell gelegene Punkte von f gehenden Curven φ keinen weiteren festen Punkt auf f gemeinsam haben (den hyperelliptischen Fall ausgenommen), hat für eben diesen Zweck bereits Noether, Math. Ann. 17, S. 266, angegeben.

*) Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. Erlangen 1872.

E. Study hat in einer Note „Ein Reciprocitätsgesetz in der Theorie der algebraischen Functionen", Ber. der Sächs. Ges. 1890, einige Definitionen eingeführt, welche den Riemann-Roch'schen Satz den Betrachtungen über „ausgezeichnete" Gruppen (Nrn. 51, 61) unterordnen und für diese eine Erweiterung jenes Satzes besonders auszusprechen erlauben, indem er zugleich den Grenzfall, wo eine Gruppe aus 0 Punkten besteht, und die Fälle $p = 0$, 1 heranzieht. Die eingeführten Bezeichnungen sind: 1) „die Abhängigkeit einer Punktgruppe G_M (von M Punkten) in Bezug auf eine lineare Schar g_R (von Gruppen von je R Punkten)" — nämlich der Unterschied zwischen M und der Zahl der der Schar g_R durch G_M auferlegten linearen Bedingungen, wenn sie G_M enthalten soll. In dieser Bezeichnung lautet der Riemann-Roch'sche Satz: „die Beweglichkeit einer Punktgruppe (d. h. die Mannigfaltigkeit der ihr corresidualen oder äquivalenten Schnitte) ist gleich ihrer Abhängigkeit in Bezug auf die Vollschar der ∞^{p-1} Specialgruppen Γ_{2p-2} (ausgeschnitten von den φ)". 2) Ferner sei G_N eine Gruppe aus einer Schar g_N, Γ_{2p-2} eine volle Specialgruppe; dann werden zwei Gruppen G_Q und $G_{Q'}$, welche, zusammengenommen, der Gruppe $G_N + \Gamma_{2p-2}$ äquivalent sind $(Q + Q' = N + 2p - 2)$, „in Bezug auf g_N reciproke Punktgruppen" genannt, und ebenso die beiden zu G_Q, bezw. $G_{Q'}$, gehörigen Scharen g_Q, bezw. $g_{Q'}$, „in Bezug auf g_N reciproke Scharen". Der Satz, den man als Erweiterung des Riemann-Roch'schen Satzes ansehen kann, spricht sich dann in der abstracten Form aus: „Teilt man die Punktgruppe G_N irgendwie in zwei Gruppen G_A und $G_{A'}$, so ist die Anzahl der linear-unabhängigen Gruppen der Schar g_Q, in welchen G_A vorkommt, gleich der Anzahl der Punktgruppen von g_Q, in denen G_N $(= G_A + G_{A'})$ vorkommt, vermehrt um die Abhängigkeit der Restgruppe $G_{A'}$ in Bezug auf die zu g_Q reciproke Schar $g_{Q'}$."

Der ersteingeführte Begriff der „Abhängigkeit" wird auch in den Arbeiten der italienischen Geometer in demselben Sinne viel benutzt. Es ist natürlich ein Ausdruck für den Grad der Auszeichnung bei denjenigen Gruppen, welche wir „ausgezeichnete gegenüber einer Schar" (V, Nr. 51, X, Nr. 12) genannt haben.

Weitere Aufgaben.

60. Um die Ausbildung der mit der invarianten Auffassung der algebraischen Functionen verbundenen Begriffe und Aufgaben gruppirt sich nun die ganze algebraische Weiterentwicklung der Theorie. Man muss dabei unterscheiden zwischen der Benutzung invarianter Begriffe und zwischen deren Wiedergabe in algebraischer Form. Die erstere geht überall der zweiten voraus, und von dieser letzteren, insbesondere wie sie in Riemann's 1876 publi-

cirtem Vorlesungsfragmente (s. V, B) vorkommt, war zur Zeit von Brill-Noether's Abhandlung noch nichts bekannt. Indessen kommen die in den vorhergehenden Nummern besprochenen Begriffe selbst, von dem Charakter der φ abgesehen, schon bei Riemann, Abel'sche Functionen und in Weierstrass' Vorlesungen (s. Referat, VII. Abschn.) vor; ebenso, wenn auch nur in ganz speciellen Formen, die folgenden Begriffe:

a) die Definition von ausgezeichneten Functionen, bezw. Formen und Curvenscharen, welche dem zu Grunde gelegten algebraischen Gebilde angehören;

b) deren Verwertung zur eindeutigen Transformation des Gebildes in Normalcurven, in Räumen von verschiedenen Dimensionen;

c) die diesen verschiedenartigen Normalcurven entsprechenden verschiedenen Definitionen derjenigen Constanten, welche absolute Invarianten der Klasse sind — der sogenannten Moduln der Klasse.

Es handelte sich nun ferner 1) um die algebraische Erfassung und Feststellung auch dieser Begriffe; und 2) um die Darstellung des Gebildes selbst und aller zugehörigen Functionen und Formen in invarianter Gestalt. Da die letztere einer späteren Zeit und teilweise anderen Autoren angehört, so werden wir sie erst später im Zusammenhange besprechen, und wenden uns zu der ersterwähnten Aufgabe, indem wir über die im zweiten Teil von Brill-Noether enthaltenen Untersuchungen berichten, welche die aus jenen invarianten Begriffen a)—c) entspringenden algebraischen Eliminationsprobleme und Abzählungen betreffen.

Ausgezeichnete Gruppen. Aufsuchung der Specialscharen.

61. Ad 60a) lassen sich zwei Arten von Aufgaben unterscheiden: die einen beziehen sich auf die sogenannte „allgemeine" Curve vom Geschlecht p, d. h. auf eine Klasse von algebraischen Gebilden, die nicht durch specielle Beziehungen zwischen den Moduln vor den übrigen ausgezeichnet ist; andererseits kann man umgekehrt nach eben solchen Beziehungen fragen, d. h. Gebilde mit ganz besonderen Specialscharen untersuchen, ihre Möglichkeit, die Beziehungen zwischen mehreren ausgezeichneten Scharen desselben Gebildes, u. s. w. Mit einigen Aufgaben der zweiten Art hat sich erst die spätere Litteratur beschäftigt (vgl. den Aufsatz von Bertini, Litt. zu E, und besonders die in der Vorrede erwähnte Darstellung von Segre), während bei Brill-Noether in dieser Hinsicht nur die Definition der hyperelliptischen Curven — wo nämlich die Formen φ immer nur in conjugirten Punktepaaren des Gebildes verschwinden — erörtert wird. Diese Definition hat für die Theorie der algebraischen Functionen überhaupt Bedeutung. Während die Transformation irgend eines irreductiblen allgemeinen algebraischen Gebildes mit-

telst der ganzen Schar der φ (oder mittelst eines, nicht ganz speciellen Bedingungen genügenden, linearen Teils der φ-Schar) immer eindeutig umkehrbar ist, ergiebt sich in dem Falle, dass das Gebilde hyperelliptischen Charakter hat, bei der Transformation ein doppelt überdecktes Gebilde. Netto's Dissertation „De transform. aequat. $y^n = R(x)$ in aequat. $\eta^2 = R_1(\xi)$", Berlin 1870, enthält, aus der Weierstrass'schen Theorie hergeleitet, bereits das genannte einfache Kriterium für hyperelliptische Curven, benutzt aber zur Aufstellung der Function ξ nicht diese, sondern die für einige Fälle angegebene, für hyperelliptische Curven aber immer bestehende Eigenschaft, dass sich die Formen φ aus solchen p Formen additiv zusammensetzen lassen, welche sich wie die Glieder einer geometrischen Reihe zu einander verhalten.

Von den Aufgaben der ersten Art, über die wir hier berichten, behandeln Brill-Noether vor allem die oben Nr. 51 erwähnte Frage der Aufsuchung von Specialscharen. Da sich diese Aufgabe auf Curven mit nicht-speciellen Moduln bezieht, so hat die Theorie hier einen anderen Charakter, als in den vorhergehenden für alle möglichen irreductiblen Klassen gültigen Untersuchungen.

Durch den Riemann-Roch'schen Satz, oder vielmehr den Reciprocitätssatz (Nr. 58) wird das Problem der Specialscharen $g_R^{(r)}$, für $r > R - p$, darauf zurückgeführt, ausgezeichnete Gruppen G_R zu finden, durch welche noch $q + 1 = r - (R - p)$ linear unabhängige Curven φ gelegt werden können. Zunächst wird für sie die Grenze $R \geqq \frac{r(r+p+1)}{r+1}$, d. h. $(q+1)(r+1) \leqq p$, nachgewiesen. Das Problem selbst führt auf ein System von Gleichungen, wie es in Nr. 51 angegeben ist; die Theorie der Lösungen wird in dem Referat über Correspondenzen besprochen werden.

Normalcurven.

62. Ad 60b). Auf dem Gebilde f existiren ∞^τ verschiedene Scharen $g_R^{(r)}$, wo $\tau = p - (q+1)(r+1)$ ist; d. h. die Schar ist durch τ Punkte von f auf eine endliche Anzahl von Arten bestimmt, die einzelne Gruppe in ihr dann durch r weitere Punkte. Diese Scharen sind besonders wichtig in dem Falle, dass R die Minimalzahl ist, die sich mit r nach der obigen Ungleichung noch verträgt, weil man so auf möglichst ausgezeichnete algebraische Functionen der Klasse, mit möglichst wenigen Unendlichkeitspunkten für das gegebene r (immer für den Fall nicht specieller Moduln) kommt. Nimmt man nun aus den für $r = 1$ vorhandenen Minimalgruppen von $R = \frac{1}{2}p + 1$, bezw. $= \frac{1}{2}(p+3)$ Punkten zwei verschiedene Büschel heraus, so führen die beiden zugehörigen algebraischen Func-

tionen zur Riemann'schen Normalform des Gebildes. Für $r = 2$ wird eine Minimalschar $g_R^{(2)}$ durch ∞^2 Curven φ ausgeschnitten, deren Benutzung bei der Transformation auf die ebene Normalcurve niedrigster Ordnung führt; für $r = 3$ kommt man auf die niedrigste Normalraumcurve; und analog für höhere r.

Ist in einem dieser Fälle $\tau = 0$, so wird die Schar G_R auf dem algebraischen Gebilde völlig (freilich im allgemeinen irrational) ausgezeichnet, ohne dass noch ein die Scharen unterscheidender willkürlicher Parameter einginge. Die resultirende Normalgleichung, bezw. für $r > 2$ das System solcher, hat dann, von linearen Transformationen der Glieder der Schar abgesehen, keinen willkürlichen Parameter mehr: man hat in dem Gleichungssystem insoweit nur wesentliche Constanten der Klasse, als jetzt die lineare Invariantentheorie die Moduln der Klasse zu bestimmen hat.

Insbesondere wird $\tau = 0$, wenn $r = p - 1$, $R = 2p - 2$ ist, d. h. wenn man die Vollschar der φ zum Schnitt mit f bringt. Benutzt man dieselbe zur Transformation, so erhält man, sobald f nicht hyperelliptisch ist, als Normalcurve N_{2p-2} eine Curve $(2p-2)$ter Ordnung, die in einem ebenen Raume von $p-1$ Dimensionen liegt. Brill-Noether sprechen von den Normalcurven für $r = 1, 2, 3$ ff. Dass diese N_{2p-2} vor den anderen Normalcurven noch besonders ausgezeichnet ist, insofern es, von linearen Transformationen abgesehen, nur eine einzige giebt, wird nicht besonders betont; nur wird erwähnt, dass $\tau = 0$ ist, wenn p von der Form $\pi(r+1)$ ist. Die genannte Normalcurve N_{2p-2}, als deren Projectionen alle übrigen erscheinen, wird später, VIII. Abschn., besprochen werden.

63. Ad 60c). Die Modulfrage ist durch die im Vorigen bezeichnete Auffassung aus dem transcendenten Gebiete, auf dem sich die Riemann'sche Darstellung bewegt, auf das algebraische hinübergeleitet, auf das schon der Cayley'sche Versuch 1865 (s. V, 38) hingewiesen hatte. Sie hängt mit den eben genannten verschiedenen Arten von Normalcurven, niedrigster oder höherer Ordnung, eng zusammen, indem jede derselben eine Definition der Moduln erlaubt, wie sie für $\tau = 0$ bereits angegeben wurde.

Moduln.

Will man, für $\tau > 0$, eine der ad a) und b) genannten Specialscharen zur Transformation von f auf eine Normalcurve verwenden, so muss man der Schar noch τ invariante Bedingungen vorschreiben, um zu einer endlichen Zahl von Normalcurven zu gelangen, welche die Moduln liefern. Die Z Constanten einer solchen Curve, denen nicht durch lineare Transformation vorgegebene Zahlenwerte erteilt werden können, also die

Z „absoluten Invarianten der Normalcurve" (Brill-Noether, Seite 305 ff.) bilden die algebraischen Moduln der Klasse.

Ehe man die τ Bedingungen einführt, also für die zunächst τ-fach unendlich vielen Arten von Normalcurven, fragt es sich, ob es $\varkappa - \tau$ Functionen der $\varkappa$ Parameter dieser Curven ($\varkappa - \tau = Z$) giebt, welche von den τ die Schar bestimmenden Parametern unabhängig sind. Die Erledigung dieser Frage, d. h. eben die geeignete Einführung jener τ Bedingungen, findet sich bei Brill-Noether für mehrere Fälle, so für $\tau = 1, 2$. Die hier eingeführten invarianten Bedingungen sind Berührungsbedingungen für die φ, derart, dass eine ausgezeichnete Gruppe der Schar überhaupt nur eine endliche Anzahl von Malen auf f existirt; so genügt für die Minimalscharen bei $r = 1$ und ungeradem p, wo $\tau = 1$ wird, eine einzige Bedingung, etwa die, dass eine der Curven des φ-Büschels f an einer Stelle in zweiter Ordnung berührt.

Es ist zu bemerken, dass dieser Gedankengang in Bezug auf Normalgleichungen und Moduln dem von Weierstrass in seinen Vorlesungen verfolgten (s. VII. Abschn. Nr. 16) ganz analog ist: Weierstrass zeichnet zwei Functionen aus, die nur an einer ausgezeichneten, und zwar an derselben, Stelle des Gebildes in den Ordnungen m und n, die zu einander prim sind, unendlich werden; d. h. er discutirt eine Curve mit zwei Strahlbüscheln, die je in m und n Punkten treffen, und mit einer singulären Stelle, die nur einen (Puiseux'schen) Zweig besitzt und dort von den bezw. Strahlen der beiden Büschel in m, bezw. n Punkten getroffen wird.

Die Betrachtungen von Brill-Noether liefern die Bestätigung der Riemann'schen Zahl $Z = 3p - 3$ der Moduln. Indessen steht der von ihnen dem Cayley'schen nachgebildete Existenzbeweis der Curve bei gegebenen Moduln dem Riemann'schen an Schärfe nach. Die Frage nach der Abhängigkeit der Klasse von den Moduln, also die eigentliche Theorie der Moduleigenschaften der Klasse, wird von Brill-Noether noch nicht angegriffen. Auf die in ihrer Arbeit gemachten oder die daraus später abgeleiteten geometrischen Anwendungen (Constantenzahl der Raumcurven u. s. w.) werden wir nicht eingehen. Ebenso übergehen wir die Frage, in welchem Umfange die auf ein irreductibles Gebilde bezüglichen Sätze der obigen Theorie noch weiter bestehen, wenn das Gebilde zerfällt, weil diese Frage je an ein specielles Gebilde der Klasse anknüpft, und verweisen deshalb auf die Arbeit von Noether, Acta Math. VIII, 1886 (vorher Erlanger Sitzungsber. XVII, 1885).

VI. Abschnitt.

Die Theorie der singulären Punkte.

A. Cayley,
(1) On the higher singularities of plane curves. Quarterly J. of Math. t. 7, 1865 (Collected Math. Papers, V, Abh. 374).
(2) Note sur les singularités supérieures des courbes planes. J. f. M. Bd. 64, 1865.

L. Kronecker, Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln.
Vorgetr. in der Sitz. der Berl. Akad. 1862, in einer Vorlesung 1870/1, publ. J. f. M. 91 (S. 301—334), 1881 (die angekündigte „Fortsetzung" ist bisher nicht erschienen).

K. Weierstrass,
(1) Vorlesungen über Abel'sche Functionen, gehalten 1869.
(2) Vorlesungen über Abel'sche Functionen, gehalten 1873 und später (s. Litt. zum VII. Abschn.).

M. Hamburger, Ueber die Entwicklung algebraischer Functionen in Reihen. Ztschr. f. Math. u. Phys. 16 (31 S.), 1871.

L. Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. Leipzig, Teubner 1874. Teil I, 9. Vorlesung.

M. Noether,
(1) Ueber die algebraischen Functionen. Note II. Gött. Nachr. v. 7. Juni 1871, S. 267.
(2) Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde. 2. Aufsatz; §§ 1 u. 2. Math. Ann. 8, 1874 (§ 1 Clebsch's p-Beweis).
(3) Ueber die singulären Wertsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve. Math. Ann. 9 (17 S.), März 1875.
(4) Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen. Math. Ann. 23, Oct. 1883.
(5) Zum Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Functionen. Math. Ann. 34, 1889.

(6) Les combinaisons caractéristiques dans la transformation d'un point singulier. Rendic. del Circ. Mat. di Palermo, t. 4, 1890.

A. Brill und M. Noether, Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie. Math. Ann. 7, Sept. 1873 (Teil II).

O. Stolz,

(1) Ueber die singulären Punkte der algebraischen Functionen und Curven. Math. Ann. 8, Mai 1874 (29 S.).

(2) Die Multiplicität der Schnittpunkte zweier algebraischer Curven. Math. Ann. 15, 1879.

De la Gournerie,

(1) Notes sur les singularités élevées des courbes planes. J. de Math. de Liouv., Sér. 2, t. 14 u. 15.

(2) Note sur le nombre des points d'intersection que représente un point multiple commun à deux courbes planes. C. R. de l'Ac. des Sc. de Paris, t. 77, 1873.

L. Painvin,

(1) Sur l'abaissement de la classe d'une courbe produit par la présence d'un point de rebroussement. Bull. des Sc. math. et astron. t. 4, 1873.

(2) Note sur l'intersection de deux courbes. Ibid. t. 5, 1873.

G. H. Halphen,

(1) Mém. sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre. Bull. de la Soc. math. de France, t. 1, 1873 (cf. Première partie, I. „Théorèmes généraux sur les intersections des courbes planes algébr.", s. auch t. 2 p. 35).

(2) Sur les points singuliers des courbes algébriques planes. Mémoires prés. par divers savants à l'Ac. des Sc. de Paris, t. 26, 1877. Eingereicht Apr. 1874.
Vorher: C. R. Apr. 1874.

(3) Sur une série de courbes, analogues aux développées. J. de Math. de Liouv., Sér. 3, t. 2.

(4) Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane qui satisfont à une condition exprimée par une équation différ. algébr. (J. de Math., Sér. 3, t. 2.

(5) Sur une question d'élimination, ou sur l'intersection de deux courbes en un point singulier. Bull. de la Soc. math. de France, t. 3, Febr. 1875.

(6) Sur la conservation du genre des courbes algébriques dans les transformations uniformes. Ibid. t. 4, Dec. 1875.

(7) Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du troisième degré. Ibid. t. 4, Dec. 1875.

(8) Sur les correspondances entre les points de deux courbes. Ibid. t. 5, Nov. 1876.

(9) Sur le genre des courbes algébriques. C. R. de l'Assoc. franç., 4. session, Nantes, 1875.

(10) Étude sur les points singuliers. Anhang zur franz. Uebertragung von O. Chemin der Salmon'schen Higher plane curves. Paris, Gauthier-Villars 1884.

H. J. Stephen Smith, On the higher singularities of plane curves. Proceed. of the London Math. Soc., t. 6, 1876 (teilweise gelesen 1873—74).

F. Klein, Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve. Ber. der Erlanger phys.-medic. Societät. Dez. 1875, und Math. Ann. 10.

H. G. Zeuthen,
(1) Note sur les singularités des courbes planes. Math. Ann. 10. 1876.
(2) Sur un groupe de théorèmes et formules de la géométrie énumérative. Acta Mathem. t. 1, 1882.

A. Brill,
(1) Ueber Singularitäten ebener algebraischer Curven und eine neue Curvenspecies. Math. Ann. 16, 1879.
(2) Ueber die Multiplicität der Schnittpunkte von zwei ebenen Curven. Sitzungsberichte der Münchener Akad. 1888.
(3) Ueber das Verhalten einer Function von zwei Veränderlichen in der Umgebung einer Nullstelle. Sitz.-Berichte d. Münch. Akad. 1891.
(4) Ueber die Auflösung höherer Singularitäten einer algebraischen Curve in elementare. Katalog der math. Ausstell. d. deutschen Math.-Vereinigung. Sept. 1892. München.

G. B. Guccia, Sur une question concernant les points singuliers des courbes algébriques planes. C. R. t. 103, 1886.

E. Bertini,
(1) Sopra alcuni teoremi fondamentali delle curve piane algebriche. Rend. d. Ist. Lomb. 21, 1888.
(2) Sul numero dei punti di diramazione di una singolarità qualunque di una curva piana algebrica. Ibid. 23, 1890.
(3) Dimostrazione di un teorema sulla trasformazione delle curve algebriche. Rivista di Matem. 1891, Math. Ann. Bd. 44, S. 158.

Ch. A. Scott, On the higher singularities of plane curves. American J. of Math. 14, 1892.

H. F. Baker. Examples of the application of Newton's polygon to the theory of singular points of algebraic functions. Cambridge Philos. Transact. XV, 1894 (im Auszug Math. Ann. 45, S. 133).

A. Auflösung der singulären Stelle durch rationale Transformation.

1. Sowohl die algebraischen Betrachtungen bei Riemann (Abel'sche Functionen, Art. 6), als die ganze weitere Litteratur über die algebraischen Functionen bis 1871, insbesondere auch die geometrisch-algebraischen Theorien von Clebsch und Clebsch-Gordan, hatten sich für die zu Grunde gelegte Gleichung $F(s, z) = 0$, bezw. $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, die Beschränkung auferlegen müssen, dass die zugehörige Curve nur gewöhnliche, von einander getrennt liegende Doppelpunkte und höchstens

Beschränkungen der früheren Theorien.

noch ebensolche Rückkehrpunkte besitze. In Bezug auf Curven mit singulären Vorkommnissen glaubten sich diese Theorien damit begnügen zu können, sie als Grenzfälle von solchen mit gewöhnlichen Doppelpunkten zu betrachten. Aber eben für den Uebergang vom sogenannten „allgemeinen" Fall zu dem singulären fehlte der Methode die Strenge und die Einheitlichkeit. Dies bezieht sich sowohl auf die der Anschauung entlehnten Betrachtungen aus der analysis situs — Riemann'sche Flächen, Clebsch-Gordan'sche Schleifentheorie u. s. w. —, wie auf die rein algebraischen Operationen: Bedingungen für die zur singulären Curve gehörigen Functionen, ihre Aufstellung, ihre Eigenschaften, wie Zahl der Integrale erster Gattung, die Discriminantensätze etc., überhaupt auf die Eliminationssätze.

Die Puiseux'schen Entwicklungen, so sehr sie geeignet sind, die möglichen Elemente einer algebraischen Function zu definiren, konnten doch, an sich genommen, jenem Mangel nicht abhelfen. Denn weder eignen sie sich in ihrer ursprünglichen Form zu allen geometrisch-algebraischen Operationen und Abzählungen, insbesondere nicht zur Aufstellung allgemein gültiger Formeln (die hierher gehörigen, auf die Plücker'schen Formeln bezüglichen Betrachtungen werden in Nr. 16 besprochen werden), noch ist die zu ihnen führende Methode von Puiseux hierfür verwendbar. Ist diese doch überhaupt keine analytische, sondern ein von Fall zu Fall sich änderndes Versuchsverfahren, das über die Ordnungen des Unendlichkleinen Annahmen macht, die erst durch den Erfolg zu bestätigen sind (s. Hamburger's Einleitung). Hinsichtlich der rein algebraischen Theorien der algebraischen Functionen kann man sogar noch weiter gehen und eine Verwendung der analytischen Reihenentwicklungen überhaupt ablehnen, indem man verlangt, dass die Zerlegung eines singulären Punktes in Functionselemente durch rein algebraische Processe geleistet werde, die eventuell eine geometrische Interpretation zulassen.

Aufhebung der Beschränkungen mittelst eindeutiger Transformationen.

2. Kronecker hat, nach der Einleitung zu seiner (freilich erst 1881 publicirten) Discriminantenarbeit, diese Forderungen zuerst gestellt und den Weg zu ihrer Erfüllung mündlich schon 1858 an Riemann und Weierstrass, 1862 der Berliner Akademie (nicht publicirt) und seit 1870/71 in Vorlesungen mitgeteilt. Sein Verfahren besteht darin, dass er durch eine rationale Substitution, welche mit Hülfe der gegebenen Gleichung eindeutig umkehrbar ist und übrigens eine der beiden Variabeln unverändert lässt, den singulären Fall in den „regulären" transformirt. Als Vorzüge seiner Methode bezeichnet Kronecker einmal den, dass sie aus einer endlichen Zahl von Reihengliedern auf die Identität oder Verschiedenheit zweier Entwicklungen zu schliessen erlaube; sodann, dass sie eine Uebersicht

über die bei den Reihenentwicklungen für die Coordinaten vorkommenden Complicationen gestatte, indem sich diese als rationale Functionen der durch die Transformation eingeführten regulären Entwicklung ergeben.

Ein principiell hiermit identischer Weg ist, gänzlich unabhängig von Kronecker, von Noether im Juni 1871 (ausgeführt erst in (3), 1875), und ein ähnlicher kurz darauf von Hamburger angegeben worden. Es besteht nur ein formaler Unterschied dieser Methoden gegenüber der von Kronecker und zwar darin, dass an Stelle der vorher bezeichneten Transformationen solche successive quadratische treten, welche in der ganzen Ebene ohne Hülfe der gegebenen Gleichung eindeutig umkehrbar sind und nicht eine der Variabeln fest lassen. Das Hauptresultat, dass man eine Curve mit beliebigen Singularitäten rational-eindeutig (und zwar sogar durch in der ganzen Ebene eindeutige Transformationen) in eine Curve mit gewöhnlichen Singularitäten, nämlich mit nur vielfachen Punkten mit getrennten Tangenten, überführen könne, hat Noether (1) explicit ausgesprochen; der Beweis dafür, dass die Transformation nach einer endlichen Zahl von Operationen abschliessen muss, findet sich zuerst bei Hamburger veröffentlicht*). Desselben Verfahrens bedient sich Weierstrass in seinen Vorlesungen in späterer Zeit (2) (seit Anfang der siebziger Jahre). — Wir besprechen in Nr. 3—6 die verschiedenen Methoden im einzelnen.

---

*) Es möge indessen hier eine Stelle eines Briefes angeführt werden, welchen F. Klein unter dem 17. Dez. 1869 aus Berlin an den einen der Referenten (N.) gerichtet hat: eine Stelle, welche damals von diesem gänzlich unbeachtet geblieben war, und auf welche seine, wie des Schreibers Aufmerksamkeit erst jetzt wieder zufällig gelenkt wurde:

„Kronecker hat nachgewiesen, dass sich eine ebene Curve mit beliebigen Singularitäten immer auf eine solche zurückführen lässt, die einen einzigen mehrfachen Punkt besitzt, dessen Tangenten sämtlich verschieden sind; damals machte Clebsch darauf aufmerksam, dass man diesen Punkt nun sehr einfach in gewöhnliche Doppelpunkte auflösen kann, indem man die Ebene der Curve als Bild einer F_3 auffasst, wobei ein Fundamentalpunkt in den gegebenen mehrfachen Punkt rückt. — Mir scheint diese Bemerkung von Clebsch einen hohen methodischen Wert zu besitzen. Irre ich nicht, so lässt sie sich in einer solchen Art erweitern, dass man beliebige Singularitäten unmittelbar auf gewöhnliche Doppelpunkte reduciren kann."

Die Bemerkung von Clebsch bezieht sich nur auf eine specielle Form seiner allgemeinen Betrachtungen über Transformation eines h-fachen Punktes mit getrennten Tangenten in h einfache getrennte Punkte (s. unten Nr. 6 und Nr. 11); die Tragweite der Klein'schen Bemerkung aber lässt sich, wie dieselbe als blosses Aperçu ohne weitere Ausführung gegeben ist, nicht beurteilen, jedenfalls ist sie für die Auflösung der wirklich singulären Punkte

Kronecker's Resultate.

3. Bei Kronecker handelt es sich wesentlich um die directe algebraische Ausführung der von Riemann (Abel'sche Functionen Art. 6) aus den fertigen Reihen erschlossenen Zerlegung der Discriminante von $F(s, z) = 0$ oder, nach Kronecker's Ausdruck, der „Discriminante von s" (der durch Elimination von s entstehenden Resultante $Q(z)$ von $F = 0$, $\partial F/\partial s = 0$) in ihre Factoren. Gehört zu der Stelle $s = s_0$, $z = z_0$ für $s - s_0$ eine Reihe nach aufsteigenden ganzen Potenzen von $(z - z_0)^{1/\Delta}$, so ist die Ordnung des Verschwindens von $F'(s)$, wenn man mit Riemann die von $(z - z_0)^{1/\Delta}$ als erste bezeichnet, gleich derjenigen von dem betrachteten Zweig herrührenden Potenz von $z - z_0$, die in $Q(z)$ eingeht, oder auch gleich der Zahl der dort unter sich zusammenfallenden einfachen Verzweigungspunkte. Während $\Delta - 1$ die Zahl der wirklich übrig bleibenden einfachen Verzweigungen bedeutet, ist die Zahl der sich aufhebenden (Rf. IV, Nr. 14) immer eine gerade. Kronecker zeigt nun, dass seine Transformationen die Stellen z_0 und Ordnungen $\Delta - 1$ der wirklich stattfindenden Verzweigungen gänzlich intact lassen; dass sie aber gestatten, die bei $F(s, z) = 0$ sich aufhebenden Verzweigungen völlig wegzuschaffen; d. h. dass es möglich ist, $F(s, z) = 0$ vermöge einer Substitution $\sigma =$ rat. Funct. (s, z), in eine Gleichung $F_1(\sigma, z) = 0$ zu transformiren, deren Discriminante $\Theta(z)$ mit $Q(z)$ nur denjenigen Factor gemein hat, der von den wirklichen Verzweigungen von $F(s, z) = 0$ herrührt. Er nannte diesen Factor damals den „wesentlichen" Factor der Discriminante $Q(z)$, und charakterisirt ihn als den gemeinsamen Factor aller Discriminanten $\Theta(z)$, die sich auf Gleichungen der Art $F_1(\sigma, z) = 0$ beziehen*); während der weitere, immer quadratische Factor von $Q(z)$ als „ausserwesentlicher Factor" bezeichnet ist.

---

nicht verwertet worden. Einen Prioritätsanspruch könnte dieselbe also nicht begründen.

Noch weniger ist der Anspruch begründet, welchen Smith, und nach ihm Scott und Baker (s. Litteraturverzeichnis), für Cramer bezüglich der quadratischen Transformation $y = xz$ als Hülfsmittel für die Auflösung eines singulären Punktes erhoben haben. Hat man ja auch aus der speciellen quadratischen Transformation, die seit langem benutzt wird, aus der Inversion, obwohl sie Curvenzweige trennt, und obwohl sie hierzu bei gestaltlichen Untersuchungen verwendet worden ist, keine Theorie der singulären Punkte gezogen und sie auch nicht einmal als Vorläufer einer solchen ausgegeben. Ueber Cramer's Verwendung jener Transformation vgl. I. Abschn., Nr. 26 dieses Referats.

*) Dieser Factor wird in der späteren mehr arithmetischen Terminologie Kronecker's (Grundz. einer arithm. Th. der algebr. Grössen, J. f. M. 92) als „Discriminanten-Form D der Gattung" bezeichnet und als solche untersucht.

Wir können den Kronecker'schen Beweisgang nur andeuten, denn derselbe leitet die arithmetische Richtung der Theorie der algebraischen Functionen ein, die wir programmgemäss hier nicht systematisch besprechen wollen. Da er aber von Weierstrass in seinen Vorlesungen (1) über Abel'sche Functionen, 1869, im wesentlichen adoptirt worden ist, kann er nicht unerwähnt gelassen werden.

Kronecker's Beweisgang. Die ganzen algebraischen Functionen. Erste Zerlegung der Discriminante.

4. Kronecker behandelt die Theorie der ganzen algebraischen Functionen x von z, d. h. der Functionen, die einer irreductibeln Gleichung $F(x, z) = 0$ genügen, in welcher der Coefficient der höchsten Potenz von x gleich 1 ist, während die übrigen Coefficienten ganze rationale Functionen von z sind. Wir wollen hier zur Abkürzung solche rationale Functionen von x und z, die, wenn $F(x, z) = 0$ ist, ganze algebraische Functionen von z werden, mit $\mathfrak{G}(z)$ bezeichnen. Die Theorie der allgemeineren algebraischen Functionen s, welche durch eine Gleichung

$$\psi_n(z) \cdot s^n + \psi_{n-1}(z) \cdot s^{n-1} + \cdots + \psi_0(z) = 0$$

definirt sind, wird durch die Substitution $x = \psi_n(z) \cdot s$ auf jene Theorie zurückgeführt.

Die Theorie Kronecker's knüpft an die Darstellung der Functionen $\xi = \mathfrak{G}(x)$ an. Aus der für $F(x, z) = 0$ bestehenden Interpolationsformel

$$\xi = \frac{1}{F'(x, z)} \sum_{h=0}^{n-1} \frac{F(x, z)}{x - x_h} \xi_h \quad \left(\text{statt} \sum_{h=0}^{n-1} \frac{F(x, z)}{F'(x_h, z)(x - x_h)} \xi_h\right),$$

in welcher $F'(x, z) = \partial F(x, z) / \partial x$, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ vermöge $F(x, z) = 0$ die n verschiedenen Werte der Function x von z, und $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ die zugehörigen Werte von ξ bedeuten, ergiebt sich für $\xi = \mathfrak{G}(z)$ die Darstellung

$$\xi = \frac{\varphi(x, z)}{F'(x, z)}, \quad \text{wo } \varphi \text{ rational und ganz in } x, z \text{ wird;}$$

und hieraus die Darstellung

$$1) \quad \xi = A_0(z) + A_1(z)x + \cdots + A_{n-1}(z)x^{n-1}, \quad F(x, z) = 0,$$

in welcher die Coefficienten $A_0(z)$, $A_1(z)$, ... rationale Functionen von z sind, deren Nenner nur noch Teiler der Discriminante $D(z)$ von x, d. h. des Products $F'(x_0, z) \ldots F'(x_{n-1}, z)$, sein können. Hier entsteht die Aufgabe, statt der „Basis" $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ ein solches „Fundamentalsystem" von n ganzen algebraischen Functionen

$$f_0(x, z) = 1, \quad f_1(x, z), \quad \ldots, \quad f_{n-1}(x, z)$$

einzuführen, dass jede ganze algebraische Function $\xi = \mathfrak{G}(z)$, und zwar eindeutig, die Form

$$2) \quad \xi = B_0(z)f_0(x, z) + B_1(z)f_1(x, z) + \cdots + B_{n-1}(z)f_{n-1}(x, z)$$

erhält, in welcher die $B(z)$ ganze rationale Functionen von z werden.

Kronecker schreibt, um die f_m einzuführen, vor, dass man unter allen $\mathfrak{G}(z)$, welche, in der Form 1) dargestellt, in x auf den mten Grad steigen, zunächst eine solche

$$\xi_m = A_0(z) + A_1(z)x + \cdots + A_m(z)x^m$$

auswählen soll, für die der Nenner der rationalen Function $A_m(z)$ von möglichst hohem Grade ist; übrigens ohne den Weg anzugeben, wie man durch eine endliche Zahl von Operationen diese Auswahl sichern kann*). Sei $A_m = M_m/N_m$, so hat man, wegen $M.P(z) + N.Q(z) = 1$, in

$$P(z).\xi_m + Q(z).x^m \equiv f_m(x, z)$$

eine der gesuchten Functionen $f_m(x, z)$, in welcher der Coefficient von x^m gleich $1/N_m(z)$ ist, welche also statt x^m/N_m eingeführt werden kann ($m = 0, 1, \ldots, n-1$).

Die Bedeutung dieser Darstellung erhellt, wenn man die Determinante $\sqrt{\Delta(z)}$ des aus den Functionen $f_m(x_h, z)$ (für $m = 0, 1, \ldots, n-1$; $h = 0, 1, \ldots, n-1$) bestehenden Systems bildet. Man findet nämlich für jedes andere Fundamentalsystem genau dieselbe Determinante $\sqrt{\Delta(z)}$, ferner für eine Basis von n Functionen $\mathfrak{G}(z)$, die kein Fundamentalsystem bilden, eine Determinante $\sqrt{\Delta(z)}.R(z)$, wo $R(z)$ eine ganze rationale Function von z ist; also für die Discriminante $D_1(z)$ von irgend einer Function y, die eine $\mathfrak{G}(z)$ ist, also eine Beziehung

$$D_1(z) = \Delta(z).R_1^2(z),$$

wo R_1 ganz und rational in z; insbesondere aber für die Discriminante der Function x:

$$\pm D(z) = \Delta(z).[N_1(z).N_2(z)\ldots N_{n-1}(z)]^2.$$

Hieraus ergiebt sich schon, dass $\Delta(z)$ zugleich ein Teiler der Discriminanten aller Functionen $y = \mathfrak{G}(z)$ ist: der „wesentliche" Teiler. Der andere „ausserwesentliche" Teiler von x wird das Quadrat der Determinante des Substitutionensystems, vermöge dessen sich $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ durch die n Fundamentalfunctionen f_m ausdrücken; und die Bedeutung eines Factors $(z-a)^{2r}$ des ausserwesentlichen Teilers $[N_1(z)\ldots N_{n-1}(z)]^2$ ist die, dass Functionen $\xi = \mathfrak{G}(z)$ existiren, welche bei ihrer Darstellung in der Form 1) den Nenner $(z-a)^r$ erhalten müssen, der sich nicht wegheben lässt.

Eine genauere Untersuchung über die Discriminanten $D_\xi(z)$ aller Functionen

$$\xi = w_0 f_0(x, z) + w_1 f_1(x, z) + \cdots + w_{n-1} f_{n-1}(x, z)$$

*) Vgl. indessen hierzu die neuere Arbeit von F. Mertens, Ueber die Bestimmung eines Fundamentalsystems u. s. w., Sitz.-Ber. der Wiener Akad. 1893.

in Bezug auf ihre Abhängigkeit von den unbestimmten Grössen $w_0, \ldots, w_{n-1}$ ergiebt dann, dass der wesentliche Teiler $\Delta(z)$ der grösste gemeinsame Divisor der Discriminanten aller $\mathfrak{G}(z)$ ist; und ferner, dass sich jede $\mathfrak{G}(z)$ mittelst einer solchen geeignet gewählten Function ξ in der Form

$$y = C_0(z) + C_1(z)\xi + \cdots + C_{n-1}(z)\xi^{n-1}$$

darstellen lässt, deren in z rationale Coefficienten in den Nennern nur Linearfactoren enthalten, welche nicht nur von denen des wesentlichen Teilers $\Delta(z)$, sondern auch unter einander verschieden sind.

Alle diese Eigenschaften übertragen sich auch auf die nicht-ganzen algebraischen Functionen s von z, die rational in x und z sind, und die für $F(x, z) = 0$ durch $F_1(s, z) = 0$ definirt sind. Geometrisch ausgedrückt heisst dies, dass die Transformationen der Art $\zeta = \psi(s, z)$, wo ψ rational in s, z ist, die Punkte der Z-Ebene, welche Verzweigungspunkte der Function s von z sind, und die Multiplicität, mit der sie zu zählen sind, unverändert lassen („wesentlicher" Factor der Discriminante); dass sie aber erlauben, die übrigen, von den vielfachen Punkten der Curve $F_1(s, z) = 0$ herrührenden quadratischen Factoren der Discriminante (die „ausserwesentlichen" Factoren) von denen des Verzweigungsfactors und unter sich gänzlich verschieden zu machen — d. h. der transformirten Curve im Endlichen nur gewöhnliche Doppelpunkte zu geben, deren Tangenten von einander verschieden, und die nicht auf denen der Verzweigungspunkte (Berührungspunkte der Tangenten der Form $z - \alpha = 0$) gelegen sind. Nach dieser Transformation kann man dann den ausserwesentlichen Factor als festen Teil der Resultante von $f = 0$ mit allen ersten Polaren von $f = 0$ erhalten.

Zu bemerken ist, dass diese Kronecker'sche Methode, welche z unverändert lässt, im Endlichen zwar die vielfachen Punkte von den Verzweigungsstellen trennt, aber diese selbst nicht von einander scheidet, sobald zu einem und demselben $z = \alpha$ mehrere verschiedene Verzweigungsstellen $s = \beta, \beta', \ldots$ gehören. Dazu würde eine vorgängige lineare Substitution $z = z' + ls$ für z nötig sein. Ferner ist darauf hinzuweisen, dass der Kronecker'sche Schluss auf die Auflösbarkeit der Singularitäten einer Curve durch Transformation von dem am Ende von Nr. 2 erwähnten insofern abweicht, als der letztere in der transformirten Curve zwar mehr als zweifache Punkte, jedoch mit getrennten Tangenten, der erstere aber noch wirklich singuläre Punkte, nur im Unendlichen gelegen, zulässt.

5. Weierstrass ist in seiner Vorlesung (1) des Sommersemesters 1869 in einigen Punkten von dem in Nr. 4 skizzirten Gange abgewichen. Einmal darin, dass er direct an die Gleichung

Weierstrass' Modification des Kronecker'schen Ganges.

$$F_1(s, z) \equiv \psi_n(z)s^n + \psi_{n-1}(z)s^{n-1} + \cdots + \psi_0(z) = 0$$

anknüpft und statt $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ als $\mathfrak{G}(z)$ zunächst die Functionen

$$\psi_n(z),\ \psi_n s + \psi_{n-1},\ \psi_n s^2 + \psi_{n-1} s + \psi_{n-2},\ \ldots$$

einführt; sodann aber in dem wesentlicheren Punkte, dass er bei der Zerlegung der Discriminante in ihre beiden Teiler die Reihenentwicklungen der Function s an den singulären Stellen in Anspruch nimmt. Die Folge ist, dass ihm für die Zerlegung schon die Determinantenbildungen an den Darstellungsformen 1), Nr. 4, genügen, ohne dass er zu diesem Zwecke zu 2), Nr. 4, überzugehen braucht. Setzt man nämlich in 1) für x die n zu z gehörigen Werte $x_0, \ldots, x_{n-1}$, und löst die so entstehenden n in $A_0(z), \ldots, A_{n-1}(z)$ linearen Gleichungen nach diesen Grössen auf, so sieht man, dass dieselben im Nenner nicht D(z), sondern nur $\sqrt{D(z)}$ enthalten können; und dieselben Ausdrücke zeigen, dass von jeder nach gebrochenen Potenzen $(z-z_0)^{1/\lambda}$ fortgehenden Entwicklung ein Factor $(z-z_0)^{\lambda-1}$ als wesentlicher Teiler in D(z) vorkommt, und dass sich die $\sqrt{(z-z_0)^{\lambda-1}}$ wegheben müssen, so dass nur die Factoren des ausserwesentlichen, rationalen Teilers von $\sqrt{D(z)}$ in den Nennern der A(z) verbleiben können. Um zu zeigen, dass jener wesentliche Teiler der grösste gemeinsame Factor der Discriminanten aller Functionen $\sigma(s, z)$ ist, weist Weierstrass nach, dass man rationale Functionen σ bilden könne, welche in ihrer Entwicklung nach Potenzen von $(z-z_0)^{1/\lambda}$ eine irgendwie gegebene Reihe von Anfangsgliedern haben, dass aber die Discriminante einer solchen allgemein gewählten Function σ den Factor $z-z_0$, der von dieser Entwicklung herrührt, nur im Grade $\lambda-1$ besitzt.

Während die Weierstrass'schen Schlüsse, so weit sie sich auf die Discriminante beziehen, einfacher erscheinen, als die Kronecker'schen, haben die letzteren den Vorzug, die Reihenentwicklungen mit zu liefern.

Von den Kronecker'schen Functionen f_m, d. h. von der Darstellung 2) Nr. 4, machte Weierstrass Gebrauch, um die algebraischen Functionen mit gegebenen Unendlichkeitsstellen nicht nur ihrer Form, sondern auch ihrer Anzahl nach darzustellen. Davon im Abschn. VII, Nr. 4.

Dass man übrigens, statt die f_m einzuführen, zu denselben Zwecken den Fundamentalsatz (s. V, Nr. 53) verwenden könnte, darauf wurde schon oben (ibid.) hingewiesen.

Auflösung der singulären Stelle durch die Methode von Noether und von Hamburger.

6. Der Grundgedanke, nach welchem die Transformation zur Discussion der singulären Stellen herangezogen werden kann, ist von Noether in (1) ausgesprochen worden, angeregt durch die von Clebsch, Clebsch-Gordan und Brill (s. V, Nrn. 42, 49) hervorgehobene Thatsache, dass man dem h-fachen Punkte einer Curve, mit getrennten Tangenten-

richtungen, h einfache Punkte einer transformirten Curve entsprechen lassen kann. Es genügt nämlich, einen der „Fundamentalpunkte" der eindeutigen Transformation in die singuläre Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ hineinzulegen — nur so, dass keine in der Transformation ausgezeichnete Richtung mit einer der Tangentenrichtungen der Curve an dieser Stelle zusammenfällt —, um in der transformirten Curve, der Stelle $x = x_0$, $y = y_0$ entsprechend, eine oder mehrere Stellen von niedrigerer Singularität zu erhalten, als die gegebene war: und zur Auflösung in einfache Punkte genügt eine endliche Aufeinanderfolge analoger Operationen. Die Wirkung der ersten Operation lässt sich so bezeichnen: die transformirte Curve hat an den $x = x_0$, $y = y_0$ entsprechenden Stellen nur die Singularität von dy/dx (statt der von y). Hat man durch die Folge der Operationen die einzelnen Zweige der singulären Stelle völlig von einander getrennt, so kann man zur Untersuchung und Definition der singulären Stelle zwei Wege einschlagen, die beide bei Noether (1) skizzirt sind: entweder man transformirt die an den einfachen Stellen der letzterhaltenen Curve geltenden gewöhnlichen Potenzreihen rückwärts, was zu den Puiseux'schen Entwicklungen führt; oder man bestimmt schon aus der Transformationsfolge selbst, welche eben die Reihen lieferte, die Charaktere der singulären Stelle. Den ersteren Weg gehen Hamburger und Weierstrass (2), den zweiten Noether (3).

Hamburger benutzt die einfachste Transformation, welche die genannten Eigenschaften hat: er lässt, wenn $x - x_0 = 0$ von der betrachteten Tangentenrichtung der irreductibeln Curve $f(x, y) = 0$ in $x = x_0$, $y = y_0$ verschieden ist, x fest und ersetzt y durch

$$y_1 = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

Dies ist eine specielle quadratische Cremona-Transformation, von welcher ein Fundamentalpunkt in $x = x_0$, $y = y_0$, die beiden anderen aber (weil in homogener Form $x_1 : y_1 : z_1 = (x - x_0 z)^2 : (y - y_0 z)z : (x - x_0 z)z$ ist) zu einander benachbart in $z = 0$ liegen. Die Werte von y_1 stimmen mit denen von $y' = dy/dx$ in $x = x_0$, $y = y_0$ überein, und sie ergeben sich in dem Falle, dass die Stelle eine h-fache ist, durch h-malige Differentiation von $f = 0$ aus einer Endgleichung hten Grades für $(y')_0 = (y_1)_0$: und zwar entweder alle h Wurzeln endlich oder nicht, je nachdem y_0 eine h-fache oder eine höhere Wurzel von $f(x_0, y) = 0$ ist (d. h. je nachdem $x - x_0 = 0$ keine oder eine der Tangenten der Stelle von f ist). Ist nun eine der (endlichen) Wurzeln y_{10} der Endgleichung eine μ-fache ($\mu \leq h$), so wird jetzt ebenso die h_1-fache Stelle ($h_1 \leq \mu$) $x = x_0$, $y_1 = y_{10}$ von $f^1(x, y_1) = 0$

weiter behandelt, was zu einer Endgleichung in

$$(y_2)_0 = (y'_1)_0 = \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0,$$

für $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$, führt: u. s. w. Dieses Verfahren muss aber abbrechen. Denn käme man stets auf eine mehrfache endliche Wurzel, so existirten zwei oder mehr Elemente der Function y, welche, nebst ihren sämtlichen Ableitungen nach x, für $x = x_0$ übereinstimmende Werte erhielten, was — der Annahme der Irreductibilität von f entgegen — zu einem gemeinsamen Factor von f und $\partial f/\partial y$ führte. Daher muss man einmal entweder auf eine einfache endliche Wurzel einer Endgleichung oder auf eine unendliche Wurzel einer solchen stossen, in welch' letzterem Falle der Grad der Endgleichung, d. h. die Vielfachheit h_1 der bezüglichen Stelle erniedrigt ist. Man lässt dann y_1 fest und geht mit einer reciproken Substitution $x_1 = x - x_0/y_1 - y_{10}$ weiter.

Das Schema dieser Operationen ist, wenn man $l, l_1, \ldots$ Substitutionen zusammenfasst, das folgende:

$$y = y_0 + (x - x_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \cdots + \frac{(x - x_0)^{l-1}}{(l-1)!}\left(\frac{d^{l-1}y}{dx^{l-1}}\right)_0 + (x - x_0)^l x_1,$$

$$x = x_0 + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + \frac{(x_1 - x_{10})^{l_1-1}}{(l_1-1)!}\left(\frac{d^{l_1-1}x}{dx_1^{l_1-1}}\right)_0 + (x_1 - x_{10})^{l_1} x_2,$$

$$x_1 = x_{10} + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad + (x_2 - x_{20})^{l_2} x_3,$$

u. s. w. u. s. w.

Dabei werden auch die Grössen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ rationale Functionen von x, y. Die letzte Gleichung, die sich auf eine einfache Stelle $x_q = x_{q0}$, $x_{q+1} = x_{q+1,0}$ bezieht, gestattet eine Entwicklung von x_{q+1} nach aufsteigenden ganzen Potenzen von $x_q - x_{q0} = t$, und hieraus ergeben sich Entwicklungen derselben Art für $x - x_0$ und $y - y_0$:

$$x - x_0 = at^\alpha + a_1 t^{\alpha+1} + \cdots,$$
$$y - y_0 = bt^\beta + b_1 t^{\beta+1} + \cdots;$$

und daraus wieder

$$y - y_0 = A(x - x_0)^{\beta/\alpha} + A_1(x - x_0)^{(\beta+1)/\alpha} + \cdots.$$

Die letzte Reihe wird nach gebrochenen Potenzen ($\alpha > 1$) fortgehen, sobald in dem obigen Schema die erste Reihe von l Operationen nicht ausreicht. — Die Weierstrass'sche Analyse (2) unterscheidet sich von der vorstehenden nur durch öftere Benutzung von linearen Transformationen. Das Stolz'sche Verfahren (1), Math. Ann. 8, ist von dem hier besprochenen ebenfalls nicht wesentlich verschieden; nur dass Stolz, auf Plücker's Theorie der algebraischen Curven zurückgreifend, direct die successiv einzuführenden Differentialbeziehungen für f in der singu-

lären Stelle, insbesondere die Gleichungen, welche den h-punktigen Schnitt mit einer Geraden aussagen (den Anfangsgliedern der transformirten Gleichungen entsprechend), untersucht und zu diesem Zweck die Transformationsreihe einführt. Der Grundgedanke des Verfahrens tritt hierdurch mehr in den Hintergrund.

Element oder Zweig des Gebildes. Auflösung nach Brill.

7. Der hier eingeführte Parameter t hat die Eigenschaft, dass er eine rationale Function von x, y ist, deren Werte eindeutig auf die Gesamtheit derjenigen Wertsysteme x, y bezogen sind, welche durch den Cyklus von α Reihen $y - y_0 = A(x - x_0)^{\beta/\alpha} + \cdots$, in einer endlichen Umgebung von x_0, y_0, ausgedrückt sind. Das Letztere leistet schon jeder Parameter τ, welcher mit t durch eine Beziehung $\tau = t[t]$, wo $[t]$ eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von t mit nicht verschwindendem constantem Gliede ist, verbunden ist; z. B. $\tau = (x - x_0)^{1/\alpha}$; nur dass ein solches τ im allgemeinen keine rationale Function von x, y ist. Die Verwendung des nur auf dem (cyklischen) Zweig, nicht auf der ganzen Curve, eindeutigen Parameters $\tau = (x - x_0)^{1/\alpha}$ kommt schon bei Puiseux vor; aber erst Riemann betrachtet diesen Ausdruck als das Unendlichkleine erster Ordnung für den Zweig. Systematisch ist τ, und in den späteren Vorlesungen die obige Function t, erst von Weierstrass verwendet worden.

Während nämlich die Reihe für y nach gebrochenen Potenzen von $x - x_0$ zunächst nur ein „Functionselement von y" wiedergiebt, definiren bei Weierstrass die Ausdrücke von $x - x_0$ und $y - y_0$ durch t oder τ für genügend kleine t zugleich die ganze Umgebung der Stelle x_0, y_0 des algebraischen Gebildes im einzelnen Zweige, ohne Auszeichnung einer der Variabeln, sogar bei rationaler 1-1-deutiger Transformation der Variabeln x, y. Er definirt so ein „Element des algebraischen Gebildes", das durch 1-1-deutige Transformation immer wieder in ein einziges „Element" übergeht, mit der Eigenschaft der Continuität.

Denn zunächst lässt sich für einen einfachen Punkt nach Cauchy die Entwickelbarkeit der Coordinaten nach t, und damit die Continuität, erweisen. — Weierstrass benutzt übrigens zu diesem Zweck seinen „Vorbereitungssatz" (s. Abh. aus der Functionenlehre, S. 113), wonach eine Potenzreihe von $x, x_1, \ldots, x_n$, die für $x = x_1 = \cdots = x_n = 0$ verschwindet, aber für $x_1 = \cdots = x_n = 0$ und beliebige x nicht verschwindet, sich in zwei Factoren

$$[x^\mu + x^{\mu-1}\mathfrak{G}_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + \mathfrak{G}_\mu(x_1, \ldots, x_n)] . \overline{\mathfrak{G}}(x, x_1, \ldots, x_n)$$

spalten lässt, wo $\overline{\mathfrak{G}}$ eine Potenzreihe mit nicht verschwindendem, $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_\mu$ solche mit verschwindenden constanten Gliedern sind. — Für ein durch

rationale Transformation entsprechendes Element gilt dasselbe. Für eine mehrfache Stelle aber zeigen die quadratischen Substitutionen, indem sie die ganze Umgebung der Stelle wiedergeben, dass sich diese Umgebung in jene Elemente zerlegen lässt.

Gestützt auf denselben „Vorbereitungssatz" von Weierstrass schlägt Brill (3), um zu den Entwicklungen an einer singulären Stelle zu gelangen, einen Weg ein, der die Existenz einer Entwicklung an einer einfachen Stelle nicht voraussetzt. Vermöge jenes Satzes lässt sich nämlich die Form $f(x, y)$ durch Multiplication mit einer Potenzreihe $\alpha(x, y)$ mit nicht verschwindendem constantem Glied (nötigenfalls nach einer linearen Transformation) in die Gestalt bringen

$$\alpha f = f' = y^h + y^{h-1} x \mathfrak{P}_1(x) + y^{h-2} x^2 \mathfrak{P}_2(x) + \cdots + x^h \mathfrak{P}_h(x),$$

wo die $\mathfrak{P}_i(x)$ Potenzreihen in x sind. Diesen Ausdruck zerfällt Brill in das Product von h Linearfactoren in y, indem er diese Operation durch Bestimmung ihres Gültigkeitsbereiches in der Umgebung der Stelle $x = 0$ rechtfertigt. Hat das Glied niedrigster ($h$ter) Dimension (in x, y zusammen) von f' nur ungleiche Linearfactoren, so ergiebt eine (successive) Spaltung von f' in seine h Linearfactoren direct die h Entwicklungen. Tritt aber die Potenz eines linearen Ausdrucks auf, so lässt sich ein Algorithmus angeben, der die Anwendung des Newton'schen Parallelogramms ersetzt, und vermöge dessen man zu einer Transformation von der Form $x = x'^p$, $y = y' x'^q$ gelangt, nach deren Anwendung die weitere Spaltung wieder erfolgen kann. Bei Wiederholung des Verfahrens gelangt man immer zu einem Abschluss, der die gewünschte Zerlegung von f in h Linearfactoren, und damit die h Entwicklungen in allen Fällen liefert.

Der Unterschied dieses Beweisverfahrens von den anderen besteht also darin, dass Brill alle Operationen, die auf die Entwicklungen führen, nicht an der Gleichung, sondern an einer ganzen Function von zwei Variabeln vornimmt.

In Bezug auf das Gebilde $f = 0$ repräsentirt das Weierstrass'sche „Element des Gebildes" das, was Cayley einen „superlinearen Zweig" der Curve $f = 0$ genannt hat, Noether kurzweg einen „Zweig" der Curve, Halphen „cyklische Gruppe" oder „cyklischen Zweig". Die „partiellen Zweige" Cayley's, die den α einzelnen Gliedern des Cykels $y - y_0 = \mathfrak{P}(x^{1/\alpha})$ entsprechen, kommen bei Weierstrass nicht vor, wohl aber bei Halphen (1), der dieselben nach Puiseux in Gruppen und Untergruppen ordnet, was mehr der analysis situs der Riemann'schen Flächen, als den projectiven Zielen entspricht.

B. Anwendung auf Multiplicität. Verwendung des ausserwesentlichen Factors der Discriminante in der Theorie der algebraischen Functionen.

8. Die wichtigste Anwendung der besprochenen Entwicklungen bezieht sich auf die Bestimmung der Multiplicität, mit welcher eine singuläre Stelle in die Anzahl der Schnittpunkte zweier Curven $f = 0$, $\varphi = 0$ eingeht. Geht man mit Cayley, Smith etc. von der Definition der Resultante durch das Product der Differenzen der Wurzeln y_h, η_i von $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, \eta) = 0$ aus, d. h. (bis auf einen unwesentlichen Factor) vom Product der Werte $\varphi(x, y_h)$, so ergiebt der α-fache superlineare Zweig von $f = 0$ das Product $\varphi(x, y_1) \dots \varphi(x, y_\alpha)$, wo $y_1, \dots, y_\alpha$ die α Werte von y aus

Multiplicität des Schnittes bei Cayley und Weierstrass.

$$y - y_0 = A(x - x_0)^{\beta/\alpha} + \cdots$$

sind, und, indem jeder der α Factoren dieses Products auf die gleiche Potenz $(x - x_0)^{\varkappa/\alpha}$ erhoben vorkommt, die Potenz $(x - x_0)^\varkappa$ in der Resultante. $\varkappa$ ist dann die gesuchte Multiplicität; eine Bemerkung, die Stolz (2), Math. Ann. XV, unter Einführung der Nr. 13 zu besprechenden „kritischen“ Exponenten noch genauer nachzuweisen für nötig hält. Cayley führt formal auch gebrochene Multiplicitäten ein, die sich auf seine partiellen Zweige, einzeln genommen, beziehen. Führt man wieder die unabhängige Variable t (s. Nr. 7) ein, so steigt jeder der obigen α Factoren schon auf die $\varkappa$te Potenz in t; man wird daher zweckmässig mit Weierstrass (2) die Multiplicität als die Potenz von t im ersten Gliede desjenigen Ausdrucks definiren, der aus $\varphi(x, y)$ durch Einsetzen der Potenzentwicklungen von x und y nach t entsteht. Dies ist indess die Weierstrass'sche Definition nur in einem speciellen Fall; der allgemeinere bezieht sich auf eine rationale Function $s = \varphi(x, y)/\psi(x, y)$, für diese ist die „Ordnungszahl“ $\varkappa$ des Elementes von $f = 0$ gleich der Differenz der Multiplicitäten in Bezug auf $\varphi = 0$ und auf $\psi = 0$. Für die Function s, der man in dem betrachteten Element $\varkappa$ einfache Nullstellen zuschreibt, erhält man dann einen bestimmten „Grad“ K, der die Anzahl derjenigen Stellen angiebt, wo s überhaupt in dem algebraischen Gebilde irgend einen gegebenen Wert in erster Ordnung annimmt. Zum Beweise der Unabhängigkeit jener Zahl K von dem Werte von s bedient sich Weierstrass der Resultante $G^r(s, x)$ von f und $\varphi - s\psi$, mit einem Grenzübergang aus der Umgebung der singulären Stelle x_0, y_0 in diese selbst; nur für den Satz, dass, wenn $\psi = 1$ und f und φ von den Ordnungen n, n_1 ohne gemeinsame Schnittpunkte im Unendlichen sind, dieser Grad gleich nn_1 ist, wird auch die Wirkung der auflösenden quadratischen Substitutionen auf die Resultante benutzt. Der „Grad“ ist übrigens, geometrisch

zu reden, nichts anderes, als die Anzahl der beweglichen (von s abhängigen) Schnittpunkte von $f = 0$ mit einer Curve des Büschels $\varphi - s\psi = 0$.

Multiplicität bei Halphen.

9. Für diese Eliminationssätze bei singulären Curven finden sich in allen bezüglichen Theorien die Aequivalente. Halphen spricht den Satz für den Grad einer rationalen Function s in der Form aus ((7) und (10), Part. II), dass die Summe der Ordnungszahlen aller Zweige der Curve für die Function s, die negativen Zahlen für $s = \infty$ mitgerechnet, zu 0 wird, und beweist dies, indem er die Resultante aus f und φ doppelt auswertet, einmal durch die an den endlichen Stellen x_0 gültigen Reihen, sodann durch die Entwicklung nach absteigenden Potenzen von x nach Liouville (J. de Math. VI) und Minding (J. f. M. 22) (s. Ref. III, 21). Halphen verwendet in allen seinen citirten Arbeiten die Cayley'sche algebraische Definition der Multiplicität aus dem Product der Wurzeldifferenzen; sie ist, in geometrischer Ausdrucksweise, gleich „der Summe der Ordnungen der unendlich kleinen Segmente, welche von den beiden Curven auf einer Secante ausgeschnitten werden, deren Distanz von der singulären Stelle ein Unendlichkleines erster Ordnung ist". Als unmittelbare Folgerung ergiebt sich ((1)—(6)), „dass, wenn die Stelle h-fach für f, i-fach für φ ist, die Multiplicität gleich $hi + M'$ wird, wo M' als die Summe der Ordnungen der Berührungen aller partiellen Zweige von f mit allen solchen von φ bezeichnet werden kann". Halphen sucht (5) diesen Satz auch zur Erlangung allgemeiner Formeln zu verwenden, indem er die Painvin'sche Fragestellung aufgreift: wenn man die in den Gliedern hter, (h+1)ter, ..., iter, (i+1)ter, ... Dimension in $x - x_0$, $y - y_0$ von f und φ als Factoren etwa enthaltenen Potenzen von $x - x_0$ kennt, aus deren Exponenten die Multiplicität zusammenzusetzen. Die Frage selbst setzt schon voraus, dass nicht noch weitere Specialisirungen von f und φ vorhanden sind; und auch dann wird nur erst ein Unterfall erledigt. Halphen transformirt — wie de la Gournerie, der auf diesem Wege in einer Reihe von Fällen vorangegangen ist — die Curven f und φ, wenn etwa die Zweige beider bei $x = 0$, $y = 0$ im ersten Gliede der Entwicklung:

$$y = Ax^{\beta/\alpha} + \cdots, \quad \beta > \alpha$$

übereinstimmen, in zwei neue Curven mittelst der irrationalen Substitution

$$\xi = x^{\beta/\alpha}, \quad \eta = y - A\xi,$$

und setzt die Multiplicität des Schnittes aus einer von α abhängigen Zahl, aus einem weiteren, complicirteren („premier surcroît" genannten), von β abhängigen Teil, und aus der Multiplicität, die sich entsprechend auf die transformirten Curven bezieht, zusammen. Das Mittel selbst ist nicht

wesentlich von der Verwendung des Newton'schen Parallelogramms oder von der Minding'schen Methode für einen unendlich-fernen singulären Punkt (J. f. M. 22. s. Ref. III. Nr. 21) verschieden, indem Halphen immer auf die Vergleichung der Ordnungen des Unendlichkleinen sich stützt.

10. Die Noether'sche Methode (3) giebt ebenfalls eine Zusammensetzung der Multiplicität aus Teilen, nur aus elementareren, und ohne Benutzung der Ordnungen des Unendlichkleinen. Mit Rücksicht auf die geometrische Interpretation und unter Zusammenfassung der Resultate, die aus der in Nr. 6 besprochenen Methode folgen, wird zunächst der Punkt $x = y = 0$ von f, wo die Entwicklung von f nach aufsteigenden Dimensionen $f \equiv f_h(x, y) + f_{h+1} + \cdots$ mit einem Gliede f_h beginnt, dessen h lineare Factoren alle von einander verschieden sind, kurzweg als h-facher (statt „gewöhnlicher" h-facher) Punkt bezeichnet, bei anderem Verhalten des niedrigsten Gliedes f_h aber als h-elementiger Punkt von f. Die einzelnen „Elemente des Punktes" sind den h Factoren von f_h zugeordnet. Ist $f_h \equiv (y - a_1 x)^{\mu_1} \ldots (y - a_r x)^{\mu_r}$, $a_1, \ldots, a_r$ endlich, so wird die durch $y_1 = y/x$ transformirte Curve $f^{(1)}(x, y_1) = 0$ auf $x = 0$ r verschiedene Stellen $y_1 = a_1, \ldots, y_1 = a_r$ enthalten und von $x = 0$ daselbst bezw. μ_1-, ..., μ_r-punktig getroffen werden; und diese Stellen werden bezw. h_1-, ... h_r-elementig sein, wo $h_j \leqq \mu_j$.

Multiplicität bei Noether.

Für die Resultante zweier Curven f, φ von den Ordnungen n und n_1, von denen φ die Stelle $x = y = 0$ zur i-elementigen hat, beweist man nun, dass der auf diese Stelle bezügliche Factor die Potenz $hi + M'$ hat, wo M' die Summe der Multiplicitäten für die transformirten Curven $f^{(1)}$, $\varphi^{(1)}$ an den Stellen $x = 0$, $y_1 = a_1, \ldots, a_r$ ist, welche für $\varphi^{(1)}$ bezw. i_1-, ..., i_r-elementig seien ($i_j \geqq 0$). Nach dem einfachen Beweise von (3), weiter ausgeführt in (4), ist die durch Elimination der homogen machenden Variabeln aus f und φ entstehende Resultante in y/x vom Grade $nn_1 - hi$ und identisch mit der durch Elimination von x aus $f^{(1)}$, $\varphi^{(1)}$ entstehenden Resultante in y_1. Nach demselben Schlusse wird $M' = \Sigma h_j i_j + M''$, wo sich M'' auf die Multiplicitäten der Transformirten von $f^{(1)}$, $\varphi^{(1)}$ an den entsprechenden Stellen bezieht, u. s. w. Somit ergiebt sich für die Gesamtmultiplicität des Schnittes von f und φ an der Stelle $x = y = 0$ eine Formel Σhi; d. h. dieselbe ist gleich der Summe der Vielfachheiten von f, φ in $x = y = 0$ und aller successiv durch die Transformation abgeleiteten Curvenpaare an den entsprechenden Stellen, wenn man diese Stellen alle nur als vielfache ohne paarweise gemeinsame Tangentenrichtungen zählt.

Noether hat für diesen Sachverhalt noch folgende Ausdrucksweise. Von f wird gesagt, dass diese Curve in $x = y = 0$ einen

h-fachen Punkt und, diesem Punkt in der Richtung $y - a_j x = 0$ benachbart, einen h_j-elementigen Punkt (von der Singularität wie für $f^{(1)}$) besitze. Indem man annimmt, dass auch dieser Punkt sich wieder weiter zerlegt u. s. w., lautet der obige Satz: Zu einer Reihe wie für gemeinsamen h-, h_1, ... „fachen", bezw. i-, i_1-, ... „fachen" Stellen von f und φ gehört die Multiplicität Σhi, gleichviel ob diese Stellen getrennt oder teilweise oder alle benachbart (zusammengerückt) liegen.

Anwendung auf die Theorie der algebraischen Functionen.

11. Der Vorteil dieser geometrischen Ausdrucksweise besteht einmal darin, dass dieselbe unabhängig ist von den Specialisirungen, welchen man die die Singularität auflösende Substitutionenreihe in Nr. 6 unterworfen hat; zweitens, was wichtiger ist, darin, dass es möglich wird, alle Sätze der Theorie der algebraischen Functionen auch für beliebig singuläre ebene Curven in derselben Form auszusprechen, wie für die nicht-singulären Curven, und zwar derart, dass die Ausdrucksweise auch den einfachen Weg zur Ausführung der zugehörigen Operationen unmittelbar vorzeichnet. Was das erstere betrifft, so sind, wie in Nr. 6 gesagt, z. B. statt der speciellen auch die allgemeinen quadratischen Cremona-Substitutionen sogleich verwendbar und führen zu genau derselben Zusammensetzung der Multiplicität; in dieser Weise ist das Verfahren besonders für die Behandlung der Singularitäten in der reinen Geometrie und für Fragen, welche sich nicht nur auf den einzelnen Zweig, sondern auf die ganze Curve beziehen, verwendbar. Die geometrische Auffassung hat sich ferner in der Zurückführung auch der singulären Cremona-Transformationen auf eine Reihenfolge von quadratischen (Noether, Math. Ann. V) bewährt, sodann in der Ausdehnung der Brill-Noether'schen Theorie der algebraischen Functionen auf singuläre ebene Grundcurven (Math. Ann. VII). Hier werden allgemeingültig die „zur Grundcurve f_n adjungirten" Curven mter Ordnung ψ, insbesondere die φ (für $m = n - 3$) als diejenigen Curven definirt, welche jeden h-fachen Punkt von f zum (h—1)-fachen Punkt haben, wiederum ohne Rücksicht auf die Lage dieser Punkte. Ist also die Stelle singulär für f und h-elementig, so wird man den Curven m ter Ordnung zunächst daselbst einen (h—1)-fachen Punkt geben, dann der Transformirten $\psi^{(1)}$ von ψ in jeder entsprechenden h_j-elementigen Stelle von $f^{(1)}$ einen $(h_j - 1)$-fachen Punkt u. s. w. Für den Schnitt mit den Curven φ erhält man so die Zahl

$$2p - 2 = n(n-3) - \Sigma h(h-1).$$

Man beweist dann (Brill-Noether, oder Noether (4)), dass diese adjungirten Curven auf f Vollscharen ausschneiden, d. h. den „Restsatz", und hat damit die Ausdehnung aller Sätze und Formeln auf die singu-

lären Fälle. — Bei Letzterem (5) ist diese Ausdehnung auch dadurch begründet, dass der specielle Fall des „Fundamentalsatzes", der zum Restsatz führt, für singuläre Curven bewiesen wird.

Die eben angeführte Formel für p kommt, mit Hülfe derselben Substitutionenreihe, aber aus einer anderen Formel für p (s. Nr. 17) hergeleitet, gerade so bei Weierstrass vor, der jedoch nur die Sonderung und Darstellung je eines Zweiges beabsichtigt, während Noether die Transformation des ganzen algebraischen Gebildes auf eine nicht-singuläre ebene Grundcurve — und in Folge dessen u. A. auch auf die Normalcurve der φ — im Auge hat. Würden statt der hierbei benutzten quadratischen Substitutionen noch allgemeinere, nur mit Hülfe der Gleichung der Curve $f=0$ eindeutig umkehrbare Substitutionen verwendet, deren Basiscurven zugleich keine andere specielle Lage gegen $f=0$ haben, als dass ihr Fundamentalpunkt an der singulären Stelle von $f=0$ liegt, so könnte man durch Wiederholung der Transformation sogar auf eine Curve kommen, welche nur noch gewöhnliche Doppelpunkte enthält. Dies zeigen noch explicit Bertini (3), und neuerdings Simart (C. R. Mai 1893) und Poincaré (C. R. Juli 1893) (s. auch Anm. zu Nr. 2). Halphen leitet übrigens (10) diesen Satz aus den Reihenentwicklungen her, indem er, wie Weierstrass, eine rationale Function u von x, y bestimmt, welche in jedem Cyklus eines singulären Punktes irgend eine vorgegebene Entwicklung hat, und spricht denselben, unter Einführung von x, y, u als Coordinaten im Raume, in der Form aus, dass die singuläre ebene Curve als Perspective einer Raumcurve erhalten werden kann, die keine vielfachen Punkte hat (oder auch einer solchen, die an einer Stelle einen vielfachen Punkt mit nur einfachen Zweigen hat, u. s. w.). — Dass die erwähnten Anwendungen sich ausschliesslich auf den ausserwesentlichen Factor der Discriminante beziehen, wird in Nr. 14—17 besprochen werden. — Aus der obigen Formel für p folgt auch die Guccia'sche Formel für die durch eine Singularität im allgemeinen absorbirte Anzahl C der Constanten in der Gleichung einer Curve: $C=M-P$, wo M die Multiplicität des Schnittes zweier Curven mit der gegebenen Singularität an der betreffenden Stelle ist, P die Reduction in p. Zum Beweise genügt die Formel

$$\tfrac{1}{2}h(h+1)=h^2-\tfrac{1}{2}h(h-1).$$

12. Zu den Multiplicitätsuntersuchungen ist noch ein anderes Problem hinzugekommen, nämlich das: jene Zahlen auf rationalem Wege zu bestimmen, ohne vorher die Zweige der singulären Stelle von einander zu trennen, ja ohne diese Stellen selbst zu isoliren. Für die Transformationsmethode hat diese Absicht Noether (4) erreicht, nachdem Raffy

Rationale Processe.

(Ann. de l'Éc. Norm., 1883, und Math. Ann. 23) aus den Reihen den Weg zu einer rationalen Herstellung der Zahl p, freilich vermöge ihrer Definition aus den Verzweigungspunkten, gezeigt hatte (neuerdings, Bull. Darboux 1893, für p und die adjungirten Curven analog von Tikhomandritzky). Direct wird die Aufgabe in den oben erwähnten Painvin'schen Noten und in ähnlicher Weise von Brill (2) angegriffen. Statt der Resultante von f, φ werden Formen Φ gesucht, für welche $\Phi = \lambda f + \mu\varphi$ ist, und $\Phi = 0$ mit $f = 0$ an der singulären Stelle keine Tangentenrichtung gemein hat. Im Fall eines einfachen Punktes von f und φ erhält so Brill die Bedingungen für eine höhere Osculation von f mit φ; im allgemeinen Fall besteht dessen systematisches Verfahren darin, φ durch $\psi = f'\varphi - \varphi' f$ zu ersetzen (wobei f'/φ' das reducirte Verhältnis f_h/φ_i der Glieder niedrigster Dimension von f, φ ist) und diesen Process analog fortzusetzen.

C. Charakteristische Zahlen eines Zweiges.

Charakteristische Zahlen.

13. Denkt man sich die in Nr. 6 beschriebene Reihenfolge von Operationen an f zugleich an der resultirenden Entwicklung von $y - y_0$ nach aufsteigenden Potenzen von $(x - x_0)^{1/\alpha}$ ausgeführt, so erhält man, wie Königsberger l. c. zeigt, einen genaueren Einblick in die Structur der dort erwähnten Transformationen und in den Zusammenhang der Zahlen $l, l_1, l_2, \ldots$ mit einzelnen ausgezeichneten Gliedern der Entwicklung. Die Darlegung dieses Zusammenhangs führt von selbst (s. Noether (6)) zu einem wichtigen Fortschritt in den auf die Reihenentwicklungen zu gründenden Formeln, welchen Halphen und Smith gemacht haben.

Die Entwicklung eines Zweiges Z von $f = 0$, zur Stelle $x = y = 0$ gehörig, steige nach ganzen Potenzen von x^{1/λ_1} und beginne mit dem Glied $y = x^{\lambda/\lambda_1} + \cdots$, d. h. der Zweig von f werde von $x = 0$ in λ_1, von $y = 0$ in λ Punkten getroffen; für $\lambda > \lambda_1$ ist λ_1 die Vielfachheit des Zweigs, $y = 0$ die Tangente. Sei nun

$$\lambda = l\lambda_1 + \lambda_2,\ \lambda_1 = l_1\lambda_2 + \lambda_3,\ \ldots,\ \lambda_{q-2} = l_{q-2}\lambda_{q-1} + \lambda_q,\ \lambda_{q-1} = l_{q-1}\lambda_q$$
$$(\lambda_{q+1} = 0,\ \lambda_{i+1} < \lambda_i,\quad l_i,\ \lambda_i \text{ ganze Zahlen}),$$

so werden die in Nr. 6 angeführten zusammengesetzten Substitutionen:

$$y = x^l x_1,\quad x = x_1^{l_1} x_2,\quad \ldots,\quad x_{q-2} = x_{q-1}^{l_{q-1}} x_q,$$

wobei $q - 1$ der q so transformirten Curven λ_2-, λ_3-, …, λ_q-fache Zweige bezw. in $x = x_1 = 0$, $x_1 = x_2 = 0$, …, $x_{q-2} = x_{q-1} = 0$ erhalten; die qte Curve F aber besitzt, wegen $\lambda_{q+1} = 0$, einen entsprechenden Zweig in $x_{q-1} = 0$, $x_q = c$ (c verschieden von 0 und ∞). Diese ganze Reihen-

folge von $l + l_1 + \cdots + l_{q-1}$ quadratischen Substitutionen wird somit durch nur zwei Zahlen, λ und λ_1, charakterisirt. — Während dann für $\lambda_q = 1$ ein einfacher Punkt von F, also ein Abschluss erlangt ist, erhält man für $\lambda_q > 1$ einen Zweig Z' von F, zu dem wieder zwei Zahlen μ und μ_1 $(\mu \gtrless \mu_1)$ gehören, von denen die kleinere die Vielfachheit des Zweiges, die andere die Zahl der Schnittpunkte mit der Tangente bedeutet, und wo $\mu_1 = \lambda_1$ ist. Aus diesen beiden Zahlen μ, μ_1 erhält man wieder eine Reihenfolge von Transformationen und gelangt zu zwei neuen Zahlen ν, ν_1, von denen eine, ν_1, der grösste gemeinsame Factor von μ, μ_1 ist; u. s. w.

Bildet man die Formel für das Geschlecht p nach der in Nr. 11 besprochenen Methode, so wird sich die Summe rechts in eine solche zusammenziehen, die nur von den Zahlenpaaren λ, λ_1; μ, μ_1; ... abhängt (Noether (6)); und zwar wird die vom Zweige Z an der Zahl p bewirkte Reduction

$$\Pi = -\tfrac{1}{2}(\lambda_1 - 1) + \tfrac{1}{2}\lambda(\lambda_1 - 1) + \tfrac{1}{2}\mu(\mu_1 - 1) + \tfrac{1}{2}\nu(\nu_1 - 1) + \cdots.$$

Da aber in diesem Ausdruck, sobald einige successive unter den Divisoren λ_1, μ_1, ν_1, ... einander gleich werden, nur die Summe der mit denselben bezw. gepaarten Zahlen $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ auftritt, so genügt es, die folgenden Combinationen jener Zahlen als charakteristische Zahlen des Zweigs einzuführen:

$$\Delta, \alpha;\ \Delta_1, \alpha_1;\ \ldots;\ \Delta_h, \alpha_h,$$

wobei $\lambda_1 = \Delta$, $\lambda = \alpha$ gesetzt ist, und $\Delta_1 = \mu_1$ der grösste gemeinsame Teiler von Δ, α ist;

Δ_2 der erste der Divisoren ν_1, ρ_1, ..., der verschieden ist von Δ_1;

Δ_3 der erste weitere der Divisoren, verschieden von Δ_2; etc.

$$\Delta \geqq \Delta_1 > \Delta_2 > \cdots > \Delta_h > \Delta_{h+1} = 1;$$

$\alpha_1 =$ der Summe der Zahlen $\mu, \nu, \rho, \ldots$, welche mit Δ_1 gepaart sind;
$\alpha_2 =$ der Summe der Zahlen $\mu, \nu, \rho, \ldots$, welche mit Δ_2 gepaart sind; etc.
Die Reduction Π von p wird so:

$$\Pi = \tfrac{1}{2}(\alpha - 1)(\Delta - 1) + \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{h} \alpha_j(\Delta_j - 1).$$

Die Reihenentwicklung aber erhält die Form:

$$y = x^{\frac{\alpha}{\Delta}}[x^{\frac{\Delta_1}{\Delta}}] + x^{\frac{\alpha+\alpha_1}{\Delta}}[x^{\frac{\Delta_2}{\Delta}}] + \cdots + x^{\frac{\alpha+\alpha_1+\cdots+\alpha_h}{\Delta}}[x^{\frac{1}{\Delta}}],$$

wobei nach Halphen (10) mit [u] eine Reihe nach aufsteigenden ganzen Potenzen von u bezeichnet ist, deren constantes Glied von 0 verschieden ist.

Halphen (2) und Smith haben die hier ausgezeichneten Glieder

zuerst in ihrer Bedeutung erkannt; Smith benutzt die Zahlen

$$\Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_h: \gamma = \alpha. \gamma_1 = \alpha + \alpha_1 \ldots . \gamma_h = \alpha + \alpha_1 + \cdots + \alpha_h;$$

und nennt die γ_i/Δ die „kritischen“ Exponenten; Halphen benutzt die Zahlen

$$\frac{\Delta}{\Delta_1} = q, \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = q_1, \ldots, \Delta_h = q_h; \quad \frac{\alpha}{\Delta_1} = s, \frac{\alpha_1}{\Delta_2} = s_1, \ldots, \alpha_h = s_h,$$

und bildet daraus die $s_j/q_j = \alpha_j/\Delta_j$ als „charakteristische Zahlen“, γ_j/Δ als „charakteristische Exponenten“.

Aus den charakteristischen Zahlen eines Zweiges erkennt man wieder, dass er von linearer Transformation unabhängig ist. Auch die Umkehrung der obigen Reihe ergiebt nur wieder einen Zweig, mit den im wesentlichen mit den Δ_j, α_j identischen Zahlenpaaren:

$$\alpha, \Delta; \Delta_1 . \alpha_1; \Delta_2, \alpha_2; \ldots,$$

so dass auch Π sich nicht ändert. Daraus haben Halphen (2) und Smith die Bedeutung der Zahlen für die Entwicklung zwischen den Liniencoordinaten erschlossen (s. unten Nr. 15). In dem Ausdruck für die Multiplicität einer Schnittstelle von zwei Curven f, φ erscheinen ebenfalls jene kritischen Glieder: wenn die charakteristischen Zahlen für den schneidenden Zweig von φ:

$$\overline{\Delta}, \overline{\alpha}; \overline{\Delta}_1, \overline{\alpha}_1; \ldots \quad (\overline{\gamma}_j = \overline{\alpha} + \overline{\alpha}_1 + \cdots + \overline{\alpha}_j)$$

sind, und das niedrigste Glied, in welchem die Reihen für f und φ von einander abweichen, den Exponenten

$$\frac{\gamma_j}{\Delta} + K \cdot \frac{\Delta_{j+1}}{\Delta} \quad (K > 0)$$

hat, so wird die Multiplicität (s. z. B. Halphen (1) oder (10)) zu

$$\begin{aligned} M &= \frac{\overline{\Delta}_{j+1}}{\Delta_{j+1}} \{\alpha \Delta + \alpha_1 \Delta_1 + \cdots + \alpha_j \Delta_j + K \Delta_{j+1}^2\} \\ &= \alpha \overline{\Delta} + \alpha_1 \overline{\Delta}_1 + \cdots + \alpha_j \overline{\Delta}_j + K \Delta_{j+1} \overline{\Delta}_{j+1}, \end{aligned}$$

ein Ausdruck, der wieder von linearer Transformation unabhängig ist (Stolz (2)). Gehören die beiden Zweige derselben Curve an, so wird, wenn Π und $\overline{\Pi}$ die Einzelreductionen an der Zahl p der Curve sind, die Gesamtreduction in p: $\Pi + \overline{\Pi} + M$.

Die charakteristischen Exponenten einer Reihenentwicklung lassen sich natürlich auch schon an dem zu dieser Entwicklung führenden Puiseux'schen Verfahren erkennen; vgl. z. B. Briot's Théorie des fonctions Abéliennes, § 6. oder Brill (3).

D. Verwendung des wesentlichen Factors der Discriminante. Zahl p und Plücker'sche Gleichungen.

14. Unter den zu einer Curve f adjungirten Curven sind die ersten Polaren von f nur in projectiver Hinsicht ausgezeichnet. Obwohl also die Frage, wie die Singularitäten von f in diese speciellen Beziehungen eintreten, nicht eigentlich der Theorie der algebraischen Functionen angehört, müssen wir doch darauf eingehen, insofern diejenigen Eigenschaften der Polaren, welche in dem „wesentlichen Teiler der Discriminante" zum Ausdruck kommen, den allgemeinen Theorien Kronecker's u. s. w. zu Grunde liegen und auch in anderen Theorien zu einer zweiten Definition und dem zugehörigen Invarianzbeweis der Zahl p verwendet werden.

Zweite Art der Zerlegung der Discriminante. Eigentliche und uneigentliche Tangenten.

Die Vermittlung zwischen den beiden Plücker'schen Auffassungen einer Curve, als Punktgebilde $f(x) = 0$ und als Liniengebilde $F(u) = 0$, wird durch die eindeutige Transformation

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{\partial f}{\partial x_1} : \frac{\partial f}{\partial x_2} : \frac{\partial f}{\partial x_3}, \quad f(x) = 0,$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{\partial F}{\partial u_1} : \frac{\partial F}{\partial u_2} : \frac{\partial F}{\partial u_3}, \quad F(u) = 0$$

geleistet. Die Klasse n' von f, oder die Ordnung von $F(u)$, wird dabei gleich dem Grade der Function $\Sigma c_k \partial f/\partial x_k : \Sigma c_k' \partial f/\partial x_k$ bei nicht-speciellen c, c', d. h. gleich der Anzahl der mit den c „beweglichen" Schnittpunkte von $f = 0$, $\Sigma c_k \partial f/\partial x_k = 0$, oder auch gleich der Anzahl der durch den Punkt c gehenden Linien von f, welche in Stellen berühren, die mit c beweglich sind, der „eigentlichen" Tangenten durch c. Nimmt man speciell $\partial f/\partial x_2 = 0$, also $c_1 = c_3 = 0$, indem man voraussetzt, dass die Lage des Coordinatensystems gegen die Curve keine Besonderheit habe, so hat man hier wieder eine Zerlegung der „Discriminante" in zwei Teile (aber von ganz anderer Art als die, welche in den in Nr. 4 und 11 besprochenen Betrachtungen zum Ausdruck kommt), in einen „beweglichen" und einen „festen" Teil. Zu dem letzteren gehört der ganze in Nr. 4 als „ausserwesentlicher" Teiler bezeichnete Factor. Der „wesentliche" Factor gehört aber teilweise zu dem beweglichen, teilweise zu dem festen Teile, spaltet sich also selbst wieder in zwei Teile, von denen der erstere von den „eigentlichen" Tangenten durch $c_1 = c_3 = 0$ herrührt, weshalb man den zweiten als die „uneigentlichen Tangenten" durch $c_1 = c_3 = 0$ bezeichnend auffassen kann (Noether (4)).

15. Um die Anzahlen für diese einzelnen Teile zu bestimmen, wird ein Satz benutzt, welcher die Plücker'schen Zahlen Δ und Δ' für „Ordnung" (Punktvielfachheit) und „Klasse" (Linienvielfachheit) eines Zweiges

Beziehung zwischen Ordnung u. Klasse eines Zweiges.

in Beziehung setzt und der schon von Cayley (1) angedeutet, explicit aber von Halphen ((2), p. 42) und — nach einer Weierstrass'-schen Bemerkung — von Stolz (1) und bald darauf von Noether (3) ausgesprochen worden ist: „Ist ein Zweig als Punktort ein Δ-facher, und ist die Multiplicität des Schnittes mit der Tangente gleich α, so ist der Zweig als Linienort ein $\Delta' = (\alpha - \Delta)$-facher.“ Man führt den Beweis, indem man aus der Entwicklung von y nach x an der Stelle $x = y = 0$, $y = ax^{\alpha/\Delta} + \cdots (\alpha > \Delta)$, diejenige für die Liniencoordinaten u, w, welche durch

$$ux + y + w = 0$$

definirt sind, an der Stelle $u = 0$, $w = 0$ ableitet. Vermöge

$$u = -\frac{dy}{dx}, \quad w = x\frac{dy}{dx} - y$$

erhält man eine Entwicklung

$$w = a'u^{\alpha/(\alpha-\Delta)} + \cdots (a' \neq 0),$$

und zwar wird hier $\alpha - \Delta$ der kleinste gemeinsame Nenner aller Exponenten, wie entweder daraus folgt, dass man von dem Linienzweig wieder zum Punktzweig zurückgeht, oder aus den charakteristischen Zahlen der letzteren Entwicklung, welche nach Halphen und Smith zu

$$\Delta' = \alpha - \Delta, \alpha; \Delta_1, \alpha_1; \ldots; \Delta_h, \alpha_h$$

werden, die sich also nur in der ersten Zahl von denen des Punktzweiges unterscheiden.

Man kann den Satz auch dahin aussprechen, dass ein Zweig von der Ordnung Δ und der Klasse Δ' von seiner singulären Tangente in $\Delta + \Delta'$ Punkten getroffen wird, und dass an denselben von seinem singulären Punkte aus $\Delta + \Delta'$ eigentliche Tangenten gehen.

Zerlegung des „festen“ Factors der Discriminante. Verzweigung.

16. Der zweite, „feste“ Teil des wesentlichen Factors hat, soweit er von einem Δ-fachen Punktzweige von f herrührt, nach Riemann den Wert $\Delta - 1$. Dieselbe Zahl, zugleich aber auch die übrigen Teile des Schnittes von f mit den Polaren, ergeben sich durch die Reihe von quadratischen Transformationen dieser Curven (Noether (2) und (3); in mehr geometrischer Ausführung bei Bertini (1), (2)).

Vermöge $y/x = y_1$ wird

$$f(x, y) = x^h f_1(x, y_1), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^{h-1}\frac{\partial f_1}{\partial y_1};$$

da nun $\partial f_1/\partial y_1$ die Polare eines Punktes von $x = 0$ ist, so unterscheidet sich der Schnitt eines Zweiges von $f_1 = 0$ mit $\partial f_1/\partial y_1 = 0$ von dem mit einer beliebigen Polaren nach dem eben erwähnten Satze um

$h_1'-h_1$, wenn der bezügliche Zweig von f_1 ein h_1-facher ist, aber h_1' Schnittpunkte mit $x=0$ gemein hat. Somit folgt:

„Die Multiplicität des Schnittes von f mit den nicht-speciellen Polaren $\Sigma c_k \partial f/\partial x_k = 0$, die zu einer singulären Stelle von f gehört, ist gleich der Multiplicität des Schnittes daselbst von f mit den zu f adjungirten Curven, vermehrt um die Zahl $\omega_0 = \Sigma_0(\Delta-1)$, wo sich die Summe Σ_0 auf die verschiedenen Zweige jener Stelle bezieht.“ Es wird $\omega_0 = h-\gamma$, wenn die Stelle eine h-elementige ist und zu γ Zweigen gehört.

Für die vollständigen Schnitte von f mit den Polaren lautet die Formel, geschrieben in der Bezeichnung von Nr. 10:

$$n(n-1) = \Sigma h(h-1) + \Sigma_1(\Delta-1) + n' = \Sigma h(h-1) + \omega,$$

die Summe Σ über alle mehrfachen (getrennten oder benachbarten) Punkte, Σ_1 über alle mehrfachen Zweige von f erstreckt. $\Sigma_1(\Delta-1)$ heisst bei Noether die „Verzweigung“ der singulären Stelle, oder die Anzahl der daselbst liegenden festen einfachen Verzweigungspunkte. $\Sigma_1(\Delta-1)+n' = \omega$ ist die Zahl der Verzweigungspunkte in der Riemann'schen x-Fläche, wenn x der Parameter eines gegen die Curve f nicht speciell gelegenen Strahlenbüschels ist. Dieses ω ist der Grad des wesentlichen Teilers einer nicht speciell genommenen Discriminante; n' ist der Grad seines beweglichen, $\Sigma_1(\Delta-1)$ der Grad seines festen Teilers. $\Sigma h(h-1)$ ist der Grad des ausserwesentlichen Factors jener Discriminante.

Ein anderer Weg zur Ableitung derselben Zahlen geht von der Definition der Discriminante durch das Differenzenproduct $\Pi(y_i-y_k)^2$ aus; für alle y werden die Reihenentwicklungen eingesetzt, insbesondere die eines Δ-fachen Zweiges, so dass man hier für den festen Teil „das Doppelte des Schnittes aller partiellen Zweige der Stelle mit sich selbst“ (im Cayley'schen Sinne, s. Nr. 8) erhält. Diese Zahl aber wird, vermöge der quadratischen Substitutionen, identisch mit $H+\omega_0$, wo $H=\Sigma h(h-1)$, für die Stelle genommen (Nr. 10), gleich der Reduction von 2p ist und sich durch die charakteristischen Zahlen der Zweige der Stelle ausdrückt (Nr. 13, Halphen, (2) und (10)).

Anwendungen des wesentlichen Teilers in der Theorie der algebraischen Functionen.

17. Der ausserwesentliche Teiler der Discriminante, oder der Resultante von f und $\Sigma c_k \partial f/\partial x_k$, tritt auch beim Schnitt von f mit allen zu f adjungirten Curven auf. Insofern lassen sich diejenigen Lehren der Theorie der algebraischen Functionen, welche an die zu f adjungirten Formen anschliessen, auf jenen Teiler beziehen. Zu ihnen gehören: die Herstellung der Integranden erster und der höheren Gattungen, die Aufstellung der allgemeinsten in einer gegebenen Punktgruppe von f zu ∞^1 wer-

denden Functionen, insbesondere der φ-Quotienten, also ein grosser Teil der Riemann'schen und Weierstrass'schen Theorie und die ganze Theorie von Brill-Noether.

Verbindet man die diesen Theorien gemeinsame Formel für p (s. oben Nr. 11) mit derjenigen der Nr. 16, so ergiebt sich

$$2p - 2 = \omega - 2n.$$

Dies ist die Formel, die andererseits denjenigen Lehren, welche an den wesentlichen Teiler der Discriminante anknüpfen, zur Definition der Zahl p dient. Zu ihnen gehören die von der Riemann'schen mehrblättrigen Fläche ausgehenden Definitionen, sowie diejenigen Beweise für die Erhaltung der Zahl p, welche von den f berührenden Curven eines Curvenbüschels Gebrauch machen. Die Verbindung zwischen den beiden Betrachtungsarten liegt in der Bildung der endlichen Integrale. Nach Weierstrass (s. Abschn. VII) erfüllen diese die folgende Bedingung: es sollen die Integranden

$$\frac{\varphi(x, y)\frac{dx}{dt}}{\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}} = \frac{\varphi(x_1, x_2, x_3) . \Sigma \pm c_1 x_2 \frac{dx_3}{dt}}{\Sigma_k c_k \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_k}}$$

endlich werden, wenn man für jedes Element des Gebildes die Entwicklungen der Coordinaten nach dem bezüglichen Parameter t, welcher den Punkten des Elementes eindeutig zugeordnet ist, einsetzt. Der ausserwesentliche Schnitt von f mit der Polaren im Nenner wird durch das adjungirte Verhalten der Zählerform φ aufgehoben, der wesentliche Schnitt durch den zweiten Zählerfactor dx/dt, bezw. $\Sigma \pm c_1 x_2 dx_3/dt$. Dieser zweite Factor, $= 0$ gesetzt, liefert die ω (eigentlich und uneigentlich) durch c gehenden Tangenten an f.

Die auf diese Tangenten sich beziehenden algebraischen Beweise zweiter Art für die Erhaltung der Zahl p sind hier, soweit sie singuläre Curven f betreffen, noch etwas näher zu besprechen. Es handelt sich dabei um die Ausdehnung des in V, Nr. 49 erwähnten Bertini-Zeuthen-Clebsch'schen Beweises. Bei einer eindeutigen Transformation, welche die Geraden durch den Punkt c festlässt, gehen die ω Linien in sich selbst über (wobei freilich uneigentliche Tangenten sich in eigentliche verwandeln können, und umgekehrt); und ebenso bleibt die Anzahl n der beweglichen Schnittpunkte der Geraden durch c mit f unverändert. Legt man c, statt ausserhalb f, in einen nicht-singulären, h-fachen Punkt der Grundcurve, so gehen n und ω in $n_1 = n - h$, $\omega_1 = \omega - 2h$ über, sodass $\omega - 2n = 2p - 2$ erhalten bleibt. Auf diesen Fall aber kann man die

Zerlegung einer beliebigen Transformation in zwei successive, wobei man je eine Variable, d. h. je einen Punkt festlässt, immer zurückführen. Die Invarianz von p ist damit für alle Fälle erwiesen.

Die Aenderung, die ω erfährt, wenn der Punkt c in einen beliebig-singulären h-elementigen Punkt von f verlegt wird, wo wieder $n_1 = n - h$ ist, hat Noether (2) und (3) untersucht und gezeigt, dass dann auch $\omega_1 = \omega - 2h$ ist. Smith, welchem dieser Beweis nicht genügend klar erschien, berechnet die Aenderungen der beiden Teile von $\omega = n' + \Sigma_1(\Delta - 1)$ einzeln: von einem Δ-fachen Punktzweig bei c, der die Klasse Δ' hat, herrührend, gehen durch den Punkt c $\Delta + \Delta'$ der n' eigentlichen Tangenten; es geht daher n' über in $n'_1 = n' - (\Delta + \Delta')$, $\Sigma_1(\Delta - 1)$ in $\Sigma_{11} = \Sigma_1(\Delta - 1) - (\Delta - 1) + (\Delta' - 1)$. Aus der Aenderung von ω ergeben sich auch die Modificationen, welche eintreten, wenn man statt der Resultante von f und einer allgemeinen Polaren diejenige aus f, $\partial f/\partial y$ aufstellt, sofern $x_1 = x_3 = 0$ $(x = x_1, x_3, y = x_2/x_3)$ ein singulärer Punkt von f ist (s. Noether (4)).

Ein zweiter analoger Beweis für die Erhaltung von p ist von Noether (2) und Halphen (10) gegeben worden. Dabei wird die zu c gehörige Zahl ω direct verglichen mit der Zahl der (eigentlichen und uneigentlichen) Berührungscurven an die transformirte Curve f_1, welche den Tangenten an f durch c entsprechen: bei Ersterem, indem er f_1 nochmals in eine Curve ohne Singularität transformirt sich denkt und die Functionaldeterminante aus f_1 und dem den Geraden durch c entsprechenden Curvenbüschel benutzt; bei Letzterem, indem die Reihenentwicklungen auf den Ausdruck $\Sigma \pm c_1 x_2 \, dx_3/dt$ („Differentialcovariante") angewendet werden. — Beide Verfahren sind also nicht wesentlich verschieden.

18. Vermöge der Formeln für p und der in Nr. 16 bezeichneten Formeln ergeben sich an Stelle der für gewöhnliche Curven f gültigen drei unabhängigen Plücker'schen Gleichungen auch bei Curven mit höheren Singularitäten drei solche Gleichungen. Seien n, n' Ordnung und Klasse der Curve, so wird in der Bezeichnung von Nr. 10:

Anwendungen aller Teiler auf die Plücker'schen Gleichungen.

$$n' = n(n-1) - \Sigma h(h-1) - \Sigma_1(\Delta - 1),$$
$$n = n'(n'-1) - \Sigma' h'(h'-1) - \Sigma'_1(\Delta' - 1),$$
$$n(n-3) - \Sigma h(h-1) = n'(n'-3) - \Sigma' h'(h'-1),$$

wo sich Σ auf alle vielfachen Punkte von f, getrennte oder benachbarte, bezieht, Σ' analog auf die Linien von f, Σ_1 und Σ'_1 auf die vielfachen Punkt-, bezw. Linienzweige von f. Vermöge der charakteristischen Zahlenpaare eines Punktzweiges (Nr. 13)

$$\Delta, \alpha; \quad \Delta_1, \alpha_1; \quad \ldots; \quad \Delta_h, \alpha_h,$$

und derjenigen desselben Zweigs in Linienauffassung (Nr. 15)

$$\Delta' = \alpha - \Delta, \; \alpha; \quad \Delta_1, \alpha_1; \quad \ldots; \quad \Delta_h, \alpha_h$$

werden die durch diesen Zweig bewirkten Reductionen der Klasse, bezw. Ordnung

$$\left.\begin{aligned} K &= 2H + (\Delta - 1) = \alpha(\Delta - 1) + \sum_{j=1}^{h} \alpha_j(\Delta_j - 1), \\ K' &= 2H' + (\Delta' - 1) = \alpha(\Delta' - 1) + \sum_{j=1}^{h} \alpha_j(\Delta_j - 1); \end{aligned}\right\} \quad \text{(f. H s. Nr. 13);}$$

die Reduction für zwei Zweige derselben Stelle aber wird bezw.

$$K + \overline{K} + 2M, \quad K' + \overline{K'} + 2M',$$

wo M in Nr. 13 angegeben ist; und somit werden die drei Gleichungen:

$$n' = n(n-1) - \Sigma_1 K - 2\Sigma_{12} M,$$
$$n = n'(n'-1) - \Sigma'_1 K' - 2\Sigma'_{12} M',$$
$$n(n-3) - 2\Sigma_1 H - 2\Sigma_{12} M = n'(n'-3) - 2\Sigma'_1 H' - 2\Sigma'_{12} M' \; (= 2p-2),$$

wo sich wieder Σ_1 auf alle vielfachen Punktzweige von f, Σ_{12} auf die Combinationen zu zweien von denen mit gemeinsamer Stelle beziehen, Σ'_1, Σ'_{12} auf die reciproke Auffassung.

Smith-Halphen'sche Formeln.

19. Smith hat zuerst darauf hingewiesen, dass in diesen Formeln Combinationen vorkommen, welche nur die direct ersichtlichen Vielfachheiten der einzelnen Stellen (Punkte oder Linien) von f, nicht aber die weiteren Singularitätenzahlen, enthalten; und Halphen ((8), p. 9) hat in Bezug auf die Zeuthen'sche Erweiterung der Geschlechtsformel, die er mittelst der Correspondenztheorie auf Curven mit höheren Singularitäten ausdehnte, dieselbe Bemerkung gemacht. Hierdurch ist eine Gruppe von Formeln gewonnen, welche den Vorzug haben, „bei ihrer Anwendung keine Untersuchungen der Ordnungen des Unendlichkleinen, oder äquivalente Processe, nötig zu machen" (Zeuthen (2)).

Für einen einzelnen Zweig gehört hierher zunächst die Formel

$$\alpha = \Delta + \Delta', \quad \text{(Nr. 15)}$$

sodann die folgenden (Nr. 18)

$$\left.\begin{aligned} H - H' &= \tfrac{1}{2}\Delta(\Delta-1) - \tfrac{1}{2}\Delta'(\Delta'-1) = \tfrac{1}{2}(\alpha-1)(\Delta-\Delta') \\ K - K' &= \Delta^2 - \Delta'^2, \end{aligned}\right\} \quad \text{(Smith),}$$

oder, statt der letzteren, wenn man setzt

$$K = \Delta(\Delta-1) + \mathfrak{K} = \Delta(\Delta-1) + \Delta'(\Delta-1) + \sum_{j=1}^{h} \alpha_j(\Delta_j - 1),$$

wo dann $\mathfrak{K}$ „die Summe der Ordnungen der Berührungen der partiellen Zweige des Punktzweigs unter sich" bedeutet:

$$\mathfrak{K} - \mathfrak{K}' = \Delta - \Delta'.$$

Für zwei Zweige derselben Stelle erhält man, indem man die in Nr. 13 angegebene Multiplicität M in der Form schreibt

$$M = \Delta\overline{\Delta} + \mathfrak{M},$$

wegen $\Delta'\overline{\Delta} = \overline{\Delta'}\Delta$ die Relation (Smith)

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M},$$

welche aussagt, dass — ausser den unmittelbar zu findenden Multiplicitäten $\Delta\overline{\Delta}$ und $\Delta'\overline{\Delta'}$ — jeder weitere gemeinsame Punkt eine weitere gemeinsame Linie hervorbringt. Für die zweien Curven gemeinsamen Punkte und Linien ergiebt sich hieraus die Relation (wenn sich die oberen Horizontalstriche auf die zweite Curve beziehen)

$$n\overline{n} - n'\overline{n'} = S h\overline{h} - S' h'\overline{h'},$$

wo das Zeichen S bedeutet, dass die Summirung auf alle gemeinsamen Punktstellen (oder auch alle Stellen der beiden Curven), jede aber nur mit der unmittelbar gegebenen Vielfachheit, zu erstrecken ist; S' dasselbe für die Linienauffassung.

Für ein und dieselbe Curve liefert die analoge Summirung statt der Geschlechtsformel die folgende:

$$n(n-3) - Sh(h-1) = n'(n'-3) - S'h'(h'-1), \quad \text{(Zeuthen)}$$

welche von der früheren ähnlichen (Nr. 18) dadurch abweicht, dass sich S auf alle h-elementigen Stellen, nur mit ihrer unmittelbaren Vielfachheit genommen, bezieht, und S' eine analoge Bedeutung hat. Eine Combination der beiden ersten Plücker'schen Gleichungen giebt:

$$n^2 - n'^2 = Sh(h-1) - S'h'(h'-1) + \Sigma_1(\Delta - \Delta'),$$

wo die Summirung Σ_1 $(= \Sigma_1(\Delta-1) - \Sigma_1(\Delta'-1))$ auf alle Zweige von f, oder auch auf alle solche von verschiedener Ordnung und Klasse, auszudehnen ist. Aus beiden Formeln folgt noch

$$3(n - n') = \Sigma_1(\Delta - \Delta').$$

Die analoge Behandlung der Formel $\omega_1 - 2n_1 = \omega_2 - 2n_2$ von Nr. 17 war der Ausgangspunkt von Halphen und Zeuthen. Dieselbe ergiebt:

$$2(n_1 - n_2) = S(\nu_1 - \nu_2);$$

dabei ist angenommen, dass auf f zwei bezw. $(n-n_1)$-, $(n-n_2)$-fache Punkte P_1, P_2 ohne weitere Singularität seien, dass ferner irgend eine Stelle von f für die sie mit P_1 bezw. P_2 verbindenden Geraden die Multiplicitäten ν_1, bezw. ν_2 habe, und dass die Summirung S über alle Stellen von f (P_1, P_2 ausgenommen) erstreckt werde. Wäre P_1 oder P_2 singulär, so träte eine Modification ein, welche nicht angegeben wird, die aber unschwer zu erkennen ist.

Diese Formel dient dazu, die im Anfang dieser Nummer erwähnte

Erweiterung des Geschlechtssatzes auf das mehrdeutige Entsprechen zweier singulären Curven f_1 und f_2, bezw. vom Geschlecht p_1 und p_2 vorzunehmen. Einem Punkte Q_1 von f_1 mögen α_2 Punkte Q_2 von f_2, einem Punkte Q_2 von f_2 α_1 Punkte Q_1 von f_1 entsprechen. Sei ferner Q, Q' irgend ein Paar correspondirender Punkte von f_1, f_2, jeder auf seinem bestimmten Curvenzweig genommen; sei ν_1 die Zahl derjenigen Punkte Q_1, welche consecutiv in die Stelle Q rücken (d. h. an Q auf jenem Zweige heranrücken), wenn Q_2 in Q' fällt; und ebenso ν_2 die Zahl derjenigen Punkte Q_2, welche $Q_1 = Q$ entsprechen und zugleich consecutiv in Q' rücken. Dann schreibt sich die Formel

$$S(\nu_1 - \nu_2) = 2\mu_2(p_1 - 1) - 2\mu_1(p_2 - 1),$$

wo die Summirung S auf alle Paare correspondirender Punkte Q, Q' von f_1, f_2 ausgedehnt wird, oder vielmehr nur auf solche, welche von Null Verschiedenes geben, d. h. auf die Fälle, wo zwei oder mehrere der einem Punkt entsprechenden Punkte zu einander (auf einem und demselben Zweige) consecutiv werden. Wenn alle $\nu < 3$ bleiben, sowie bei nichtsingulären Curven, tritt links die Differenz zwischen der Zahl der Coincidenzpunkte auf f_1 und derer auf f_2 auf, was dann die ursprüngliche Zeuthen'sche Formel darstellt.

Die Bestimmung der Zahl ν_1 ergiebt sich, bei gegebener singulärer Stelle Q, mittelst der Reihenentwicklung oder mittelst der Transformationsmethode, welche diese Stelle in eine einfache auflöst. Dieselbe Bemerkung ist hinsichtlich der Coincidenzstellen von zwei sich entsprechenden Punkten bei der Correspondenzformel für eine auf einer Curve gegebene Correspondenz zu machen (Zeuthen, Math. Ann. 40, p. 102, s. X. Abschnitt Nr. 10).

Aequivalenzzahlen der Singularitäten.

20. Unter den „notwendigen" Singularitäten einer Curve versteht man diejenigen, welche entweder in der gegebenen Curve oder in ihrer Reciprokalcurve, wenigstens für n und $n' > 3$, immer vorkommen, nämlich gewöhnliche Doppel- und stationäre (Rückkehr-)Punkte, Doppel- und stationäre (Wende-)Tangenten. Cayley (1) hat — mit einem Inductionsschluss — hinsichtlich der Plücker'schen Formeln und der Maximalzahl der Doppelpunkte einer irreductibeln Curve jeder Singularität eine Combination von δ Doppel-, ε stationären Punkten, δ' Doppel-, ε' stationären Tangenten äquivalent gesetzt und die Formeln zur Berechnung dieser vier Indices, welche von den weiteren Eigenschaften der Curve, wie Ordnung etc., unabhängig werden, angegeben; der Gesamtheit aller Singularitäten der Curve f sind dann vier Zahlen äquivalent:

$$D, E = \Sigma\varepsilon, \ D', E' = \Sigma\varepsilon'.$$

Für einen Zweig von der Ordnung Δ, Klasse Δ' nimmt Cayley den Beitrag zu E gleich $\varepsilon = \Delta - 1$, zu E' gleich $\varepsilon' = \Delta' - 1$; ferner ist $2D + 3E$ gleich der Gesamtzahl der „festen" Schnittpunkte von f mit den ersten Polaren von f, und $2\delta + 3\varepsilon$ erhält man für jeden einzelnen Zweig, indem man die Entwicklungen von x und y nach dem Parameter des Zweigs in $\Sigma c_k \partial f / \partial x_k$ einsetzt; analog $2D' + 3E'$, $2\delta' + 3\varepsilon'$. Um diese Betrachtungen streng zu machen und ihre Tragweite zu bestimmen, war es nötig (s. Smith) festzustellen,

a) dass diese Aequivalente für die Plücker'schen Gleichungen gültig sind;

b) ob solches auch für andere Beziehungen der Fall ist;

c) ob ein singulärer Zweig mit den Indices $\delta, \varepsilon, \delta', \varepsilon'$ durch Grenzübergang aus einer Curve erhalten werden kann, welche die gewöhnlichen Singularitäten $\delta, \varepsilon, \delta', \varepsilon'$ in der Nähe eines Punktes in aufgelöster Form enthält.

Ad a) Man hat nur drei unabhängige Plücker'sche Gleichungen und in denselben nur drei Combinationen von D, E, D', E', etwa

$$2D + 3E = n(n-1) - n', \quad 2D' + 3E' = n'(n'-1) - n, \quad E - E' = 3(n - n'),$$

zwischen denen eine von n, n' unabhängige Relation besteht. Soweit also jene Gleichungen in Betracht kommen, wird man, ohne n und n' zu ändern, eine der vier Zahlen ganz willkürlich wählen können. Die drei Gleichungen für einen Zweig:

$$2\delta + 3\varepsilon = K, \quad 2\delta' + 3\varepsilon' = K', \quad \varepsilon - \varepsilon' = \Delta - \Delta',$$

wo K, K' in Nr. 18 auf mehrfache Weise berechnet sind, erlauben $\varepsilon = \Delta - 1$ zu setzen, wonach auch $\varepsilon' = \Delta' - 1$ folgt; und die beiden ersten Gleichungen dienen dann zur Definition von δ und δ'. Zwischen diesen vier Zahlen besteht dann, wegen $K - K' = \Delta^2 - \Delta'^2$ (Nr. 18), die Relation (Smith):

$$\delta - \delta' = \tfrac{1}{2}\varepsilon(\varepsilon - 1) - \tfrac{1}{2}\varepsilon'(\varepsilon' - 1).$$

Für γ sich berührende Zweige hat man so, wenn $\bar\delta, \bar\delta', \bar\varepsilon, \bar\varepsilon'$ deren Gesamtäquivalente nach Cayley sind, eine Relation (Zeuthen):

$$\bar\delta - \bar\delta' = \tfrac{1}{2}\bar\varepsilon(\bar\varepsilon + 2\gamma - 3) - \tfrac{1}{2}\bar\varepsilon'(\bar\varepsilon' + 2\gamma - 3).$$

Diese „Principaläquivalente" (nach Zeuthen (1)) haben den Vorzug, für jeden Zweig immer ganze Indices zu liefern. Die „allgemeinen Werte" der Aequivalente, welche den Plücker'schen Formeln genügen, sind

$$\delta + \frac{3\beta}{2}, \quad \varepsilon - \beta, \quad \delta' + \frac{3\beta}{2}, \quad \varepsilon' - \beta, \quad (\beta \text{ beliebig}).$$

So nimmt Plücker für einen Rückkehrpunkt zweiter Art: $\delta = 2\frac{1}{2}$, $\varepsilon = 0$, $\delta' = 2\frac{1}{2}$, $\varepsilon' = 0$, Cayley aber $\delta = \varepsilon = \delta' = \varepsilon' = 1$. Die gewöhnlichen projectiven Processe, insbesondere die Polarenbetrachtung geben keine Entscheidung in Bezug auf diese verschiedenen Arten von Aequivalenzbestimmungen (Smith); denn die Hesse'sche Determinante liefert nur die Zahl $3\,d + \Sigma(\Delta' - \Delta)$ von Schnittpunkten an der singulären Stelle S, wo d die Multiplicität des Schnittes von f mit einer beliebigen Polaren in S ist (übrigens ein an der Hesse'schen noch nicht direct bewiesener Satz); die Polare eines Punktes auf der Tangente (ausserhalb S) einiger sich berührender Zweige dieser Stelle liefert $d + \Sigma\Delta'$, die Polare von S $d + \Sigma(\Delta + \Delta')$ Schnittpunkte. Es würde also weiter mindestens die Zerlegung der singulären Stelle in einzelne Zweige erforderlich sein.

Ad b) Die Aufgabe b) führt zu der weiteren Frage, in welchem Gebiete man die Gültigkeit von Aequivalenzzahlen prüfen will; erst hierdurch wird das Problem ein bestimmtes. Cayley hat selbst schon die durch einen singulären Δ-punktigen Zweig an der Geschlechtszahl p der Curve hervorgebrachte Reduction gleich $\delta + \varepsilon$ gesetzt, ohne aber den Schluss explicit völlig anzugeben (s. Stolz (1)): wegen

$$p = \tfrac{1}{2}[n' + \Sigma(\Delta - 1)] - (n - 1),$$

ergiebt sich für p die Reduction

$$\tfrac{1}{2}[(2\delta + 3\varepsilon) - (\Delta - 1)] = \delta + \varepsilon,$$

was $\varepsilon = \Delta - 1$ liefert. Die Zahl $2(\delta + \varepsilon)$ bezieht sich auf den Schnitt von f mit den allgemeinen zu f adjungirten Curven, $\delta + \varepsilon$ auf die Reduction, welche die Anzahl der linear unabhängigen adjungirten Curven $(n-3)$ter und höherer Ordnung erfährt. Man kann also sagen: die Principaläquivalenzzahlen Cayley's ersetzen die Singularitätszahlen nicht nur in den Plücker'schen Gleichungen, sondern in allen Fragen, welche sich auf rational-eindeutige Transformation der Curve beziehen. Weiter aber erstreckt sich ihre Geltung zunächst nicht.

Die Frage, ob sich eine endliche Anzahl von Aequivalenzzahlen für eine gegebene Singularität finden lässt, deren Definition sowohl von der Curve, welcher die Singularität angehört, als von dem besonderen Problem, in welches letztere eintritt, unabhängig ist, ist überhaupt in diesem allgemeinen Sinne unstatthaft. Für diejenigen Relationen, welche Differentiale der Coordinaten der Curve von höherer als der zweiten Ordnung enthalten, existiren nach Halphen (10) keine solche Aequivalenzzahlen. Dasselbe gilt für die Berührungsaufgaben mit nicht-adjungirten Curven, wo sich z. B. ein gewöhnlicher dreifacher Punkt nicht mehr genau wie drei Doppelpunkte verhält (W. Weiss, Ueber gewisse Berührungscurven-Scharen einer

algebraischen Curve. Prager deutsche math. Ges. 1892); und Zeuthen (1) hat schon früher in den Formeln über Reciprocalflächen die Principalzahlen Cayley's durch die obigen „allgemeineren" Zahlen ersetzt.

21. (Ad c) Nr. 20). Was die Aufgabe c) von Nr. 20 betrifft, so sagen die Aequivalenzzahlen an sich nichts aus über die Frage, ob die höhere Singularität als Grenze von zugehörigen niedrigeren Singularitäten, welche in gewisser Weise zusammengerückt sind, aufgefasst werden kann. Ist umgekehrt die letztere Frage gelöst, so ist nach dem ad b), Nr. 20 Gesagten zunächst allerdings noch die Art der Probleme, für welche die Aequivalenz gelten soll, zu ermitteln.

Erzeugung der Singularität durch Grenzübergang.

Mittel zur Ersetzung einer Curve durch eine nicht- oder weniger singuläre geben sowohl die Reihenentwicklungen als die Transformationsfolge an die Hand. Beiderlei Verfahren führen dazu, an Stelle der grossen Mannigfaltigkeit von möglichen Deformationen der Curve, d. h. von Variationen der Coefficienten ihrer Gleichung, einen bestimmten Weg hierfür vorzuschreiben.

Das Mittel der Reihen ist zuerst von Brill systematisch verwendet worden (Brill (1), (4)). Bricht man die Entwicklung für einen Zweig $x = t^{\Delta}$, $y = \mathfrak{P}(t)$, an einer genügend hohen Stelle ab, so erhält man eine rationale Curve C $(p = 0)$, welche die gegebene Singularität mit beliebiger Annäherung zeigt. Nun variirt Brill diese Ausdrücke in t derart, dass sich weder Ordnung, noch Klasse, noch Geschlecht von C ändern, so dass die Cayley'schen Principaläquivalenzzahlen erhalten bleiben. Er gelangt hierbei zu einer Curve mit nur „elementaren" (den sogenannten „notwendigen") Singularitäten, und zwar ergeben sich ihm für die stationären Punkte und Tangenten von C noch (innerhalb des ursprünglichen Convergenzgebietes) beliebig verzugebende Parameterwerte t, während die Werte von t für die Doppelpunkte und -Tangenten hierdurch bedingt sind.

Die Curve C ist ein specieller Fall einer „rational-ganzen", d. h. einer Curve von gleicher Ordnung und Klasse, für welche sowohl die Punktcoordinaten x, y, als die Liniencoordinaten u, v (aus $ux - y - v = 0$) rational-ganze Functionen von t sind. An solche knüpft Brill die Betrachtung an und stellt sie, wenn $\rho(t) = 0$ und $\omega(t) = 0$ die Gleichungen für die Parameter der stationären Punkte, bezw. stationären Tangenten sind, in der Form dar

$$x = \int \rho\, dt, \quad u = \int \omega\, dt, \quad y = \int \rho\, u\, dt, \quad v = \int \omega\, x\, dt.$$

In $\rho(t)$ tritt t als $(\Delta - 1)$-facher, in $\omega(t)$ als $(\Delta' - 1)$-facher Factor auf, wenn der Zweig die Ordnung Δ, die Klasse Δ' hat. Die Variation be-

steht dann darin, die Coefficienten von $\rho(t)$ und $\omega(t)$ so zu ändern, dass beide Ausdrücke keine vielfachen Factoren mehr enthalten. Nimmt man diese Variationen genügend allgemein, so werden zugleich auch die beiden Gleichungen in t, welche die in den Doppelpunkten vereinigten Punktpaare, bezw. die in den Doppeltangenten vereinigten Tangentenpaare liefern (und welche nach der Methode von Clebsch. J. f. Math. 64, zu bilden sind), nur einfache und verschiedene Wurzeln besitzen. Die Zahl dieser Wurzeln hängt jedoch nicht nur von Δ und Δ' ab. sondern auch von den Exponenten weiterer Glieder in ρ und ω, welche, wenn $\rho = \Delta t^{\Delta-1}$, genau in die kritischen Exponenten von Smith übergehen.

Brill bestimmt für alle „rational-ganzen" Curven direct die Indices δ, δ'. ohne erst durch Elimination von t die Entwicklung $y = \mathfrak{P}(x^{1/\Delta})$ herzustellen. Es entspricht dies dem Umstande, dass man aus jeder Curvengleichung die charakteristischen Zahlen auch ohne Reihenentwicklung finden kann, nämlich mittelst rationaler Transformationen: aber diese Bemerkung sagt nicht etwa aus, dass sich in der Darstellung $x = \mathfrak{P}_1(t)$, $y = \mathfrak{P}_2(t)$ die charakteristischen Exponenten unmittelbar zeigen. Seien diese Reihen:

$$x = t^{\Delta}[t^{\Delta_1}] + t^{\beta_1}[t^{\Delta_2}] + \cdots, \quad y = t^{\alpha}[t^{\Delta_1}] + t^{\gamma_1}[t^{\Delta_2}] + \cdots,$$

wo die Exponenten Δ, α den grössten gemeinsamen Factor Δ_1 haben; β_1, γ_1 die ersten nicht durch Δ_1 teilbaren Exponenten, aber mit dem grössten gemeinsamen Factor Δ_2; etc. Dann sind, wie die in (1), § 9 aufgestellten Formeln zeigen, nicht immer $\Delta, \alpha; \Delta_1, \beta_1, \gamma_1; \Delta_2 \ldots$ die charakteristischen Zahlen der Entwicklung von y nach x: vielmehr können Teiler Δ_i ganz ausfallen, indem die bezüglichen Coefficienten der Reihe von y nach x zu 0 werden, andere Teiler können zutreten, es kann sogar vorkommen, dass Δ überhaupt nicht der kleinste gemeinsame Nenner der Exponenten dieser Entwicklung ist.

Auch dass sich jenes Mittel der Variation auf mehrere Zweige einer Stelle ausdehnen lässt und sich rückwärts auf die Variation der niedrigeren Glieder der Gleichung der ursprünglichen Curve überträgt, wird nachgewiesen. — Brill benutzt übrigens die rationale Curve auch noch zu einem algebraisch-functionentheoretischen Zweck: zur Herstellung von Curven, die sich in einer gegebenen Singularität adjungirt verhalten. Damit die Coordinaten x und y einer rationalen Curve f_n durch den Parameter t eines Curvenbüschels $\varphi - t\chi = 0$ rational ausgedrückt werden können, muss sich φ/χ wie der Quotient aus zwei zu f adjungirten Curven verhalten; bildet man nun aus den Ausdrücken für x und y

$$t^{2n-2} : t^{2n-3} : \ldots : t : 1 = \gamma_0 : \gamma_1 : \ldots : \gamma_{2n-3} : \gamma_{2n-2},$$

wo die γ_h ganze Functionen $(n-1)$ter Ordnung von x und y werden, so erhält man in $\Sigma_h \alpha_h \gamma_h = 0$ alle zu f_n adjungirten Curven $(n-1)$ter Ordnung, woraus sich das Verhalten der allgemeinsten adjungirten Curve in Bezug auf eine beliebige Singularität irgend einer algebraischen Curve ergiebt, sofern nur für die substituirte rationale Curve der Grad n genügend hoch angenommen wird.

Auch die Folge von quadratischen Transformationen, welche die Singularität einer Stelle auflösen, lässt sich mit bestimmten Variationen verbinden. Man braucht nur, wenn man eine Stelle S von f und die successiv entsprechenden Stellen S_1 von f_1, S_2 von f_2, ... betrachtet, diese Stellen S_1, S_2, ... je aus den zugehörigen (bezw. S, S_1, ... entsprechenden) Fundamentallinien etwas herauszurücken, ohne sonstige Aenderung der Singularitäten, was durch kleine Aenderungen der Coordinaten von S_1, dann von S_2, etc., geschehen kann. Geht man von solchen Curven direct zum ersten Coordinatensystem x, y zurück, so erhält man an Stelle von f eine Curve F, welche die in Nr. 10 bezeichneten h-, h_1-, h_2-, ... fachen Punkte von gewöhnlicher Vielfachheit, denen man die Singularität äquivalent setzen kann, wirklich in der Nähe von $x = y = 0$ besitzt, ohne dass diese Punkte unendlich nahe zusammengerückt sind (s. Noether (3) S. 171). Freilich haben sich die Verzweigungen hierbei aufgelöst. Eine geometrisch-anschauliche Verfolgung dieses Processes, verbunden mit weiterer Auflösung der vielfachen Punkte, findet sich bei Scott, Amer. J. Bd. 14, 1892.

Der Aufsatz von Baker, 1894, liefert durch eine graphische Construction am Newton'schen Parallelogramm eine untere Grenze für die Anzahl der einem singulären Punkte in Bezug auf die Geschlechtszahl äquivalenten Doppelpunkte, und für den Ausdruck der in einem solchen Punkte zu adjungirenden Curven φ eine erste Annäherung.

Realitätsfragen.

22. Von weiteren auf die Singularitäten bezüglichen Fragen kann die nach der Realität der Zweige und der zugehörigen Discriminantenfactoren nur berührt werden, wenn wir nicht die allgemeineren Realitätsfragen für die Gestalt der ganzen Curve f überhaupt in unsere Besprechung einbeziehen wollen, während doch die Theorie sich bisher von dieser Frage gänzlich unabhängig entwickelt hat.

Was die figürliche Realität angeht, so sei beiläufig bemerkt, dass Klein aus Curvengestalten Riemann'sche Flächen für die zugehörigen algebraischen Functionen hergestellt (Math. Ann. 7, 10, etc.) und daraus Schlüsse, auf Moduleigenschaften gezogen hat (Math. Ann. 10 etc.). — Nach dem Vorgange von Zeuthen bei der Curve vierter Ordnung hat

ferner Klein (Ber. d. Erl. Ges. 1875, Math. Ann. 10) zwischen den Zahlen der Curve: n = Ordnung, n' = Klasse, r' = Zahl der reellen Spitzen, w' = Zahl der reellen Wendungen. d'' = Zahl der reellen isolirten Doppelpunkte, t'' = Zahl der reellen isolirten Doppeltangenten — aus der Deformation der Curve die Relation nachgewiesen:

$$n + w' + 2t'' = n' + r' + 2d''.$$

Die algebraische Grundlage des Satzes hat Brill (1) angegeben (Math. Ann. 16), indem er die Discriminante der Doppelpunkts- und der Doppeltangentengleichung einer rational-ganzen Curve (s. Nr. 21) in Factoren zerlegte, wobei er auch für höhere Singularitäten reelle Aequivalente in reellen elementaren Singularitäten erhielt.

VII. Abschnitt.

Die Weierstrass'sche Richtung.

A. **Karl Weierstrass.** Zweiter Teil [von 1869 an]*).

Litteratur:

(1) Die zu III, E genannten drei Abhandlungen: Programm v. 1849. J. f. Math. Bde. 47. 52.

(2) Ueber die Integration algebraischer Differentiale vermittelst Logarithmen. Monatsber. der Berl. Akad. v. 26. Febr. 1857.

(3) Vorlesungen über die Theorie der Abel'schen Functionen. 1869 ff. (Einleitende Vorlesungen schon Sommer 1863 und 1866).

Benützt wurde:

1. Nachschrift von Fr. Wagner. 1869;
2. Nachschrift von L. Wedekind. 1869;
3. Excerpt von J. Lüroth nach einer Nachschrift von E. Jürgens aus 1874/5;
4. Ausarbeitung von H. v. Mangoldt, nach Nachschriften von G. Hettner (algebraischer Teil) und J. Knoblauch (transcendenter Teil) aus 1875/6; mit Zusätzen aus einer Nachschrift von F. Schottky 1873/4 und weiteren Zusätzen aus den Nachschriften von G. Hettner, J. Knoblauch und F. Schur der Vorlesungen über hyperelliptische Functionen 1876/7.
5. Nachschrift von O. Hölder 1879/80.

(4) Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze. Lithogr. 1879: Abhandlungen aus der Functionenlehre, Berlin 1886 (Abh. 5). „Vorbereitungssatz" dieser Abhandlung seit 1860 in Vorlesungen mitgeteilt.

Dazu:

O. Biermann, Theorie der analytischen Functionen. Leipzig 1887.

E. Netto. De transformatione aequationis $y^n = R(x)$, designante $R(x)$ functionem integram rationalem variabilis x, in aequationem $\eta^2 = R_1(\xi)$. Dissert. Berlin 1870.

---

*) Für den ersten Teil s. Abschn. III, E des Referats.

F. Schottky,
(1) Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen. Dissert. Berlin 1875.
(2) Ueber die conforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Flächen. J. f. Math. 83. 1877.
G. Hettner,
(1) Ueber die Reduction der Integrale einer besonderen Klasse von algebraischen Differentialen auf die hyperelliptischen Integrale. Dissert. Berlin 1877.
(2) Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine Schaar rationaler eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich zulassen. Gött. Nachr. 1880.
G. Valentin, De aequatione algebraica, quae est inter duas variabiles, in quandam formam canonicam transformata. Dissert. Berlin 1879.
F. Kötter, Anwendung der Abel'schen Functionen auf ein Problem der Statik etc. J. f. Math. 103, 1885.

Allgemeines.

1. Die Bedeutung der Arbeiten (1) von Weierstrass für die Entwicklung der Theorie der Abel'schen Functionen haben wir im III. Abschnitt besprochen; auch werden wir im Abschnitt IX noch einmal darauf zurückkommen. Hier wenden wir uns zu dem algebraischen Inhalt der Vorlesungen (3). Ueber ihre Stellung zur Theorie der singulären Punkte haben wir bereits in Abschnitt VI. Nrn. 5. 8. referirt. Diese Vorlesungen, gehalten unter dem Titel „Theorie der Abel'schen Functionen", enthalten so viel Material aus der Theorie der algebraischen Functionen und, bei Verschiedenheit in der Form und den einzelnen Beweismitteln, mit so charakteristischen Zügen, dass man von einer Weierstrass'schen Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale sprechen kann, ohne übrigens damit auszuschliessen, dass Weierstrass seine Theorie in jenen Vorlesungen nur soweit dargelegt hat, als es für seine Behandlung der Abel'schen Transcendenten erforderlich war. Einige von den Methoden und Resultaten von Weierstrass sind in den citirten Arbeiten von Netto, Schottky, Hettner, Valentin und Kötter veröffentlicht und angewendet worden; von den Vorlesungen selbst existirt bis jetzt keine von Weierstrass autorisirte Nachschrift. Indessen standen uns die oben genannten Bearbeitungen zur Verfügung [vgl. Vorrede des Ref.].

Im Mittelpunkte des ganzen Weierstrass'schen Ideenkreises steht der Begriff der „analytischen Function": die Gesamtheit der Functionselemente (Potenzreihen), die sich aus einem gegebenen durch analytische Fortsetzung ableiten lassen. Zwei Functionselemente sind dann in einander fortsetzbar, wenn sie ein gemeinschaftliches Convergenzgebiet besitzen, innerhalb dessen unendlich viele Punkte sich angeben lassen, für

welche die beiden Reihen dieselben Werte liefern. Ein einzelnes Functionselement genügt also zur Definition der Function, aber die Untersuchung der Fortsetzbarkeit geschieht bei Weierstrass jedesmal in der Weise dass eine Functionaleigenschaft des Functionselements nachgewiesen und benutzt wird, welche die Reihe an einer gegebenen Stelle definirt: etwa eine algebraische Differentialgleichung. Unter Ausdehnung dieses Begriffs auf mehrere Variable hatte Weierstrass in den im III. Abschnitt besprochenen Arbeiten (1) im J. f. Math. den Weg zur Erledigung des Umkehrproblems der hyperelliptischen Integrale eingeschlagen: dabei bildet das Additionstheorem das Mittel zum Beweise der analytischen Erweiterung der Umkehrungsfunctionen, während die wirkliche Darstellung der letzteren von anderer Seite her, aus den Ausdrücken und Eigenschaften der zum ursprünglichen Problem gehörigen Integrale der verschiedenen Gattungen, bewirkt wird. In der Einleitung zu den Vorlesungen über Abel'sche Functionen, eingehender insbesondere in denen der letzten Jahre, giebt nun Weierstrass eine sehr bedeutende Verallgemeinerung dieses Gedankenganges. Für eine Anzahl r von Functionselementen von ebensovielen unabhängigen Variabeln $u_1, \ldots, u_r$, welche ein algebraisches Additionstheorem besitzen sollen, weist er die Existenz eines Systems von r algebraischen Differentialgleichungen nach, sowie ihre algebraische Abhängigkeit von analogen r eindeutigen Functionen $p_1, \ldots, p_r$, ferner ihre Fortsetzbarkeit für alle Wertsysteme der unabhängigen Variabeln, und die Eigenschaft der Functionen, dass sie im allgemeinen 2r-fach periodisch sind. Der analytische Charakter jener r eindeutigen Functionen p_α wird noch dadurch festgelegt, dass ihre Darstellbarkeit durch Quotienten von Potenzreihen erwiesen wird, die in beliebig grossem Bereich convergiren. Es gelingt aber Weierstrass auch noch, den Zusammenhang mit den Integralen über algebraische Functionen einer Variabeln zu erkennen. Führt man solche p_α ein, deren Glieder niedrigster Dimension bezw. u_α sind, und specialisirt nun die u dahin, dass die p_α rationale Functionen einer Variabeln, $g_\alpha(x)$, werden, wo $g_\alpha(0) = 0$ ist, so erhält man zwischen diesen, und einer $(r+1)$ten der Functionen, y, eine algebraische Gleichung $G(xy) = 0$*); und die Ausdrücke du_α/dx werden dann rationale Functionen von xy; für nicht specialisirte u aber ergiebt sich jedes u_α als eine Summe von Integralen $\sum_{\beta=1}^{r}\int^{x_\beta} R_\alpha(xy)\,dx$, die sich auf r Punkte

*) Wir lassen der kürzeren Darstellung wegen im Folgenden das Komma zwischen den Variabeln eines Paars weg.

von $G(xy) = 0$ erstreckt. Würde man umgekehrt von einer beliebigen algebraischen Gleichung $G(xy) = 0$ ausgehen, so wären für die R_α nicht beliebige rationale Functionen von xy zu wählen, sondern, wie erst das Abel'sche Theorem lehrt, solche, die auf Integrale erster Gattung führen. Die Schlüsse über Periodicität führen endlich auch auf die Θ-Function und die Ausdrücke jener r Functionen durch dieselbe. Dies bildet den Abschluss der Theorie.

Diese grossartig angelegte Theorie ist in den Weierstrass'schen Vorlesungen nur Entwurf geblieben, indem die Entwicklungen, besonders in den späteren Partien, nur angedeutet werden. Obwohl sie in den Gang der Theorie der algebraischen und Abel'schen Functionen, welcher den eigentlichen Gegenstand der Vorlesung bildet, nicht direct eingreift, haben wir sie hier doch erwähnen zu müssen geglaubt: einmal weil sich an ihr einige der analytischen Hülfsmittel der Functionen von mehreren Variabeln heranbildeten, welche auch weiterhin verwendet werden, und die in dem wiederholt citirten Aufsatze (4) zusammengestellt sind; sodann weil sie, das ältere und neuere Gedankengebiet von Weierstrass verbindend, nicht nur auf die treibenden Gedanken seiner Untersuchungen, sondern zugleich auf die grössten Erweiterungen hinweist, welche Weierstrass in dem Begriff und der Theorie der Abel'schen Transcendenten angestrebt hat; endlich, weil ihr Gang zeigt, dass Weierstrass auch bei der grössten Verallgemeinerung immer die Theorie der algebraischen Functionen und zum Teil auch die ihrer Integrale als erledigt voraussetzt.

Für den Begriff der algebraischen Function einer Variabeln selbst aber gebraucht Weierstrass als ursprüngliche Definition nicht das Functionselement und dessen analytische Fortsetzung; vielmehr ist die einzige bekannte Functionalgleichung allgemeiner Art, welche jene Definition ermöglicht, nichts anderes, als die endliche algebraische irreductible Gleichung

$$f(xy) = 0,$$

und diese wird, indem sie schon das ganze Wertgebiet der Variabeln x und der Function y für sich definirt, von Weierstrass seinen algebraischen Untersuchungen ausschliesslich zu Grunde gelegt.

Den Gegenstand der Untersuchung bilden die Eigenschaften der Gesamtheit der Wertsysteme xy („Wertepaare“), welche die Gleichung $f(xy) = 0$ befriedigen, — des „algebraischen Gebildes $f = 0$“. Dabei wird, wie schon in dem VI. Abschn. über die singulären Punkte, Nr. 7, berichtet wurde, dieses Gebilde in „Elemente“ zerlegt, wobei zu jeder „Stelle“ ein oder mehrere Elemente gehören. Erst für die transcendenten Anwendungen wird hinterher der Satz bewiesen, dass die sämtlichen zugehörigen „Functionselemente“ y von x sich auch in analytischer Fort-

setzung zu einer einzigen analytischen Function y von x zusammenschliessen (dass also das Gebilde „monogen“ ist). Obwohl zu diesem Beweise die Differentialeigenschaften von $f = 0$ genügt hätten, wird doch — abweichend von Puiseux, der auf directem Wege gezeigt hatte, dass man ohne Berührung einer für y kritischen Stelle x von jedem Wertsystem xy, wo $f(xy) = 0$ ist, zu jedem anderen übergehen kann — ein algebraischer Satz der Theorie benutzt, so dass die Functionseigenschaften bei Weierstrass in der That erst nach Behandlung der Eigenschaften des Gebildes $f = 0$ herangezogen werden (s. unten Nr. 16).

2. Was von functionentheoretischen Grundlagen für den algebraischen Teil benutzt wird, soll zunächst angegeben werden. Wie in Abschn. VI. Nr. 7 erwähnt ist, wird die Gesamtheit der Wertsysteme xy, welche die Gleichung $f(xy) = 0$ in der „Umgebung“ einer nicht-singulären Stelle ab befriedigen — d. h. für welche die absoluten Werte $|x - a|$, $|y - b|$ unter gewissen endlichen Grenzen bleiben —, durch ein Paar Potenzreihen $x = a + \mathfrak{P}(t)$, $y = b + \mathfrak{P}_1(t)$, wo $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ für $t = 0$ verschwinden (bezeichnet durch x_t^a, y_t^b), dargestellt [$\mathfrak{P}$ bedeutet hier und im Folgenden eine Reihe, die nach ganzen positiven Potenzen der Argumente aufsteigt, P eine Potenzreihe nach ganzen Potenzen überhaupt]. Die Berechtigung hierzu wird vermittelst des a. a. O. erwähnten „Vorbereitungssatzes“ nachgewiesen. Von hier aus wird auf dieselbe Eigenschaft für eine beliebig singuläre Stelle geschlossen, mit dem Unterschiede, dass in letzterem Falle eine endliche Zahl solcher Entwicklungen nötig werden kann. Eine Stelle $x = \infty$ macht hier, wie in der ganzen Theorie, keine Schwierigkeit, da es genügt, $x = 1/\xi$ zu setzen und $\xi = \mathfrak{P}(t)$ zu betrachten; ebenso, wenn $y = \infty$ wird. [Will man, statt x und y getrennt zu betrachten, von hier den Uebergang zur ternären projectiven Auffassung der Curve $f = 0$ machen, so genügt es, wenn $x = \infty$ ist, die lineare Substitution $x = 1/\xi$, $y = \eta/\xi$ auszuführen.] Der Convergenzbereich einer Entwicklung $y - b = \mathfrak{P}(x - a)^{1/\mathcal{A}}$ wird als Kreis mit dem Mittelpunkt a nachgewiesen, der mindestens bis zur nächsten singulären Stelle reicht; und hieraus folgt schon unmittelbar, dass das Gesamtgebiet der der Gleichung $f(xy) = 0$ genügenden Wertsysteme xy auf eine endliche Anzahl von Elementen des algebraischen Gebildes verteilt werden kann.

Functionentheoretische Grundlagen.

Vor allem aber sind es die Sätze über die Teilbarkeitsverhältnisse der Functionen von mehreren Variabeln, welche für eine Theorie, die sich wesentlich auf Grund der Entwicklungen von rationalen Functionen von mehreren Variabeln aufbaut, von entscheidender Bedeutung sind, und deren strenge Erledigung man auch erst Weierstrass (4), § 5 verdankt. Für

eine ganze rationale Function F von $n+1$ Variabeln $x, x_1, \ldots, x_n$ hat man den Satz, dass sie durch eine zweite solche, G, die irreductibel ist, dann teilbar ist, wenn $F=0$, $G=0$ für alle Werte von $x_1, \ldots, x_n$, die in der Umgebung einer Stelle $(a_1, \ldots, a_n)$ liegen, eine Wurzel x gemeinsam haben. Von den aus dem „Vorbereitungssatz“ abgeleiteten Sätzen wird besonders der folgende benutzt: Wenn die Potenzreihen $F(x_1, \ldots, x_n)$, $G(x_1, \ldots, x_n)$, ohne $x_1, x_2, \ldots$ oder x_n zu Factoren zu haben, für $x_1=0$, $\ldots\, x_n=0$ beide verschwinden, und der Quotient F/G mit abnehmenden $x_1, \ldots, x_n$ sich einer bestimmten endlichen Grenze nähert — oder auch: wenn es nicht unendlich viele Wertsysteme in der Umgebung von $x_1=0$, $\ldots, x_n=0$ giebt, für die F/G unendlich wird —, so ist dieser Quotient selbst in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x_1, \ldots, x_n)$ entwickelbar.

Sätze der letzteren Art werden angewendet, wenn es sich um das Verhalten einer rationalen Function $R(xy; x'y')$ von zwei Stellen xy, $x'y'$ handelt, die beide der Gleichung $f(xy)=0$ genügen, und welche beide in die Nähe derselben Stelle ab von $f=0$ rücken sollen. Das Verfahren, dessen sich Weierstrass hierbei bedient, ist das folgende:

Sei $x_t^a\, y_t^b$ ein Functionselement mit dem „Mittelpunkt“ ab (das sich für $t=0$ auf ab reducirt); so werden in $R(xy; x'y')$ xy durch $x_t^a\, y_t^b$, x', y' durch $x_\tau^a\, y_\tau^b$ ersetzt, wobei $x_\tau^a\, y_\tau^b$ sich von $x_t^a\, y_t^b$ nur durch die Bezeichnung τ statt t unterscheiden. Das Ergebnis, ein Quotient zweier Potenzreihen von t und τ, wird dann nach den eben erwähnten Principien (vgl. unten Nr. 8 ff.) untersucht. — Das hieraus zu erschliessende Verhalten von R wird in keiner Weise geändert, wenn man die für ein Functionselement immer erlaubte Substitution $t = s\mathfrak{P}(s)$ macht, wo $\mathfrak{P}(s)$ mit einem nicht verschwindenden Gliede beginnt, sofern man nur ebendieselbe Substitution gleichzeitig auf τ anwendet.

Ausser diesen Sätzen spielt eine wichtige Rolle der auf die gewöhnliche Partialbruchzerlegung gegründete Cauchy'sche Residuensatz, nach welchem, in der Weierstrass'schen Ausdrucksweise, die Summe der Coefficienten der (-1)ten Potenz von τ in den Entwicklungen des rationalen Ausdrucks $R(x'y').dx'/d\tau$ an denjenigen Stellen des Gebildes $f(x'y')=0$, wo derselbe unendlich wird, verschwindet.

Für den transcendenten Teil der Theorie kommen noch die folgenden Sätze aus der Functionentheorie in Betracht:

Wenn zwei Grössen x und y derartig einander zugeordnet sind, dass 1) zu jedem x n verschiedene y gehören, eine endliche Zahl von singulären Werten von x ausgeschlossen; 2) in der Umgebung eines nichtsingulären Wertes $x=a$ die n Werte von y sich als $\mathfrak{P}(x-a)$ darstellen;

3) in der Umgebung eines singulären Wertes $x = a$ die zugehörigen Werte von y sich durch eine endliche Zahl von Potenzreihen $P(x-a)^{1/\mu}$ darstellen, welche negative Potenzen nur in endlicher Zahl enthalten, so ist y Wurzel einer algebraischen Gleichung $n$ten Grades in y, deren Coefficienten rationale Functionen von x sind.

Wenn z eine eindeutige Function der Stelle xy des algebraischen irreductibeln Gebildes $f(xy) = 0$ ist, derart, dass für ein beliebiges Element $x_t y_t$ eine Entwicklung $z = P(t)$ existirt, die convergirt und negative Potenzen nur in endlicher Zahl enthält, so ist z eine rationale Function von xy. (Beweis aus der interpolatorischen Darstellung von z abzuleiten.)

Wenn das Integral $u = \int F(xy)dx$, wo $F(xy)$ eine rationale Function der Stelle xy des irreductibeln algebraischen Gebildes $f(xy) = 0$ ist, selbst algebraisch ist, so ist es eine rationale Function von xy. — Der Beweis dieses Abel-Liouville'schen Satzes ist bei Weierstrass mit dem von Stickelberger, J. f. Math. 82, angegebenen identisch.

Wir wenden uns nun zu Weierstrass' algebraischer Theorie.

Transformation des Gebildes mittelst rationaler Functionen.

3. Eine rationale Function $\eta = R(xy)$ der Variabeln x, y, zwischen denen die irreductible Gleichung $f(xy) = 0$ besteht, genügt einer Gleichung $F(x\eta) = 0$, deren Coefficienten rationale ganze Functionen von x sind: in η von demselben Grade n, wie f in y, in x vom Grade K, wenn K den „Grad" der Function η, d. h. (s. VI, 8) die Anzahl der Stellen von $f = 0$ bezeichnet, in denen η irgend einen gegebenen Wert je in erster Ordnung annimmt. Weierstrass beweist hierbei streng den von Riemann ausgesprochenen Satz, dass F von der Form $G^{\nu}(x, \eta)$ wird, wo G irreductibel, ν ein Teiler von n ist, und zeigt, dass man den Fall $\nu > 1$ auf $\nu = 1$ mittelst einer vorgängigen linearen Transformation von x, y zurückführen kann.

Nach Einführung der einen rationalen Function η wird eine zweite solche, ξ, verwendet, um die eindeutige Transformation des Gebildes $f(xy) = 0$ in ein solches $F(\xi\eta) = 0$ durchzuführen. Wenn ξ, η die Eigenschaft haben, immer in Gruppen von r für ξ und η gleichen Stellen von $f = 0$ gegebene Werte anzunehmen, wird F die $r$te Potenz einer irreductibeln Form. Wie Riemann stützt Weierstrass auf diese Transformationen den Begriff einer „Klasse" (bei Weierstrass „Geschlecht") von algebraischen Gebilden, spricht (wie Brill-Noether, Abschnitt V, E, Nr. 60 ff.) von der Aufgabe, die Invarianten gegenüber den rationalen Transformationen — und zwar sowohl die der Gleichung $f = 0$ wie die der Form f, d. h. die absoluten und nicht-absoluten Invarianten — festzustellen, zu welchen er durch Reduction von $f = 0$ auf eine Normalform der Klasse, mit einem Minimum von Constanten — den Moduln — zu gelangen gedenkt. Was

aber die Ausführung betrifft, so findet sich nur in dem Hefte von 1873/4 eine eingehende Discussion der Fälle $\rho = p = 1, 2, 3$, über die unten Nr. 16 berichtet wird. Der Verzicht auf ein Verfolgen dieser Richtung erklärt sich vielleicht aus einer gewissen Abneigung gegenüber der gewöhnlichen Eliminationstheorie für rationale Formen.

Die Elimination ersetzt Weierstrass überhaupt durch Productbildung aus den auf die einzelnen Wurzeln sich beziehenden Factoren, wie in der Theorie der singulären Punkte, so in der der rationalen Transformation. So kommt z. B. die Gleichung $f(xy) = M . G(x\eta)$, welche das gegebene Gebilde mit dem durch $y = R_1(x\eta)$ transformirten verbindet, und die zu Betrachtungen über die Bedeutung des Factors M Anlass giebt, bei Weierstrass gar nicht vor, sondern wird durch die umgekehrte Gleichung $\Pi(\eta - R(xy_i)) = G(x, \eta)/G_0(x)$ ersetzt; noch weniger die von Clebsch-Gordan discutirte Schlussgleichung $f(xy) = M . F(\xi\eta)$. Ueberhaupt gehören identische Umformungen, mit denen Andere erfolgreich operirt haben, nicht zu Weierstrass' Hülfsmitteln: Weierstrass construirt seine Resultate mehr der Form nach, als dass er sie herausrechnet.

Die Vorlesung von 1869: Die allgemeinsten ganzen algebraischen Functionen.

4. Den Kernpunkt aller algebraischen Theorien bildet die Frage der Herstellung der allgemeinsten rationalen Function $R(xy)$ der Variabeln x, y, welche an gegebenen Stellen des Gebildes $f(xy) = 0$ in gegebenen Ordnungen unendlich wird. Hinsichtlich der Erledigung dieser Aufgabe weichen bei Weierstrass die späteren Vorlesungen von der von 1869 ab: wir berichten zunächst über diese, mit Beziehung auf das in Abschnitt VI Nr. 4 und 5 darüber bereits Mitgeteilte.

Im Anschluss an Kronecker sucht Weierstrass zuerst die allgemeinste ganze algebraische Function von x, $\mathfrak{G}(x)$, und zwar in der Kronecker'schen Form, welche zugleich auf die Anzahl dieser Functionen schliessen lässt. Diese hat die Gestalt 2) in VI. 4:

$$\mathfrak{G}(x) = B_0(x) + B_1(x)\, G_1(xy) + \cdots + B_{n-1}(x)\, G_{n-1}(xy),$$

wo die B ganze rationale Functionen von x sind, und die Grössen $G_0 (= 1)$, $G_1(xy), \ldots, G_{n-1}(xy)$ ein „Fundamentalsystem" von n ganzen algebraischen Functionen von x bilden. Die G_μ sind dabei aus Ausdrücken hergeleitet, welche gewisse Nenner N_μ haben, die Factoren des ausserwesentlichen Teilers $D_2(x) = N_1(x) \ldots N_{n-1}(x)$ der Discriminante $D(x) = \Delta(x) D_2^2(x)$ von y sind (s. VI, 4), bezüglich deren aber, ebenso wie bezüglich der G_μ, bei Kronecker nur die Existenz, nicht die Bildung, nachgewiesen ist. Durch Division der B mit diesen Nennern wird dann jede $\mathfrak{G}(x)$ auf die Form gebracht:

$$1)\qquad \mathfrak{G}(x) = h_0(x) + h_1(x)G_1(xy) + \cdots + h_{n-1}(x)G_{n-1}(xy)$$
$$+ g_0(x) + g_1(x)\ f_1(xy) + \cdots + g_{n-1}(x)\ f_{n-1}(xy),$$

wobei die h und g ganze Functionen von x sind, die h_μ von niedrigerem Grade als die entsprechenden X_μ, und wo die ganzen algebraischen Functionen $f_\mu(xy)$ von x aus

$$f(xy) \equiv f_0(x)y^n + f_1(x)y^{n-1} + \cdots + f_n(x),$$
$$f_1(xy) = f_0 y + f_1;\ f_2(xy) = f_0 y^2 + f_1 y + f_2;\ \ldots\ldots;$$
$$f_{n-1}(xy) = f_0 y^{n-1} + f_1 y^{n-2} + \cdots + f_{n-1}$$

definirt sind. Diese letzteren Functionen entstehen bekanntlich, indem man den Ausdruck:

$$2)\qquad \frac{f(xz) - f(xy)}{z - y} = f_0(x).z^{n-1} + f_1(xy).z^{n-2} + \cdots + f_{n-1}(xy)$$
$$f(xyz) = f(xzy)$$

bildet, also diejenige Form in z, welche, gleich 0 gesetzt, bei gegebenen x und $f(xy) = 0$, mit $f(xz) = 0$ die von $z = y$ verschiedenen Wurzeln z gemein hat.

Die letztere Form von $\mathfrak{G}(x)$ liefert unmittelbar die Anzahl aller willkürlichen Constanten. Die Zahl der in der ersten Zeile von $\mathfrak{G}(x)$ enthaltenen wird $r = \Sigma n_\mu$, wenn n_μ der Grad von X_μ ist; also gleich dem Grad r des ausserwesentlichen Factors $D_2(x)$ der Discriminante von y, d. h. $r = m(n-1) - \frac{1}{2}\omega$, wenn $f(xy)$ in x auf den mten, in y auf den nten Grad steigt und ω der Grad des wesentlichen Teilers $\Delta(x)$ ist. Alle Functionen der zweiten Zeile von 1) sind rationale ganze Functionen von x y, also „nicht-adjungirte" Functionen, aus welchen man die allgemeinsten $\mathfrak{G}(x)$ erst durch Zufügen von beliebigen linearen Verbindungen aus den r unabhängigen „adjungirten" Functionen der ersten Zeile erhält. Die Zahl r stimmt mit der Zahl r der im allgemeinen bestehenden Bedingungen überein, durch die eine im Endlichen „adjungirte" Function zu einer nicht-adjungirten specialisirt wird (s. IV. Nr. 14; V. Nr. 55).

5. Der nun bekannte Ausdruck für die allgemeinsten ganzen algebraischen Functionen von x wird von Weierstrass zur Herstellung der allgemeinsten in vorgeschriebener Weise unendlich werdenden Functionen verwendet.

Ableitung der übrigen aus den ganzen Functionen.

Wenn $x'y'$ eine nicht-singuläre Stelle des Gebildes $f(xy) = 0$ ist, an der $\left(\frac{\partial f(xy)}{\partial y}\right)_{x'y'} = f'(x'y')_2 \neq 0$ ist, so stellt

$$3)\ f(xy;x'y') = \frac{1}{x'-x}\{f_0(xy)y'^{n-1} + f_1(xy)y'^{n-2} + \cdots + f_{n-1}(xy)\},$$
$$[f_0(xy) = f_0(x')],$$

eine Function von xy vor, welche, ausser im Unendlichen, nur für $x = x'$, $y = y'$ unendlich wird, und zwar wie $f'(x'y')_2/(x-x')$. Jede höchstens in $x_0 y_0, x_1 y_1, \ldots, x_\varkappa y_\varkappa$ zu ∞^1 werdende Function muss sich daher in die Form

$$4) \qquad R(xy) = \sum_{\lambda=0}^{\varkappa} c_\lambda f(xy;\ x_\lambda y_\lambda) + \mathfrak{G}(x)$$

setzen lassen, wobei aber in $\mathfrak{G}(x)$ alle $g_\mu(x)$ der zweiten Zeile von 1), Nr. 4 verschwinden müssen, ausser $g_0(x)$, das sich auf eine Constante c reducirt. Die Forderung, dass dieser Ausdruck in $x = \infty$ nicht unendlich wird, ergiebt — indem man ausdrückt, dass die $n-1$ Functionen $C_1(x), \ldots, C_{n-1}(x)$ in der Anordnung

$$R(xy) - c = \sum_{i=0}^{n-1} C_i f_i(xy),$$

mit x^m multiplicirt, für $x = \infty$ endlich bleiben — ein System von $(m-1)(n-1)$ homogenen linearen Bedingungsgleichungen für die $\varkappa+1+r$ Constanten $c_0, c_1, \ldots, c_\varkappa, c_{\varkappa+1}, \ldots, c_{\varkappa+r}$ (von denen die r letzteren in $\mathfrak{G}(x)$ vorkommen). Setzt man

$$\frac{\omega}{2} - (n-1) = \rho\ [\equiv p], \text{ also auch } \rho = (m-1)(n-1) - r,$$

so existiren also die gesuchten Functionen sicher, wenn $\varkappa+1 > \rho$; und zwar wird R in allen $\varkappa+1$ Stellen wirklich ∞^1, wenn zwischen den $\varkappa+1$ Wertsystemen $x_\lambda y_\lambda$ nicht gewisse Relationen stattfinden. Im Falle $\varkappa = \rho$ existirt dann, von einer additiven und multiplicativen Constanten abgesehen, nur eine solche Function; für $\varkappa < \rho$ keine.

Aber auch der Charakter der Ausnahmefälle lässt sich durch genauere Discussion der $(m-1)(n-1)$ Gleichungen zwischen den c erkennen. Sie liefern für $\varkappa = \rho$:

$$5) \quad c_0 : c_1 : \ldots : c_\rho : c_{\rho+1} : \ldots : c_{\rho+r} = -D_0 : D_1 : \ldots : D_\rho : D_{\rho+1} : \ldots : D_{\rho+r},$$

wo D_0 nur die Wertsysteme $x_1 y_1, \ldots, x_\rho y_\rho$ enthält und in allen x_λ vom Grade $m-2$, in den y_λ vom Grade $n-2$ ist; wo ferner D_λ eine Determinante ist, die aus D_0 durch Vertauschung von $x_\lambda y_\lambda$ mit $x_0 y_0$ entsteht ($\lambda = 1, \ldots, \rho$), ebenso $D_{\rho+\mu}$ aus D_0 durch Ersetzen einer anderen Colonne durch die erste, $x_0 y_0$ enthaltende. Nach dem geometrischen Sprachgebrauche drückt $D_0 = 0$ die Bedingung dafür aus, dass $x_1 y_1, \ldots, x_\rho y_\rho$ auf einer zu f adjungirten Curve φ liegen. $D_{\rho+\mu} = 0$ sagt, im Falle dass $f = 0$ r endliche Doppelpunkte $a_1' b_1', \ldots, a_r' b_r'$ hat, aus: dass $x_0 y_0, \ldots, x_\rho y_\rho$ auf einer Curve, von der Ordnung der φ, liegen, welche in allen Punkten $a' b'$, ausgenommen $a_\mu' b_\mu'$, zu f adjungirt ist.

In der That lassen sich in diesem Falle die r Zusatzglieder in dem Teil $\mathfrak{G}(x)$ der Function $R(xy)$ in die Form

$$6)\qquad \sum_{\mu=1}^{r} c_{\varrho+\mu} f(xy;\ a'_\mu b'_\mu)$$

setzen, wo f endlich ist für $x = a_\mu$, $y = b'_\mu$. Die Bedingungsgleichungen werden dann:

$$7)\qquad \sum_{\lambda=0}^{\varrho} c_\lambda x_\lambda^{\alpha-1} y_\lambda^{n-\beta-1} + \sum_{\mu=1}^{r} c_{\varrho+\mu} a'^{\alpha-1}_\mu b'^{n-\beta-1}_\mu = 0$$
$$\begin{pmatrix} \alpha = 1, \ldots, m-1 \\ \beta = 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}.$$

Die hier von Weierstrass angenommene invariante Auffassung einer zum Gebilde $f(xy) = 0$ gehörigen Zahl ρ, welche er den Rang des Gebildes (das Riemann'sche „Geschlecht" p) nennt, ist die: dass, bei $\varkappa + 1$ willkürlich angenommenen Wertsystemen des Gebildes, Functionen, welche darin je zu ∞^1 werden sollen, für $\varkappa \geqq \rho$ existiren, nicht aber für $\varkappa < \rho$.

Die weiter zu bildenden Functionen $R(xy)$, welche höchstens für $\rho + \mu$ Wertsysteme $x_1 y_1, \ldots, x_{\varrho+\mu} y_{\varrho+\mu}$ zu ∞^1, für μ weitere zu 0 werden, setzt Weierstrass aus den vorher für $\mu = 1$ gebildeten zusammen, indem er ρ festgewählte Wertsysteme $a_1 b_1, \ldots, a_\varrho b_\varrho$, für welche $D_0 \neq 0$ ist, d. h., welche selbst nicht die ∞^1-Stellen einer Function sind, zu Hülfe nimmt. Man bildet erst die $\rho + \mu$ Functionen

$$H(xy;\ x_\lambda y_\lambda),\ (\lambda = 1, \ldots, \rho + \mu),$$

welche je in $a_1 b_1, \ldots, a_\varrho b_\varrho, x_\lambda y_\lambda$ zu ∞^1 werden sollen und es in $x_\lambda y_\lambda$ bei jeder Lage dieser Stelle auch wirklich werden; und hieraus

$$8)\qquad R(xy) - c = \Sigma_\lambda c_\lambda H(xy;\ x_\lambda y_\lambda).$$

Für jedes der ρ Systeme ab, wo R endlich bleiben soll, und für jeden der μ Nullpunkte von R erhält man eine Bedingungsgleichung in den c; und die ersteren ρ Gleichungen liefern zwischen den $2(\rho + \mu)$ Wertepaaren, der $\rho + \mu$ Unendlichkeits- und $\rho + \mu$ Nullstellen von $R(xy)$ ρ algebraische Relationen, welche von der Natur von R unabhängig sind.

Die in vorgeschriebener Weise unendlich werdenden Functionen $f(xy;\ x'y')$, $G_1, \ldots, G_{n-1}$ (s. Nr. 4), oder besser $H(xy;\ x_\lambda y_\lambda)$, ersetzen hinsichtlich der Zusammensetzung aller algebraischen Functionen, wenigstens derjenigen, die überall nur in erster Ordnung unendlich werden, die Riemann'sche Summe von Integralen zweiter und erster Gattung. Während die ρ Bedingungsgleichungen für die algebraischen Functionen bei Riemann aus dem Verschwinden aller Periodicitätsmoduln gefolgert werden, ergeben sie sich bei Weierstrass aus dem Verhalten in den ρ will-

kürlich angenommenen Stellen ab. Obwohl jede einzelne Gleichung von je einer dieser ρ Stellen abhängig ist, werden gewisse ρ lineare Combinationen derselben von den ab unabhängig und drücken (indem man zugleich $\varkappa < \rho$ nicht ausschliesst) nichts anderes aus. als die Bedingungen des Riemann-Roch'schen Satzes:

$$9) \qquad \sum_{\lambda=1}^{\varkappa+1} c_\lambda \, \mathrm{H}(x_\lambda y_\lambda)_\alpha = 0$$

$$\left(\alpha = 1, \ldots, \rho; \text{ wo } \mathrm{H}(x'y')_\alpha \text{ das Riemann'sche } \frac{\varphi_\alpha(x'y')}{f'(x'y')_2} \text{ ist}\right),$$

die indessen in Weierstrass' Vorlesungen nicht eingehender, als bereits erwähnt ist, discutirt werden. Netto entwickelt aus diesen Relationen für $\varkappa < \rho$ umgekehrt den von Riemann ausgesprochenen Satz, dass die betreffenden Functionen (die also in einer „Specialgruppe" unendlich werden) sich als Quotienten zweier Formen $\mathrm{H}(xy)_\alpha$ (oder φ) darstellen lassen, und leitet daraus auch die Riemann'sche Minimalzahl $\frac{1}{2}(\rho+2)$ der Punkte ab, in denen, bei nicht speciellen Moduln des Gebildes, eine Function zu ∞^1 werden kann.

Methode der späteren Vorlesungen.

6. Die späteren Vorlesungen weichen von denen von 1869 darin ab, dass sie die Theorie der ganzen algebraischen Functionen nicht mehr voraussetzen. Statt dessen wird zuerst die analoge Aufgabe behandelt: alle algebraischen Functionen aufzustellen, welche in den $n(m-1)$ festen Stellen $a_i b_i^{(\nu)}$ ($i = 1, 2, \ldots, m-1$; $\nu = 1, 2 \ldots, n$) höchstens zu ∞^1 werden, während sie für $x = \infty$ endlich bleiben sollen. Die Durchführung stimmt insoweit mit der früheren überein, als zu $m-1$ unmittelbar angebbaren (aber nicht-adjungirten) solchen Functionen die Existenz von r Zusatzgliedern (adjungirten Ausdrücken) nachgewiesen wird, aus welchen $r+m-1$ Ausdrücken alle jene Functionen sich zusammensetzen müssen. Eine wirkliche explicite Darstellung dieser r Glieder wird nicht gegeben, so wenig wie es hinsichtlich der G in 1) Nr. 4 der Fall war; wohl aber eine solche von $R \geqq r$ Gliedern, die sich auf die singulären Stellen von $f(xy) = 0$ beziehen (eine Erweiterung der Glieder von 4), Nr. 5), und welche in jedem einzelnen Falle auf ihre unabhängigen linearen Combinationen zurückgeführt werden können. Die Anzahl r dieser Combinationen bleibt aber bei dieser Entwicklung im allgemeinen Falle zunächst unbestimmt, während die Zahl ρ, mit der invarianten Definition, wie in Nr. 5 angegeben, eingeführt, mit r in die dort angegebene Beziehung $\rho = (m-1)(n-1) - r$ tritt. Erst nachträglich und indirect stellt sich dieses r als der Grad des ausserwesentlichen Factors D_2 der Discriminante von y heraus. Dieser Umstand, welcher die Theorie weniger übersichtlich

macht, als es bei der von 1869 der Fall war, hängt damit zusammen, dass Weierstrass seiner ganzen Untersuchung eine Gleichung $f(xy) = 0$ zu Grunde legt, für welche er noch beliebige Singularitäten zulässt, während er doch von den die Singularitäten auflösenden Transformationen von $f = 0$ nicht Gebrauch machen kann, weil sich dadurch m, n, r und alle einzelnen von ihm betrachteten Functionen, welche durchaus an die specielle Gestalt von $f = 0$ geknüpft sind, ändern.

An Stelle des aufgegebenen Beweisapparats der Theorie der ganzen algebraischen Functionen, insbesondere der Basisdeterminanten- und Discriminantenuntersuchung, führt nun Weierstrass neue Beweismittel in die Theorie ein. Der Hauptgedanke ist der, dass er Ausdrücke wie $f(xy; x'y')$ oder $H(xy; x'y')$ nicht nur als rationale Functionen von xy, sondern auch in ihrer Abhängigkeit von $x'y'$, welche von ganz anderer Art ist als die von xy, betrachtet. Als Ausdrücke in $x'y'$ traten dieselben, multiplicirt mit $dx'/dt : f'(x'y')_2$, schon in der früheren Vorlesung als Integranden auf; hier aber wird diese Abhängigkeit zur Aufstellung jener auf die singulären Stellen bezüglichen Zusatzglieder benutzt, und zum Beweis ihrer Vollständigkeit kann nun der Cauchy'sche Residuensatz herangezogen werden. Die Zurückführung der übrigen Functionen auf jene speciellen geschicht wieder so, wie in Nr. 5 berichtet ist.

7. Wir beginnen mit der neuen Definition der Zahl ρ. *Definition von ρ.*

Weierstrass beweist die Existenz einer Zahl, welche der in Nr. 5 mitgeteilten Definition von ρ entspricht, auf folgende Weise: Hat man $\varkappa$ feste Stellen $a_1 b_1, \ldots, a_\varkappa b_\varkappa$, derart, dass es eine Function $\tilde{\mathfrak{F}}$ giebt, die in $x'y'$ zu ∞^1 und sonst nur in den von $x'y'$ unabhängigen $\varkappa$ Stellen zu höchstens ∞^1 wird, so kann man, wenn es $\varkappa - \rho$ linear unabhängige Functionen $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_{\varkappa-\rho}$ giebt, die nur in den $\varkappa$ Stellen zu höchstens ∞^1 werden, in $\tilde{\mathfrak{F}}(xy; x'y') = \tilde{\mathfrak{F}} - l_1 \mathfrak{G}_1 - \cdots - l_{\varkappa-\rho} \mathfrak{G}_{\varkappa-\rho}$ eine Function bilden, welche nur in $x'y'$ und höchstens ρ der $\varkappa$ Stellen zu ∞^1 wird, während in diesen ρ Stellen allein keine Function zu ∞^1 wird. Die so gefundene Zahl ρ ändert sich aber bei Aenderung der Stellen ab und ihrer Anzahl $\varkappa$ nicht; denn die Function $\sum_{\lambda=1}^{\rho'} c_h \tilde{\mathfrak{F}}(xy; a'_\lambda b'_\lambda)$ lässt sich für $\rho' > \rho$ stets so bestimmen, dass sie nur an Stellen, die unter $a'_1 b'_1, \ldots, a'_{\rho'} b'_{\rho'}$ enthalten sind, zu ∞^1 wird. ρ ist hiernach definirt durch die Anzahl der Stellen $a_i b_i$, für welche keine Function existirt, die in den $a_i b_i$ allein zu ∞^1 wird, wohl aber eine solche, die in den $a_i b_i$ und einer von diesen unabhängigen Stelle $x'y'$ zu ∞^1 wird.

Die specielle, nicht adjungirte, Function, von der Weierstrass hier

ausgeht, und die der Function $f(xy; x'y')$ von Nr. 5 analog gebildet ist, ist die folgende:

$$F(xy; x'y') = \frac{f(xyy') . \Pi(x')}{(x'-x) . \Pi(x)}$$

[für die Definition von $f(xyy')$ s. Nr. 4], oder die wenig abweichende:

$$\overline{F}(xy; x'y') = F(xy; x'y') + y'^{n-1} \frac{f_0(x')\Pi(x) - f_0(x)\Pi(x')}{(x'-x)\Pi(x)};$$

$$[\text{wo } \Pi(x) = (x-a_1) \ldots (x-a_{m-1})];$$

also eine Function von xy, die für $x=\infty$ nicht mehr unendlich wird, sondern nur noch ∞^1 in $x'y'$, und ebenso an Stellen, die unter den $n(m-1)$ Stellen $a_i b_i^{(\nu)}$ $(i = 1, \ldots, m-1; \nu = 1, \ldots, n)$ enthalten sind. Hierbei ist $\rho \leqq n(m-1)-(m-1) = (n-1)(m-1)$, da man sogleich $m-1$ unabhängige (nicht-adjungirte) Functionen angeben kann, welche nur an den Stellen $a_i b_i^{(\nu)}$ zu höchstens ∞^1 werden, nämlich

$$\frac{c_1}{x-a_1} + \frac{c_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{c_{m-1}}{x-a_{m-1}} = \frac{g(x)}{\Pi(x)},$$

wo $g(x)$ höchstens auf den $(m-2)$ten Grad in x steigt.

Es handelt sich nun um die allgemeinsten Zusatzglieder für die Functionen, die nur in den $a_i b_i^{(\nu)}$ zu ∞^1 werden sollen. Während in den Vorlesungen bis zur Mitte der 70er Jahre nur diejenigen Eigenschaften derselben und ihrer Summen angegeben werden, welche zur Aufstellung der Integranden der verschiedenen Gattungen notwendig sind, enthalten die weiteren Vorlesungen eine eingehendere Discussion der Gestalt jener Glieder, welche wir (nach dem Hölder'schen Hefte) zunächst besprechen wollen.

Gesamtheit der in den $a_i b_i^{(\nu)}$ zu ∞^1 werdenden Functionen, aus den Integranden-Entwicklungen abgeleitet.

8. Weierstrass betrachtet hier — unter der Annahme (die nachträglich leicht wieder fallen gelassen werden kann), dass $f(xy) = 0$ vorher durch lineare Transformation auf die „Normalform" gebracht sei, in welcher zu $x = \infty$ n endliche von einander verschiedene Werte y, und zu $y = \infty$ m endliche, verschiedene x gehören — die Entwicklungen des Ausdrucks

$$\frac{\overline{F}(xy; x'y')}{f'(x'y')_2} \frac{dx'}{d\tau},$$

wenn man für $xy; x'y'$ verschiedene Elemente $x_t y_t; x'_\tau y'_\tau$ einsetzt. Eine fundamentale Eigenschaft dieser Entwicklungen nach t, τ (die schon für

$$\frac{f(xyy')}{(x'-x)f'(x'y')_2} \frac{dx'}{d\tau}$$

besteht) ist die, das für zwei verschiedene „Mittelpunkte" xy und $x'y'$:

$$\frac{\overline{F}(x_t y_t; x'_\tau y'_\tau)}{f'(x'_\tau y'_\tau)_2} \frac{dx'_\tau}{d\tau} = P(t, \tau),$$

gesetzt werden kann, für denselben Mittelpunkt $x^0 y^0$ aber, wenn $x^0_\tau y^0_\tau$ aus $x^0_t y^0_t$ durch Vertauschung von t mit τ hervorgeht:

$$\frac{\overline{F}(x^0_t y^0_t; x^0_\tau y^0_\tau)}{f'(x^0_\tau y^0_\tau)_2} \frac{dx^0_\tau}{d\tau} = \frac{1}{\tau - t} + P'(t, \tau),$$

wo P und P' Potenzreihen sind, in welchen negative Potenzen von t und τ nur in endlicher Anzahl vorkommen.

Daraus gehen nun die von Weierstrass benutzten Functionen hervor. Die Entwicklung von $\frac{\overline{F}(xy; x'_\tau y'_\tau)}{f'(x'_\tau y'_\tau)_2} \cdot \frac{dx'_\tau}{d\tau}$ nach Potenzen von τ giebt als Coefficienten von τ^μ ($\mu \geqq 0$) eine Function: $-F(xy; x'y')_\mu$ von x, y, welche für $xy = x'y'$ in der $(\mu+1)$ten Ordnung unendlich wird (wie $-t^{-\mu-1}$ für $xy = (x'y')_t$) und ausserdem nur zu ∞^1 an Stellen $a_i b_i^{(r)}$. Solange $x'y'$ von einer singulären Stelle von $f = 0$ verschieden ist, enthält wenigstens die Entwicklung von

$$\frac{(\overline{F}(xy; x'_\tau y'_\tau) - \overline{F}(x_0 y_0; x'_\tau y'_\tau))}{f'(x'_\tau y'_\tau)_2} \frac{dx'_\tau}{d\tau}$$

nach τ, wenn $x'y'$ von xy und $x_0 y_0$ verschieden, und $x_0 y_0$ eine nicht-singuläre Stelle ist, nur positive Potenzen von τ (analog einem Ausdruck $\frac{G(\overset{m-2}{x'} \overset{n-2}{y'})}{f'(x'y')_2} \frac{dx'}{d\tau}$); an einer singulären Stelle $x'y' = a'b'$ aber ergiebt die Entwicklung von $\frac{\overline{F}(xy; x^{a'}_\tau y^{b'}_\tau)}{f'(x^{a'}_\tau y^{b'}_\tau)_2} \cdot \frac{dx^{a'}_\tau}{d\tau}$ negative Potenzen von τ in endlicher Zahl. In den Coefficienten von $\tau^{-\mu}$ ($\mu = 1, 2, \ldots$) ergiebt sich so eine Reihe von Functionen $F(xy; a'b')_{-\mu}$ von xy, welche, da auch die Entwicklung von $1/(\tau - t)$ keine negativen Potenzen von τ liefert, an der singulären Stelle $a'b'$ nicht mehr unendlich werden, dagegen zu ∞^1 an Stellen $a_i b_i^{(r)}$. Diese Functionen, gebildet für alle singulären Stellen des Gebildes, werden also nur an den Stellen $a_i b_i^{(r)}$ zu ∞^1. Dass sie, mit der obigen rationalen Function $g(x)/\Pi(x)$ von x linear verbunden, auch die Gesamtheit aller in diesen $n(m-1)$ Stellen zu ∞^1 werdenden Functionen von xy liefern, wird nun mit Hülfe des Residuensatzes bewiesen.

Sei nämlich $R(xy)$ eine solche Function; so ergiebt dieser Satz, auf

$$R(x'y') \cdot \frac{F(xy; x'y') - F(x_0 y_0; x'y')}{f'(x'y')_2} \frac{dx'}{d\tau}$$

angewendet, wobei die Stellen $x'y' = xy$, $x_0 y_0$, ferner die singulären Stellen von $f = 0$ und endlich die $a_i b_i^{(\nu)}$ Beiträge liefern, die Beziehung:

$$0 = R(xy) - R(x_0 y_0) - \sum_{\mu, \varkappa} R_\varkappa^{(\mu-1)} F(xy; a'_\varkappa b'_\varkappa)_{-\mu} - c - \frac{g(x)}{\Pi(x)},$$

wo die $\sum_{\mu, \varkappa}$ über alle singulären Stellen $a'_\varkappa b'_\varkappa$ und diejenigen Werte von μ auszudehnen ist, welche bezw. bei $a'_\varkappa b'_\varkappa$ zu einer Function $F(xy; a'_\varkappa b'_\varkappa)_{-\mu}$ Veranlassung geben, und wo $R_\varkappa^{(\mu-1)}$ der Coefficient von $\tau^{\mu-1}$ in $R(x_\tau^{a'\varkappa} y_\tau^{b'\varkappa})$ ist.

Die Function $R(xy)$ setzt sich hierbei, wenn die $\sum_{\mu, \varkappa}$ r' Glieder enthält, aus $r' + m - 1$ Gliedern zusammen (von der additiven Constanten abgesehen), welche aber noch, wenn zwischen ihnen $r' - r$ lineare Relationen bestehen, auf ihre geringste Anzahl $r + m - 1$ linear-unabhängiger Glieder zu reduciren sind, wobei, nach dem am Anfange von Nr. 7 Gesagten, $r + m - 1 = (m-1)n - \rho$, oder $\rho = (m-1)(n-1) - r$ ist.

Reduction auf die Function von Nr. 5.

9. Weierstrass führt die Discussion dieses Systems von $r' - r$ Identitäten insoweit durch, dass er an Stelle der von den Punkten $a_i b_i^{(\nu)}$ abhängigen $r' + m - 1$ Glieder, unter Zurückgreifen auf die alte, in Nr. 5 bezeichnete Function $f(xy; x'y')$, ebenso viele davon unabhängige einführt. Da die Formeln dann einfach werden und auch weiterhin (s. Nr. 13) zu einem wichtigen Schlusse dienen, so wollen wir sie besprechen. Es wird:

$$F(xy; x'y') = f(xy; x'y') + \frac{\Pi(x') - \Pi(x)}{\Pi(x) \cdot (x' - x)} \sum_{\beta=0}^{n-2} f_{n-\beta-1}(xy) y'^\beta.$$

Die Entwicklungscoefficienten der Klammergrössen links in folgenden Ausdrücken mögen bezeichnet werden durch:

$$1) \qquad -\left[\frac{f(xy; x_\tau^\varkappa y_\tau^\varkappa)}{f'(x_\tau^\varkappa y_\tau^\varkappa)_2} \frac{dx_\tau^\varkappa}{d\tau}\right]_{\tau^{-\mu}} = f(xy)_{\varkappa, -\mu};$$

$$2) \qquad \left[\frac{(x_\tau^\varkappa)^\alpha (y_\tau^\varkappa)^\beta}{f'(x_\tau^\varkappa y_\tau^\varkappa)_2} \frac{dx_\tau^\varkappa}{d\tau}\right]_{\tau^{-\mu}} = (\varkappa, -\mu)_{\alpha\beta};$$

wo $x_\tau^\varkappa y_\tau^\varkappa$ sich auf die singuläre Stelle $a'_\varkappa b'_\varkappa$ als Mittelpunkt beziehen.

Für

$$\Pi(x) \equiv x^{m-1} + A_1 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1},$$

$$\begin{aligned} -(x; \varkappa, -\mu)_\beta \equiv\ & x^{m-2}(\varkappa, -\mu)_{0\beta} + \\ & + x^{m-3}\{(\varkappa, -\mu)_{1\beta} + A_1(\varkappa, -\mu)_{0\beta}\} \\ & + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ & + \{(\varkappa, -\mu)_{m-2, \beta} + A_1(\varkappa, -\mu)_{m-3, \beta} + \cdots \\ & \cdots + A_{m-2}(\varkappa, -\mu)_{0\beta}\} \end{aligned}$$

wird dann

$$F(xy;\, a'_\varkappa b'_\varkappa)_{-\mu} = f(xy)_{\varkappa,-\mu} + \frac{1}{H(x)} \sum_{\beta=0}^{n-2} (x;\, \varkappa, -\mu)_\beta f_{n-\beta-1}(xy).$$

Man schliesst hieraus, dass jeder Relation von der Form

$$\sum_{\varkappa,\mu} C_{\varkappa,\mu} F(xy;\, a'_\varkappa b'_\varkappa)_{-\mu} = \frac{\bar{g}(x)}{H(x)}, \quad (\bar{g}(x) \text{ höchstens vom Grade } m-1)$$

da wegen der Grade dieser Functionen, bei willkürlicher Wahl der $m-1$ Werte a_i,

$$3) \qquad \sum_{\varkappa,\mu} C_{\varkappa,\mu} (x;\, \varkappa, -\mu)_\beta = 0, \quad \frac{\bar{g}(x)}{H(x)} = C$$

sein muss, eine Relation von der Form

$$4) \qquad \sum_{\varkappa,\mu} C_{\varkappa,\mu} f(xy)_{\varkappa,-\mu} = C$$

entspricht, und umgekehrt. Da aber die 3) sich in die folgenden auflösen:

$$3') \qquad \sum_{\varkappa,\mu} C_{\varkappa,\mu} (\varkappa, -\mu)_{\alpha,\beta} = 0 \quad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, \ldots m-2 \\ \beta = 0, 1, \ldots, n-2 \end{pmatrix},$$

so ist die Bestimmung der $C_{\varkappa,\mu}$ auf die Discussion des von den $a_i b_i^{(r)}$ unabhängigen Systems 3'), entsprechend 7) von Nr. 5, zurückgeführt. Die Lösung formulirt Weierstrass so:

Sei

$$5) \qquad g(xy) = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta \quad (\alpha, \beta \text{ wie vorher})$$

irgend eine ganze Function von x, y, von den Graden $m-2$, $n-2$ bezw. in x, y, und sei:

$$6) \qquad \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha,\beta} (\varkappa, -\mu)_{\alpha,\beta} = (g)_{\varkappa,\mu}.$$

Von den r' Grössen $(g)_{\varkappa,\mu}$ werden r unabhängig sein. Diese seien:

$$7) \quad [g]_r = \sum_{\varkappa,\mu} c^{(r)}_{\varkappa,\mu} (g)_{\varkappa,\mu} \equiv \sum_{\alpha,\beta} (r)_{\alpha,\beta} g_{\alpha,\beta} \quad (r = 1, 2, \ldots, r)$$

mit willkürlichen $c^{(r)}_{\varkappa\mu}$ als Coefficienten.

Bildet man dann

$$f^{(r)}(xy) = \sum_{\varkappa,\mu} c^{(r)}_{\varkappa,\mu} f(xy)_{\varkappa,-\mu},$$

$$\bar{f}^{(r)}(xy) = \sum_{\beta=0}^{n-2} g(x)_{r,\beta} f_{n-\beta-1}(xy),$$

wo

$$g(x)_{r,\beta} = \sum_{\varkappa,\mu} c^{(r)}_{\varkappa\mu} (x;\, \varkappa, -\mu)_\beta$$

ist, so wird:

$$R(xy) = \sum_{r=1}^{r} c_r \left\{ f^{(r)}(xy) + \frac{1}{H(x)} \bar{f}^{(r)}(xy) \right\} + \frac{g(x)}{H(x)} + c.$$

Gesamtheit aller rationalen Functionen.

10. An die Darstellung der allgemeinsten in den $a_i b_i^{(\nu)}$ zu ∞^1 werdenden Functionen von xy schliesst sich, wie in Nr. 5, die Bildung der rationalen Functionen $R(xy)$ von xy, die an s vorgeschriebenen Stellen $x_\lambda y_\lambda$ in vorgeschriebenen Ordnungen $\leqq l_\lambda$ unendlich werden sollen. Es dienen dazu Summen von Functionen $F(xy: x_\lambda y_\lambda)_\mu$, $\mu = 0, 1, \ldots, l_\lambda - 1$, $(l_\lambda \geqq 1)$, und von solchen Functionen von xy, die nur in den $a_i b_i^{(\nu)}$ zu höchstens ∞^1 werden. Zwischen den $\sum\limits_{\lambda=1}^{s} l_\lambda + r + m - 1$ verfügbaren Coefficienten ergeben sich, wie in 9) Nr. 5, durch die Bedingung, dass dieser Ausdruck in den $a_i b_i^{(\nu)}$ nicht mehr unendlich wird, $(m-1)n$ lineare homogene Gleichungen, welche also für

$$\sum_\lambda l_\lambda > (m-1)(n-1) - r = \rho$$

immer erfüllbar sind.

Statt dessen erhält man durch Umwandlung in einen von den $a_i b_i^{(\nu)}$ unabhängigen Ausdruck, wie in Nr. 8:

$$R(xy) = \sum_{\lambda=1}^{s} \sum_{\mu=0}^{l_\lambda - 1} C_\lambda^{(\mu)} f(xy;\ x_\lambda y_\lambda)_\mu + \sum_{r=1}^{r} c_r f^{(r)}(xy) + c,$$

wo

$$f(xy: x'y')_\mu = -\left[\frac{f(xy: x'_\tau y'_\tau)}{f'(x'_\tau y'_\tau)_2} \frac{dx'_\tau}{d\tau}\right]_{\tau^\mu} \quad (\mu \geqq 0)$$

ist, mit den $(m-1)(n-1)$ Bedingungsgleichungen zwischen den $\sum\limits_\lambda l_\lambda + r$ Grössen $C_\lambda^{(\mu)}$, c_r:

$$\sum_{\lambda=1}^{s} \sum_{\mu=0}^{l_\lambda - 1} C_\lambda^{(\mu)} (x_\lambda y_\lambda, \mu)_{\alpha\beta} + \sum_{r=1}^{r} c_r (r)_{\alpha\beta} = 0 \quad \begin{pmatrix}\alpha = 0, 1, \ldots, m-2\\ \beta = 0, 1, \ldots, n-2\end{pmatrix},$$

wo

$$(x_\lambda y_\lambda; \mu)_{\alpha\beta} = \left[\frac{(x_\tau^\lambda)^\alpha (y_\tau^\lambda)^\beta}{f'(x_\tau^\lambda y_\tau^\lambda)_2} \frac{dx_\tau^\lambda}{d\tau}\right]_{\tau^\mu} \text{(am Mittelpunkt } x'y' = x_\lambda y_\lambda).$$

Damit hat man, nur auf höhere Unendlichkeitspunkte und singuläre Stellen ausgedehnt, eine Zusammensetzung der Function $R(xy)$, welche wieder genau mit der von 4), 6), Nr. 5 übereinstimmt. Auch die weiteren auf den Fall $\sum l_\lambda = \rho + 1$ bezüglichen Schlüsse aus den Determinanten von der Form 5), Nr. 5, bleiben bestehen: $R(xy)$ kann man als Quotienten $F(xy)/D_0$ zweier Determinanten von bezw. $r + \rho + 1$ und $r + \rho$ Reihen ausdrücken, als dessen Nenner die Determinante $D_0(x_1 y_1, \ldots x_\rho y_\rho)$ genommen werden kann, die sich auf ρ von den $\rho + 1$ Wertsystemen bezieht, und die nicht identisch verschwindet. Es werden wieder ρ Wertsysteme $a_1 b_1, \ldots, a_\rho b_\rho$

fest gewählt, für die $D_0 \neq 0$, und als $(\rho+1)$tes ein beliebiges $x'y'$: und es wird die (eindeutig bestimmte) Function von xy:

$$H(xy;\ x'y') = -\frac{F(xy;\ x'y',\ a_1 b_1, \ldots, a_\rho b_\rho) - F(x_0 y_0;\ x'y',\ a_1 b_1, \ldots, a_\rho b_\rho)}{D_0(a_1 b_1, \ldots, a_\rho b_\rho) . f'(x'y')_2}$$

gebildet, welche ausser in den $a_\alpha b_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, \rho)$ in $x'y'$ wirklich zu ∞^1 wird, in $xy = x_0 y_0$ verschwindet und in $xy = x'y'$ sich wie $1/(x'-x)$ verhält. — Um zu dem noch fehlenden Hauptglied der Schlusskette, dem wirklichen Betrage der nur begrifflich definirten Zahlen r oder ρ, zu gelangen, wird nun eine noch eingehendere Untersuchung der **Integranden-Eigenschaften** des Ausdrucks $H(xy;\ x'y')$, also hinsichtlich seiner Abhängigkeit von $x'y'$, notwendig.

Die Integranden.

11. Nach Nr. 8 hat das in Nr. 10 definirte $H(xy;\ x'_t y'_t) . dx'/d\tau$, als Function von $x'y'$ aufgefasst, die Eigenschaft, nur in $x'y' = xy$ und $= x_0 y_0$ und zwar wie τ^{-1}, bezw. $-\tau^{-1}$, unendlich zu werden; denn in den singulären Stellen verschwindet der Coefficient von $\tau^{-\mu}$, wie die Determinantendarstellung zeigt, in welcher die erste, $x'y'$ allein enthaltende Verticalreihe nach der Entwicklung in den negativen Potenzen durch die übrigen Reihen zerstört wird. Dies sieht man auch so ein: dieser Coefficient würde, wenn er von null verschieden wäre, eine Function von xy vorstellen, die nur in den ρ Stellen $a_\iota b_\iota$ zu ∞^1 würde, die aber nach Definition nicht existirt (Nr. 7).

$H(xy;\ x'y')$ ist also, in $x'y'$, der **Integrand dritter Gattung**, mit den beiden Parameterpaaren xy, $x_0 y_0$.

Aus $H(xy;\ x'y')$ ergeben sich, wenn man xy durch $x_t y_t$ ersetzt und die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von t nimmt, neue Integranden in $x'y'$. Die positiven Potenzen von t führen zu den Integranden **zweiter Gattung**; setzt man aber für xy das Element $x_t^\alpha y_t^\alpha$ mit dem Mittelpunkte $a_\alpha b_\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, \rho)$ ein, so tritt auch die (-1)te Potenz von t auf, als deren Coefficient ein Ausdruck

$$H(x'y')_\alpha$$

erscheint, für welchen $H(x'y')_\alpha . dx'/d\tau$ an keiner Stelle $x'y'$ mehr zu unendlich wird. Dieser Coefficient ist also der **Integrand erster Gattung**. Dieselben Ausdrücke $H(x'y')_\alpha$ erhält man in der Darstellung von Nr. 10:

$$H(xy;\ x'y') = C - \frac{f(xy;\ x'y')}{f'(x'y')_2} + \sum_{\alpha=1}^{\rho} H(x'y')_\alpha\, f(xy;\ a_\alpha b_\alpha) + \sum_{\iota=1}^{r} E'(x'y')_\iota\, f^{(\iota)}(xy),$$

und zwar wird

$$H(x'y')_\alpha = \frac{E(x'y')_\alpha}{f'(x'y')_2}, \quad E(x'y')_\alpha = \frac{D_\alpha}{D_0},$$

wo D_α aus $D_0(a_1 b_1, \ldots, a_\varrho b_\varrho)$ entsteht, indem man die Stelle $a_\alpha b_\alpha$ durch $x'y'$ ersetzt. Die $E(x'y')_\alpha$ sind ρ ganze Formen in $x'y'$, welche in x' nur bis zum Grad $m-2$, in y' bis zum Grad $n-2$ ansteigen. Sie sind, ihren Verschwindungspunkten nach, nicht nur linear-unabhängig von einander, sondern haben auch die Eigenschaft, dass jede Form $E(x'y')$, für welche $E(x'y')/f'(x'y')_2 . dx'/d\tau$ nirgends unendlich wird, eine homogene lineare Function der ρ Formen $E(x'y')_\alpha$ ist. Das Letztere zeigt sich, wenn man den Residuensatz auf $H(x_\iota y_\iota; x'y') . E(x_\iota y_\iota)/f'(x_\iota y_\iota)_2 . dx_\iota/d\tau$ anwendet. In der Zahl der linear-unabhängigen Integranden erster Gattung hat man also eine neue Definition der Zahl ρ. Die Bedingungen für $E(x'y')$ ergeben sich, indem man $E(x'y')$ mit der Form $g(x'y')$, 5), Nr. 9 identificirt, in der Gestalt der r' Gleichungen (s. 6), Nr. 9) $(g)_{\varkappa,\mu} = 0$, welche sich auf die r unabhängigen Gleichungen $[g]_\mathfrak{r} = 0$ $(\mathfrak{r} = 1, \ldots, r)$ (s. 7) Nr. 9) reduciren.

Bestimmung der Zahlen ρ und r.

12. Während jede Function von xy, die in den Punkten einer „Specialgruppe" (Abschn. V, E Nr. 58), insbesondere in weniger als $\rho+1$ Stellen, zu ∞^1 wird, sich in der Form

$$\frac{\sum\limits_\alpha c_\alpha H(xy)_\alpha}{\sum\limits_\alpha c'_\alpha H(xy)_\alpha}$$

darstellen lässt, die völlig invariant ist, und während auch der Integrand $H(x'y')_\alpha . dx'/d\tau$ invariant definirt ist, hat der Ausdruck

$$H(xy) = \sum_\alpha c_\alpha H(xy)_\alpha,$$

als Function von xy aufgefasst, Eigenschaften, die sich auf die Auszeichnung der Variabeln x beziehen. Diese Eigenschaften dienen zur Bestimmung der Zahl r, bezw. ρ, für ein vorgelegtes Gebilde. Da $H(xy)$ in den n verschiedenen Stellen des Gebildes, für die $x = \infty$, mindestens je in zweiter Ordnung verschwindet und mindestens weitere $2(\rho-1)$ endliche Nullstellen besitzt (weil sich sonst eine nicht constante Function $\overline{H}(xy)/H(xy)$ herstellen liesse, die nur $\rho-1$ willkürliche Unendlichkeitsstellen besässe), so wird für den Grad s von $H(xy)$:

$$s \geqq 2n + 2\rho - 2;$$

und da $H(xy)$ nur in Verzweigungsstellen unendlich werden kann, so wird auch, wenn deren $\varkappa$ bezw. $(s_\iota - 1)$-fache existiren:

$$s \leqq \sum_{\iota=1}^{\varkappa} (s_\iota - 1) = \omega, \quad \text{also} \quad \omega \geqq 2n + 2\rho - 2.$$

Eine Ungleichung in entgegengesetztem Sinne erhält man, wenn man $H(xy)$ nach Nr. 10 darstellt. $H(xy)$ setzt sich dann aus $\omega+r$ Functionen zusammen; zunächst mit $\omega+r$ Constanten, zwischen denen $r+\rho$ homogene Gleichungen bestehen, oder, wenn man statt der dortigen Functionen zuerst die $H(xy; x_\lambda y_\lambda)$, $H(xy; x_\lambda y_\lambda)_\mu$ einführt: mit ω Constanten C_h (ausser der additiven C_0), zwischen denen ρ lineare homogene, auf die $a_\alpha b_\alpha$ bezügliche Gleichungen bestehen. Weil aber in $H(x_\iota y_\iota).dx_\iota/d\tau$ niemals negative Potenzen von τ auftreten können, so erhält man für die n Stellen $x=\infty$ 2n lineare homogene Gleichungen zwischen den $C_0, C_1, \ldots, C_\omega$ und für die ρ Stellen $a_1 b_1, \ldots, a_\rho b_\rho$ die genannten ρ Gleichungen, wobei aber, nach dem Residuensatze, von $n+\rho$ dieser im ganzen $2n+\rho$ Gleichungen eine die Folge der übrigen ist. So hat man zwischen den $\omega+1$ Constanten $2n+\rho-1$ homogene lineare Gleichungen; und wenn $\omega+1>2n+2\rho-1$ wäre, so könnte man $H(xy)$ noch vorschreiben, in ρ willkürlichen Stellen zu null zu werden, was unmöglich ist (Nr. 7). Somit wird

$$\omega = 2n+2\rho-2$$

oder

$$\omega = 2m(n-1)-2r.$$

Diese Bestimmung von ρ, aus ω, gehört also, indem sie in $H(xy)$ an die Verzweigungseigenschaften der Function y anknüpft, zu denjenigen Definitionen von ρ, welche in Nr. 17 Abschn. VI [über die singulären Punkte] an den wesentlichen Factor D_1 der Discriminante angeschlossen sind. Die letzte Gleichung zeigt zugleich, dass r der Grad des ausserwesentlichen Factors D_2 der Discriminante wird.

Betrachtet man statt dessen das Verhalten des Zählers $E(x'y')$ von $H(x'y')$, der überall zu

$$\frac{1}{f'(x'y')_2}\cdot\frac{dx'}{d\tau} = -\frac{1}{f'(x'y')_1}\,\frac{dy'}{d\tau}$$

ein endliches Verhältnis haben muss, so erhält man direct die andere Bestimmung von ρ aus r, die zu dem ausserwesentlichen Factor D_2 gehört. Man hat hierbei nämlich nur die singulären (bei der „Normalform“ Nr. 8 endlichen) Stellen des Gebildes $f(xy)=0$ zu beachten. Beginnt für eine solche eine Entwicklung von $1/f(x'_\iota y'_\iota)_2 . dx'_\iota/d\tau$ mit τ^{-k_ν} ($k_\nu \geqq 0$), so muss die von $E(x'_\iota y'_\iota)$ mit τ^{k_ν} beginnen, was $\sum_\nu k_\nu$ Bedingungsgleichungen für die ganze Form $E(x'y')$, vom Grade $m-2$ in x, $n-2$ in y, liefert. Nun erhält k_ν für ein Element, das eine $(s_\nu-1)$-fache Verzweigung von y darstellt, den Wert $k_\nu=l_\nu-s_\nu+1$, wenn l_ν die Ordnung des Elements für $f'(x'y')_2$ angiebt; und da

$$\sum_\nu l_\nu = 2m(n-1), \quad \sum_\nu (s_\nu-1) = \omega = 2m(n-1)-2r.$$

wo r den Grad von D_2 bezeichnet, so erhält man

$$\sum_\nu k_\nu = \sum_\nu l_\nu - \sum_\nu (s_\nu - 1) = 2r,$$
$$\rho = (m-1)(n-1) - \tfrac{1}{2}\sum_\nu k_\nu.$$

Man sieht zugleich, dass die $\sum_\nu k_\nu$ Bedingungsgleichungen für die allgemeine Form $E(xy)$ (vom Grade $m-2$ in x, $n-2$ in y), welche aussagen, dass in jedem Elemente $x'y'$ der Ausdruck $E(x'y')/f'(x'y')_2 \, . \, dx'/d\tau$ endlich werden soll (die r' Gleichungen $(g)_{x,\mu} = 0$ von Nr. 11), in der That nicht von einander unabhängig sind, sondern sich auf nur $\frac{1}{2}\sum_\nu k_\nu = r$ unabhängige reduciren: es sind die „Adjunctionsbedingungen" für $E(xy)$ in den singulären Stellen des Gebildes. An jeder Stelle ist die eine Hälfte der Bedingungsgleichungen Folge der anderen.

Dass man die Berechnung von Σk_ν für jede singuläre Stelle des Gebildes mit Hülfe quadratischer Transformationen ausführen kann und dabei einen Ausdruck der Art $\Sigma h(h-1)$ erhält, beweist Weierstrass ebenfalls, wie schon in dem Abschn. VI, Nr. 11 besprochen worden ist.

Ueber die Bildung der Integranden und Functionen.

13. Mit diesen Betrachtungen, welche mit einer neuen Definition von r zugleich die Bestimmung dieser Zahl liefern, ist auch insofern ein erster Abschluss der Weierstrass'schen Theorie erreicht, als sich nun erst eine Bedeutung für die r unabhängigen Ausdrücke $[g]_r$ (s. Nr. 11) ergiebt, und damit eine noch mehr explicite Darstellung der Functionen $H(xy; x'y')$ von xy. Während früher die Darstellung an die Functionseigenschaften in xy anknüpfte, und nur die Beweise an die Integrandeneigenschaften in $x'y'$, schliesst jetzt auch die Darstellung selbst an die in $x'y'$ an. Für den Integrandenfactor erster Gattung, $E(x'y')$, hat man r unabhängige Gleichungen $[g]_r = 0$; die Bedeutung dieser Gleichungen: dass sie nämlich dem Ausdruck $E(x'y') = 0$ vorschreiben, in den vielfachen Stellen von $f(x'y') = 0$ „adjungirt" zu $f = 0$ zu sein, liest man besonders aus der in Nr. 12 (am Ende) erwähnten Transformationsmethode ab, welche, im Gegensatze zu den übrigen Methoden, die Reihenentwicklungen von y' nicht voraussetzt. Für die Bildung von

$$H(xy; x'y') = \frac{F_1(xy; x'y')}{f'(x'y')_2}$$

genügt es ebenfalls, dem Ausdruck F_1, in seiner Abhängigkeit von $x'y'$, vorzuschreiben, dass er zu $f(x'y') = 0$ adjungirt ist, in den ρ festen Stellen $a_1 b_1, \ldots, a_\rho b_\rho$ verschwindet, und in den beiden Stellen xy und $x_0 y_0$ in bestimmter, früher bezeichneter Weise zu ∞^1 wird. Hierdurch

ist der Ausdruck F_1 hinsichtlich $x'y'$, und damit auch in xy, festgelegt und kann in die Form $\frac{E(xy;x'y')}{(x'-x)(x'-x_0)}$ gesetzt werden, wo E höchstens vom Grade m in x', $n-1$ in y' ist.

Dass in den expliciten Bildungen von Weierstrass die Integranden in den Vordergrund treten, hat auch in den anderen bisher besprochenen Theorien der algebraischen Functionen sein Analogon. Die algebraischen Functionen des Gebildes sind zwar als Summen bestimmter Elementarfunctionen des Gebildes, wie der $H(xy;x_\lambda y_\lambda)_\mu$, eindeutig darstellbar; diese letzteren aber sind nicht nur in ihrer Definition von der Gleichung des Gebildes abhängig, sondern auch, vermöge der Gleichung des Gebildes, in ihrer Bildung als Quotienten einer mannigfachen Abänderung fähig. Während solche Quotienten, also Functionen von xy, begrifflich und absolut invariant definirt sein können, hängen Zähler und Nenner einzeln immer von der aus der algebraischen Klasse ausgewählten, zu Grunde gelegten algebraischen Gleichung $f=0$ ab. Sie sind Formen des Gebildes, deren von f abhängige Eigenschaften bei jeder wirklichen Bildung zuerst festzustellen sind. So treten in der Theorie von Brill-Noether die linken Seiten der Gleichungen der zu $f=0$ „adjungirten Curven“ unmittelbar als ganze Formen auf, und zwar als „volle Systeme“ von Formen in der Invariantensprache. Ausgezeichnet sind diejenigen ganzen oder gebrochenen Formen, welche zugleich Integranden sind, als Covarianten des Gebildes, insbesondere die ganzen Formen erster Gattung φ (bei Weierstrass $E(x'y')$) und die Weierstrass'schen Formen dritter Gattung in $x'y'$: $\frac{E(xy;\,x'y')}{(x'-x)(x'-x_0)}$. Riemann stellt wenigstens die „Specialfunctionen“ als Quotienten von Integranden φ dar, während er sonst, in der Repräsentation durch Integralsummen, den Functionsbegriff voranstellt, wenn er auch nachträglich die Functionen durch Integration von Integranden ableitet. — Eine Weiterführung dieser Formenbegriffe wird teilweise in Abschn. VIII noch zur Besprechung kommen.

Den tiefgreifenden Unterschied zwischen den beiden Variabelnsystemen xy und $x'y'$ bei Weierstrass kann man namentlich daran erkennen, dass Ausdrücke wie $F_1(xy;x'y')$ in xy immer direct, durch Einsetzen von $x_t\,y_t$ für xy, nach t entwickelt werden, während eine Entwicklung nach τ mittelst $x'_\tau y'_\tau$ für $x'y'$ immer erst an den Integranden $F_1(xy;x'y')/f'(x'y')_2 \cdot dx'/d\tau$, $E(x'y')/f'(x'y')_2 \cdot dx'/d\tau$ vorgenommen werden kann. $F_1(xy;x'y')$ wird, als Ausdruck in $x'y'$, oben nicht in der Weise einer „Function“ etwa durch die Unendlichkeits- und die Nullpunkte (bis auf ϱ der letzteren)

definirt; sondern F_1 sowohl, als

$$H(xy;x'y') = \frac{F_1(xy;x'y')}{f'(x'y')_2},$$

hat ausser xy, x_0y_0, a_ib_i noch Unendlichkeitspunkte an besonderen Stellen (im Unendlichen), H auch an Stellen, die von der Auszeichnung der einen Variabeln x' herrühren (in den Verzweigungspunkten). Wenn von diesen Unstetigkeiten in der Definition nicht — so wenig, wie es bei $\varphi(x'y') \equiv E(x'y')$ oder $\varphi(x'y')/f'(x'y')_2$ geschieht — die Rede ist, so hat dies darin seinen Grund, dass die Ausdrücke in $x'y'$, mit ihren nicht-invarianten Eigenschaften und Definitionen, als solche keine Rolle in der Theorie spielen, sondern nur da auftreten, wo diese Eigenschaften von selbst ausser Betracht bleiben, nämlich als Quotienten, wie φ_1/φ_2, oder als Factoren von $dx'/f'(x'y')_2$, bezw. dx', mit nachheriger Integration, was die Unstetigkeiten aufhebt — mit einem Worte: dass sie hinsichtlich $x'y'$ Formen sind, als welche sie auch, mit einer von null verschiedenen Dimension, beim Homogenmachen erscheinen.

Zusammenfassend können wir also sagen, dass sich die obigen Ausdrücke in ihrer Abhängigkeit von $x'y'$, gegenüber der von xy, in folgender Weise auszeichnen: 1) durch nicht-invariante Eigenschaften; 2) durch ihr nur mittelbares Eintreten in die Theorie; 3) durch ihr Verhalten beim Homogenmachen; lauter Beziehungen, welche dieselben als „Formen“ in $x'y'$ charakterisiren.

Die Bildung von $H(xy;x'y')$ nach der in Nr. 10 bezeichneten Art als Quotient zweier Determinanten ist übrigens auf dem in vorliegender Nummer bezeichneten Wege, d. h. indem man von $x'y'$ ausgeht, genau ebenso in Clebsch-Gordan's Abel'schen Functionen § 6 enthalten; sie wird hier bloss an einem Gebilde $f = 0$ mit nur gewöhnlichen Singularitäten und bei schon feststehenden Zahlen r, $\rho \equiv p$ vorgenommen.

Die an sich bedeutsame Thatsache, dass, sobald $H(xy;x'y').dx'/d\tau$ als Function von $x'y'$ in den singulären Stellen von $f = 0$ endlich gemacht wird, $H(xy;x'y')$ auch als Function von xy sich von selbst in diesen Stellen wie der Quotient zweier adjungirten Formen verhält, wird durch das im zweiten Satze von Nr. 11 Gesagte verständlich.

Vertauschung von Argument und Parameter. Reductionsformeln. Primfunctionen

14. Die algebraischen Betrachtungen der Weierstrass'schen Theorie enthalten noch zwei wichtige Teile, von denen der eine sich auf die Integranden zweiter Gattung, der andere auf die Functionen, die nur an einer Stelle unendlich werden, bezieht. Wir berichten zunächst über den ersteren.

Schon in der Programmschrift von 1849 hatte Weierstrass nach dem Vorgange Abel's durch algebraische Umformungen die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\sqrt{R(x)}}{(y-x)\sqrt{R(y)}}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\sqrt{R(y)}}{(x-y)\sqrt{R(x)}}=\frac{2\,F(x,y)}{\sqrt{R(x)}\sqrt{R(y)}},$$

wo $F(x,y)$ eine rationale ganze Function von x, y ist, aufgestellt, die, nach x und y integrirt, den Satz von der Vertauschbarkeit von Argument x und Parameter y für Integrale dritter Gattung im hyperelliptischen Falle begründet, nicht integrirt aber eine Relation zwischen Ausdrücken darstellt, welche sowohl in x als in y Integranden zweiter Gattung sind. Während diese Formel dort (s. Weierstrass' erster Teil, Abschn. III, Nr. 33), ebenfalls nach dem Vorgange Abel's in einem speciellen Falle, nur zur Ermittlung der Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale erster und zweiter Gattung dient, andere — functionentheoretische — Anwendungen aber, ohne besonders aufgeführt zu werden, nur als möglich bezeichnet werden, stellt sie Weierstrass jetzt, wie er in der Note (2) bereits angedeutet hatte, in den Mittelpunkt der Darstellung von Relationen zwischen Integranden beliebiger algebraischer Functionen, insbesondere ihrer Reduction auf Normalformen, sowie aller auf Periodeneigenschaften bezüglichen Schlüsse.

Unter den Integranden zweiter Gattung zeichnet Weierstrass diejenigen ρ Ausdrücke

$$H'(x'y')_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \rho)$$

aus, welche je als Coefficienten der Potenz t^1 in der Entwicklung von $H(x_t^\alpha y_t^\alpha; x'y')$ bei $xy = a_\alpha b_\alpha$ auftreten. $H'(x'y')_\alpha . dx'/d\tau$ wird in $x'y' = a_\alpha b_\alpha$ zu ∞^2 und bleibt sonst endlich. Indem Weierstrass den Residuensatz auf

$$H(\xi\eta;\, x'y')\,\frac{d}{d\xi}\,H(\xi\eta;\, xy),$$

anwendet, als Ausdruck in $\xi\eta$ (für $f(\xi,\eta) = 0$) betrachtet, erhält er die gemeinte Formel:

$$\frac{d}{dx}\,H(xy;\, x'y') - \frac{d}{dx'}\,H(x'y';\, xy)$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{\rho}\{H'(xy)_\alpha H(x'y')_\alpha - H(xy)_\alpha H'(x'y')_\alpha\},$$

in welcher, sowohl hinsichtlich xy, als hinsichtlich $x'y'$, nur noch Integranden zweiter Gattung auftreten, sofern man auch die erster Gattung zu diesen zählt. Nach dieser Gleichung kann man zunächst Integranden zweiter Gattung

$$G(xy;\, x'y') = \sum_\alpha H'(xy)_\alpha H(x'y')_\alpha - \frac{d}{dx}\,H(xy;\, x'y')$$

einführen, welche sich bei Vertauschung von xy mit $x'y'$ nicht ändern, und für welche $G(x_t y_t; x'_\tau y'_\tau).dx/dt.dx'/d\tau$ nur für $x'y' = xy$ zu $-1/(\tau-t)^2 + \mathfrak{P}(t.\tau)$ wird, und sonst endlich bleibt. Die allgemeinste Form G_1 dieser Art ergiebt sich aus G durch Zufügen einer Summe $\sum c_{\alpha\beta} H(xy)_\alpha H(x'y')_\beta$, $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$, mit $\frac{1}{2}\rho(\rho+1)$ Constanten. Man kann die Formel ferner auffassen als die Reduction eines Integranden zweiter Gattung in $x'y'$, $dH(xy; x'y')/dx$, der nur in $x'y' = xy$ einen Unstetigkeitspunkt erster Art besitzt, auf den Differentialquotienten nach x' einer algebraischen Function von $x'y'$ und eine Summe von 2ρ auf festgegebene Stellen $a_1 b_1, \ldots a_\rho b_\rho$ sich beziehende Integranden zweiter und erster Gattung in $x'y'$; oder auch: als die Zurückführung des Differentialquotienten nach x von einer algebraischen Function $H(xy; x'y')$ von xy, die in $\rho+1$ Stellen höchstens zu ∞^1 wird, auf eine Summe von $\rho+1$ Integranden zweiter Gattung in xy, die in diesen Stellen einzeln unendlich werden, und von ρ Integranden erster Gattung in xy.

Eine Verallgemeinerung dieser Reductionsformel auf den allgemeinsten Integranden $F(x'y')$ ergiebt sich, indem man denselben aus den Entwicklungstermen $G(xy; x'y')_\mu$ von $G(x_t y_t; x'y').dx_t/dt$, aus Formen $H(x_\lambda y_\lambda; x'y')$ und aus den ρ Formen erster Gattung $H(x'y')_\alpha$ additiv zusammensetzt. Nach Anwendung der obigen Formel für G folgt dann, dass sich ein beliebiger Integrand in $x'y'$ durch eine Summe von Integranden dritter Gattung $H(x_\lambda y_\lambda; x'y')$, durch die 2ρ festen Integranden $H(x'y')_\alpha$, $H'(x'y')_\alpha$ und den Differentialquotienten nach x' einer algebraischen Function von $x'y'$ ausdrückt; der Differentialquotient nach x' einer beliebigen algebraischen Function von $x'y'$ drückt sich durch eine Summe von Integranden zweiter Gattung und der ρ Integranden erster Gattung aus.

Wir wollen nur noch kurz erwähnen, welche weitere Verwendungen der Satz von der Vertauschung von Argument und Parameter bei Weierstrass findet. Sie beziehen sich auf die Theorie der Periodicität. Eine Relation zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale erster und zweiter Gattung erhält Weierstrass immer dadurch, dass er die Gleichung jenes Satzes nach xy über einen geschlossenen Weg S und nach $x'y'$ über einen zweiten geschlossenen Weg S' integrirt. Dass die bei der Integration über S entstehenden Ausdrücke

$$\sum_\alpha \{2\eta_\alpha H(x'y')_\alpha - 2\omega_\alpha H'(x'y')_\alpha\} = L(x'y')$$

nicht Ableitungen einer rationalen Function von $x'y'$ sind, dient zum Beweise dessen, dass zu S stets ein den Weg S nur an einer Stelle positiv

schneidender Weg S' gefunden werden kann; und daraus folgt weiter, dass es genau ρ Wegpaare S_β, S'_β dieser Art giebt, bei denen zwei verschiedene Paare sich nicht schneiden. Hierauf beruht wieder die Bestimmung der Zahl der linear-unabhängigen Perioden und der Periodenrelationen, die hier in anderer Combination als bei Riemann und Clebsch-Gordan erscheinen; und auf letzteren Relationen weiter der Beweis, dass die Einführung von ρ „kanonischen" Integralen erster Gattung (für welche die eine Hälfte der Periodicitätsmoduln aus $1, 0, 0, \ldots 0$; $0, 1, 0, \ldots; \ldots$ besteht) für das gegebene Netz S_β, S'_β möglich ist.

Den Functionen

$$E_\beta(x\,y) = e^{\int^{xy} L_\beta(x'y')\,dx'}, \quad E'_\beta(x\,y) = e^{\int^{xy} L'_\beta(x'y')\,dx'}$$

($\beta = 1, \ldots, \rho$; L_β, L'_β genommen auf dem Wege S_β, bezw. S'_β),

$$E(x\,y;\, x_2 y_2, x_1 y_1) = e^{\int_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} H(xy;\, x'y')\,dx'}$$

weist Weierstrass in seiner Theorie, besonders in derjenigen der algebraischen Functionen, eine hervorragende Stelle an. Denn es zeigt sich durch Periodicitätsbetrachtungen, dass jede rationale Function von $x\,y$, welche in $x_1 y_1, \ldots, x_r y_r$ ihre Null-, in $x'_1 y'_1, \ldots, x'_r y'_r$ ihre Unendlichkeitsstellen hat (jede so oft genommen, als die Ordnung der Stelle anzeigt), sich durch ein Product von Functionen:

$$\prod_{\nu=1}^{r} E(x\,y;\, x_\nu y_\nu, x'_\nu y'_\nu)$$

darstellt; sodass die $E(x\,y;\, x_\nu y_\nu, x'_\nu y'_\nu)$ bezüglich der rationalen Functionen der Stelle $x\,y$ des Gebildes $f(x\,y) = 0$ die Rolle von Primfunctionen in $x\,y$ spielen. Ferner liefern die oben besprochenen Formeln den Ausdruck eines Integrals dritter Gattung, mit der oberen Grenze $x\,y$, durch Logarithmen von E-Functionen (und zwar von beiden Arten) in $x\,y$.

Die eingeführten Functionen E haben die Stellen $a_\alpha b_\alpha$ zu wesentlich singulären; ausserdem wird $E(x\,y;\, x_2 y_2, x_1 y_1)$ nur noch in einem der beiden Punkte $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ zu 0^1, im anderen zu ∞^1.

Auch das Abel'sche Theorem lässt sich aus den genannten Darstellungen ableiten. Entwickelt man aus dem Ausdruck einer rationalen Function $R(x\,y)$ durch das E-Product die Function $d\lg R(x_t y_t)/dt$ nach t, so liefert an der Stelle $a_\alpha b_\alpha$ die Potenz t^{-2} das Abel'sche Theorem für Integrale erster Gattung $\int H(x\,y)_\alpha dx$. Bestehen umgekehrt die ρ Gleichungen des Theorems füt Integrale erster Gattung, so kann man — aus dem functionentheoretischen Satze, der als vorletzter Satz der Nr. 2 oben angegeben ist — durch das E-Product, genommen auf den gleichen Wegen, die Existenz der rationalen Function $R(x, y)$ beweisen.

Beziehung des Residuensatzes zu den Hülfsmitteln anderer Theorien.

15. Die in Nr. 14 besprochenen Sätze bilden ein vollständiges Aequivalent für diejenigen Theoreme, welche Clebsch-Gordan im fünften Abschnitt ihrer Abel'schen Functionen über „Vertauschung von Parameter und Argument" ausgesprochen haben. Nur scheint auf den ersten Anblick ein tiefer Unterschied darin zu bestehen, dass das Werk von Clebsch-Gordan einen transcendenten, Weierstrass aber einen wesentlich algebraischen Weg einschlägt. Dementsprechend wird auch das Clebsch-Gordan'sche Normalintegral dritter Gattung, welches die Vertauschung zulässt, transcendent normirt, ist aber unter den Integralen dritter Gattung, welche bei Weierstrass aus den algebraisch normirten allgemeinsten Integranden G_1 (Nr. 14) zweiter Gattung mit der Vertauschungseigenschaft durch zweifache Integration folgen, enthalten. Während Clebsch-Gordan in diesem Theile ihrer Theorie von der Periodicität, den kanonischen Wegsystemen etc. Gebrauch machen, wird bei Weierstrass umgekehrt die erstere für die zweite Theorie verwertet.

Beachtet man jedoch das Hauptbeweismittel, so beschränkt sich der Unterschied auf die äussere Erscheinung und die Reihenfolge der Sätze. Denn Weierstrass benutzt den Residuensatz, angewendet auf das Product einer Function $R(xy)$ in einen Integranden $F(xy).dx/dt$; Clebsch-Gordan integriren, wie Riemann, ein ebensolches Product über die ganze Begrenzung der Riemann'schen Fläche. Beide Methoden sind aber, nach der Cauchy'schen Form des Residuensatzes, völlig äquivalent.

Wie die Verwendung des Residuensatzes für die Integrandendarstellung die Weierstrass'sche Theorie mit der Clebsch-Gordan'schen in Parallele setzt, so giebt die Verwendung des nämlichen Satzes für die Darstellung der Gesamtheit von Functionen, welche gegebenen Bedingungen genügen (Nr. 8 ff.), die Beziehung der Weierstrass'schen Theorie zu der Brill-Noether'schen. Brill-Noether benutzen in der Absicht, von einer speciellen Punktgruppe zur allgemeinsten zu dieser corresidualen Gruppe überzugehen, den Restsatz, der als geeignetes Mittel die zum Gebilde „adjungirten" Curven ergiebt. Namentlich wird diejenige Modification des Restsatzes verwendet, nach welcher auf „feste" Punkte geschlossen wird (s. Abschn. E, Nr. 56), anders ausgesprochen (vgl. Abschn. VIII, Nr. 7) der Satz, dass es keine Integrale $\int^{x'y'} F(x'y')dx'$ giebt, die nur in einem Punkte $x'y' = xy$ logarithmisch unendlich werden. Dieser Satz aber führt (l. c.) wieder direct zum Residuensatz. So ist also dieser Satz in dem Restsatze für feste Punkte enthalten, nur mit dem Unterschiede, dass

der letztere sich als ein von Differentiationen oder Reihenentwicklungen unabhängiger, rein algebraischer Satz darstellt, der, da er sich auf φ-Formen bezieht, für die Klasse invariant ist. Auch wenn man eines der Ziele, das Abel'sche Theorem, in Betracht zieht, erkennt man den Zusammenhang. Denn der Restsatz ist dem Sinne nach mit diesem Theorem identisch und führt algebraisch auf das „directe" Theorem (nicht auf die Umkehrung); andererseits wird dieses sowohl von Abel, als von Clebsch-Gordan und Weierstrass mit Hülfe des Residuensatzes bewiesen. Indessen verwenden Weierstrass und implicit auch Clebsch-Gordan hierbei noch functionentheoretische Hülfsmittel. Man kann hiernach den Residuensatz, verbunden mit einfachen functionentheoretischen Sätzen, dem Satze für feste Punkte, oder auch dem Restsatze selbst als äquivalent ansehen.

Functionen mit nur einer Unendlichkeitsstelle. Lückensatz. Kanonische Form des Gebildes.

16. Eine besondere Betrachtung widmet Weierstrass, wegen der daraus zu ziehenden wichtigen Folgerungen, denjenigen Functionen der Klasse, welche nur an einer Stelle des Gebildes unendlich werden.

Stellt man eine solche Function ξ_σ von xy, die nur in $xy = x'y'$, und zwar in der Ordnung σ, unendlich werden soll, etwa (s. Nr. 10) durch die Function $H(xy; x'y')$ und durch die Entwicklungscoefficienten von $H(xy; x'_t y'_t).dx'/d\tau$, nämlich die $H(xy; x'y')_\mu$ $(\mu = 0, 1, \ldots, \sigma - 1)$, dar, so liefert die Discussion der zwischen den Coefficienten bestehenden ρ Bedingungsgleichungen (analog 9), Nr. 5) die Sätze:

Für eine nicht-specielle Stelle $x'y'$ existiren solche Functionen ξ_σ bei jeder Ordnung $\sigma = \rho + 1, \rho + 2, \ldots$ wirklich, bei $\sigma \leqq \rho$ nicht: für jede Stelle $x'y'$ aber giebt es eine wirklich existirende Function ξ_1 von niedrigstem Grade $1 \leqq \rho + 1$; ferner eine kleinste Zahl $\varkappa$ derart, dass die Functionen $\xi_{\varkappa+1}, \xi_{\varkappa+2}, \ldots$ alle existiren.

Eine weitere, übrigens von Weierstrass nicht vorgenommene Discussion jener Gleichungen würde auch noch seinen „Lückensatz" liefern: Für jede Stelle $x'y'$ befinden sich unter den geforderten Functionen $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ genau ρ, die nicht existiren.

In der That ist dies nur eine andere Form des bekannten Satzes: dass die Constantenzahl derjenigen Functionen, welche höchstens in einer Gruppe von $Q > 2\rho - 1$ Stellen zu ∞^1 werden sollen, $Q - \rho + 1$ beträgt. Denn da man diese Functionen additiv zusammensetzen kann: a_1) aus einer, welche wirklich in allen Q Stellen zu ∞^1 wird, a_2) aus einer, welche nur in $Q - \alpha_1$ dieser vorher beliebig geordneten Stellen zu ∞^1 wird, a_3) aus einer, welche nur in $Q - \alpha_1 - \alpha_2$ der letzteren zu ∞^1 wird, $\ldots$, $a_{Q-\rho+1}$) aus einer, welche gar nicht unendlich wird, so fehlen unter

den in dieser Reihenfolge bestimmten $Q+1$ Graden $Q, Q-1, \ldots, 1, 0$ gerade ρ. Man braucht nur die Q Stellen auf $f=0$ consecutiv werden zu lassen, um den Lückensatz vor sich zu haben.

Der Lückensatz giebt eine neue invariante Definition von ρ, welche aber, wie man sieht, mit der aus der Constantenzahl einer algebraischen Function von genügend hohem Grade fliessenden zusammenfällt.

Aber auch die einzelnen Lückenzahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\varrho$ hängen mit den φ-Formen zusammen (nach dem Satze für feste Punkte, s. Noether, J. f. Math. 97). Weierstrass erkennt diesen Zusammenhang an einer kanonischen Darstellung des Gebildes $f(xy)=0$, die eben auf der Benutzung zweier Functionen $\xi=\xi_\lambda$, $\eta=\xi_\mu$ jener Reihe zur Transformation beruht. Nimmt man λ und μ relativ prim an (z. B. $=\rho+1$ und $\rho+2$ für eine nicht-specielle Stelle $x'y'$), so wird die transformirte Gleichung $\overline{f}(\overset{\mu}{\xi}, \overset{\lambda}{\eta})=0$ irreductibel und hat die besondere Eigenschaft, im Unendlichen nur ein Element zu besitzen ($\xi_t^\infty=t^{-\lambda}$, $\eta_t^\infty=t^{-\mu}\mathfrak{P}(t)$).

Für diese transformirte Gleichung $\overline{f}(\xi, \eta)=0$ werden die nach der Methode der ganzen algebraischen Functionen (Nr. 4, 5) zu bildenden Ausdrücke besonders einfach. Diejenigen (ganzen algebraischen) Functionen, welche nur in $\xi=\infty$, $\eta=\infty$ unendlich werden, seien, ihren Graden (VI. Nr. 8) nach geordnet:

$$\xi_{\lambda_1}, \xi_{\lambda_2}, \xi_{\lambda_3}, \ldots \quad (\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3<\ldots)$$

Man hat dann in

$$\overline{H}(\xi\eta;\xi'\eta')=\frac{\overline{f}(\xi\eta')-\overline{f}(\xi\eta)}{(\eta'-\eta)(\xi'-\xi)\overline{f}'(\xi'\eta')_2}-\sum_i A_i\xi_{\lambda_i}-A_0$$

eine Function von $\xi\eta$ vor sich, welche nur in $\xi'\eta'$ (wie $H(\xi\eta;\xi'\eta')$) zu ∞^1 und im Unendlichen unendlich wird, und zwar können und sollen die A_i so bestimmt werden, dass für $\xi\eta=\xi_t^\infty\eta_t^\infty$ (in der Umgebung der unendlich fernen Stelle) die Potenzen $t^{-\lambda_1}, t^{-\lambda_2}, t^{-\lambda_3}, \ldots$ alle herausfallen, A_0 so, dass auch das constante Glied fehlt:

$$\overline{H}(\xi_t^\infty\eta_t^\infty:\xi'\eta')=\frac{G_1(\xi'\eta')}{\overline{f}'(\xi'\eta')_2}t^{-\varkappa_1}+\frac{G_2(\xi'\eta')}{\overline{f}'(\xi'\eta')_2}t^{-\varkappa_2}+\cdots$$
$$+\frac{G_\varrho(\xi'\eta')}{\overline{f}'(\xi'\eta')_2}t^{-\varkappa_\varrho}-\sum_{\nu=1}^{\infty}\overline{H}^{(\nu)}(\xi'\eta')t^\nu.$$

Diese eindeutig definirte Function $\overline{H}(\xi\eta;\xi'\eta')$ von $\xi\eta$, welche in $\xi'\eta'$ Integrand dritter Gattung ist, vertritt vollständig die frühere $H(xy;x'y')$. An Stelle der früheren ρ Integranden erster Gattung $H(x'y')_\alpha$ treten dabei die Ausdrücke:

$$\overline{\mathrm{H}}(\xi'\eta') = \frac{G_\varrho(\xi'\eta')}{f'(\xi'\eta')}$$

und an Stelle der Integranden zweiter Gattung die folgenden Entwicklungscoefficienten $\overline{\mathrm{H}}^{(\nu)}(\xi'\eta')$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$. Entwickelt man

$$\mathrm{H}(\xi_t'\eta_t' ; \xi_\tau'\eta_\tau')\frac{d\xi_\tau'}{d\tau}$$

nach t und τ, so wird der Coefficient von t^{ν}

$$\overline{\mathrm{H}}(\xi_\tau'\eta_\tau')_\nu \frac{d\xi_\tau'}{d\tau} = \tau^{\nu} + \cdots$$

Aus diesem Verhalten der Integranden erster Gattung $\mathrm{H}(\xi'\eta')$ im Unendlichen erschliesst Weierstrass nicht nur ihre Unabhängigkeit, sondern auch die Anzahl ϱ der Lücken $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$, und damit eine weitere Bedeutung dieser ϱ Lückenzahlen.

Auch die Aufstellung eines „Fundamentalsystems" (s. Abschn. VI, Nr. 4) für die ganzen algebraischen Functionen $\xi_\lambda, \xi_{\lambda_\iota}, \ldots$ gestaltet sich hier einfach (cf. Schottky, l. c.). Sei $\lambda_1 = \lambda$ die niedrigste der Zahlen; seien $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{\lambda-1}$ der Reihe nach die ersten weiteren Zahlen, von denen jede mit den vorhergehenden und mit λ incongruent mod. λ ist; dann kann man jede der Zahlen λ_ι in der Form darstellen:

$$\lambda_\iota = l_\iota \lambda + \mu_\varkappa \quad (\mu_1 = 0 \text{ eingeschlossen}, \ l_\iota \geqq 0)$$

und für ξ_{λ_ι} wählen:

$$\xi_{\lambda_\iota} = (\xi_\lambda)^{l_\iota}\, \xi_{\mu_\varkappa}.$$

Alle ganzen algebraischen Functionen erhält man also durch den Ansatz:

$$\xi = A_0 + A_1\, \xi_{\mu_1} + \cdots + A_{\lambda-1}\, \xi_{\mu_{\lambda-1}},$$

wo die A rationale ganze Functionen von ξ sind.

Die Zahlenreihe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ charakterisirt unter den demselben ϱ zugehörigen Klassen von Gebilden besondere Klassen, welche weniger als $3\varrho - 3$ willkürliche Modulwerte enthalten können. Indem man über die ausserdem noch willkürlichen Constanten in den Functionen der verschiedenen Grade, zunächst etwa in ξ_λ und den $\xi_{\mu_\varkappa}$, in bestimmter Weise verfügt, erhält man ein System von Functionen, das für die ganze durch $f(\xi\eta) = 0$ definirte Klasse invariant ist. Die zwischen zwei invarianten Functionen ξ, η bestehende Gleichung $\overline{f}(\xi\eta) = 0$, die Weierstrass'sche Normalgleichung, enthält nur noch die Moduln der Klasse in ihren Coefficienten.

In den niedrigsten Fällen $\varrho = 1, 2, 3$ benutzt Weierstrass die obige Darstellung aller ganzen algebraischen Functionen ξ auch zur Auffindung von Normalgleichungen mit rational eingehenden Moduln und

erhält so für $\rho = 3$ die Curven vierter Ordnung mit Undulationspunkt oder den hyperelliptischen Fall. Weierstrass hält diese Methode, welche die Kenntnis der vielfachen Stellen nicht voraussetzt, einer Ausdehnung auf den allgemeinsten Fall für fähig, ohne dass sich dies jedoch aus den behandelten Fällen klar erkennen liesse. Jedenfalls scheint es erwünscht, die von Weierstrass, Schottky und Valentin (l. c.) erledigten Beispiele (bei Letzterem insbesondere die Fälle $\lambda = 2, 3, 4$) um andere zu vermehren und die Methode in der Richtung zu erweitern, dass man sich zur Unterscheidung der Klassen nicht gerade auf Gebilde mit einem Element im Unendlichen beschränkt. — Eine andere Frage ist freilich die, wie man für vorliegende Gebilde $f(xy) = 0$ die Moduln aus den Coefficienten von $f = 0$ zusammensetzt, d. h. wie man $f = 0$ auf jene Normalform $\bar{f}(\xi\eta) = 0$ transformirt. Eine rationale Lösung dieser Frage kann im allgemeinen nicht existiren, vielmehr müssen immer — auch von den Bedingungen für die zu suchenden Formen in den singulären Stellen von $f(xy) = 0$ abgesehen — gewisse höhere Gleichungen, welche die Stelle $x'y'$ isoliren, als gelöst vorausgesetzt werden. Adjungirt man in analoger Weise auch die „Specialpunktgruppen", deren Brill-Noether bei der Bestimmung ihrer Normalformen, in welchen nur die Moduln vorkommen, bedürfen, so enthalten diese Normalformen die Moduln ebenfalls nur in rationaler Form; alsdann ist sogar für die „Normalraumcurve $(2p-2)$ter Ordnung der φ" überhaupt keine höhere Gleichung zu lösen.

Die Weierstrass'schen Functionen $\xi_{\lambda_1}, \xi_{\lambda_2}, \ldots$ lassen sich auf einer berandeten Riemann'schen Fläche, die durch geschlossene Curven aus der gewöhnlichen Ebene ausgeschnitten wird, als solche eindeutige Functionen der Fläche definiren, welche am Rande reell sind, im Inneren überall den Charakter von rationalen Functionen haben und nur an einer Stelle unendlich werden. Wir verweisen deshalb und wegen ihres dabei hervortretenden Zusammenhanges mit der Existenz der Periodenwege u. s. w. auf Schottky's Schrift. Sie beweist, dass die Weierstrass'schen Sätze über algebraische Functionen auch in den auf Riemann'schem Wege zu behandelnden Problemen über conforme Abbildung, welche der neuen Theorie der „automorphen" (Fuchs'schen etc.) Functionen zu Grunde liegen, ihre Bedeutung haben.

Aus dem Normalgebilde mit einem unendlich-fernen Element schliesst Weierstrass auf die Monogeneität des irreductibeln algebraischen Gebildes. Denn zwei Elemente, welche zu irgend zwei Stellen der Umgebung von $\xi = \infty$, $\eta = \infty$ gehören, lassen sich in einander fortsetzen;

und somit auch zwei beliebige Elemente des Gebildes. — Auch in den transcendenten Teilen der Theorie spielt das Normalgebilde eine Rolle, indem die Integrationswege, die um die unendlich-ferne Stelle desselben führen, leicht deformirbar sind. Dies vereinfacht die Theorie der cyklischen (Perioden-) Wege.

In der Vorlesung von 1874/5 hat Weierstrass den Functionen ξ_ν eine noch mehr systematische Stellung zugewiesen. Er leitet dieselben aus den in Nr. 4 und 5 bezeichneten Functionen ab und definirt die Zahl ρ als Lückenzahl. Die Stelle der in Nr. 8 besprochenen Functionen nehmen die ξ_ν ein; und der Beweisgang, nur bezogen auf das kanonische Gebilde $f = 0$, ist analog dem in Nr. 8—13 angegebenen. Diese Vorlesung bildet also eine Zwischenstufe zwischen denen von 1869 und von 1875/6.

17. Nachdem wir über den wesentlichen Inhalt der Weierstrass'schen algebraischen Theorie berichtet haben, hätten wir noch deren Stellung zu der Riemann'schen und zu der späterer Autoren principiell und historisch zu beleuchten. Einzelne Beziehungen sind indessen in dem Berichte selbst angedeutet worden (vgl. VI, Nrn. 5, 8, 11, 17; VII, Nrn. 4, 13, 15, auch 16); andere, welche die systematische Anordnung betreffen, gehen aus der bisherigen Besprechung unmittelbar hervor. Sie sind, Riemann gegenüber, mehr negativer Art, insofern die Art der Begründung von Weierstrass, nämlich durch Operation an einer bestimmt vorliegenden algebraischen Gleichung, von derjenigen Riemann's, die sich auf die Fläche stützt, wesentlich abweicht, auch weil die functionentheoretischen Schlüsse — Definition, Fortsetzung eines Elements — verschiedene Grundlage haben. Weierstrass entbehrt wohl dabei des Vorzuges der Anschaulichkeit in der Beweisführung, indem bei ihm überall das Geometrische hinter dem Analytischen zurücktritt, wie er denn selbst die Existenz der Periodenwege aus analytischen Relationen erschliesst; aber die Beschränkung auf vorliegende algebraische Functionen und analytische Ausdrücke gestattet ihm auf der anderen Seite, solcher unsicheren Existenzbeweise, wie sie aus dem Dirichlet'schen Princip oder dessen Aequivalenzen folgen, ganz zu entraten. Mit Clebsch-Gordan hat Weierstrass zunächst den Ausgangspunkt gemein; ebenso mit Brill-Noether; die Letzteren verzichten jedoch für den algebraischen Teil auf functionentheoretische Hülfsmittel, während sie, wie Weierstrass, die geometrisch-anschaulichen nicht heranziehen.

Rückblick.

Die Frage, ob und in welchem Umfange Riemann's Arbeit auf die Ausgestaltung der Weierstrass'schen Theorie eine Einwirkung aus-

geübt hat, ob und inwieweit etwa eine solche in Bezug auf andere Autoren stattgefunden hat, muss, da Weierstrass seit jenen ersten Arbeiten sich jeder zusammenfassenden Publication enthalten und seine Theorie erst ein Jahrzehnt nach dem Erscheinen von Riemann's Arbeit seinen Schülern mitzuteilen begonnen hat, hier dahin gestellt bleiben. Auf jeden Fall ist in seinen Methoden ein originaler und durchaus einheitlicher Zug zu erkennen, wie denn auch seine Beweismittel sich auf die consequente Ausbildung derjenigen beschränken, welche er schon in den frühesten Arbeiten angedeutet hatte. Dazu gehört vor allem das Abel'sche Theorem, welches ihm zum Erkennen einmal der Existenz mehrfach periodischer Functionen und dann der Form ihrer Darstellung dient; in zweiter Linie das Theorem von der Vertauschung von Argument und Parameter, dessen Bedeutung schon in der Programmschrift 1849 und in (2), 1857 hervorgehoben wird; für die Zusammensetzung der Functionen und Integranden aus einfacheren der Cauchy'sche Residuensatz; für die wirkliche Darstellung jener Formen, aus deren Quotienten die periodischen Functionen entstehen, — ein Grundproblem, auf das Weierstrass immer wieder zurückkommt — das schon im J. für Math. Bde. 47 und 52 entwickelte Verfahren.

Die Ausbildung dieser Hülfsmittel ist zugleich im Sinne einer steigenden Verallgemeinerung und immer schärferen Beweisführung vor sich gegangen. So ist zuletzt eine algebraische Theorie entstanden, welche, wenn auch nur in der Form einer Einleitung zur transcendenten übermittelt, doch in sich abgerundet und gleichförmig durchgearbeitet erscheint, überall, auch in den Eliminationspartien, streng begründet ist und die allgemeinsten algebraischen Gebilde $f(xy) = 0$ umfasst. Was den letzteren Umstand angeht, so muss noch hervorgehoben werden, dass die Allgemeinheit der Voraussetzungen in Bezug auf die Gleichung $f(xy) = 0$ in jedem Beweise einzeln in Rechnung gezogen, und nicht etwa das Gebilde vorher auf ein nicht-singuläres transformirt wird. Trotzdem bleiben die Beweismittel an sich verhältnismässig einfache, und die wirklichen Bildungen der algebraischen Functionen werden wenigstens zum Teil weiter durchgeführt, als in den übrigen Theorien. Aber die Entwicklungen sind mitunter weitläufig und, verbunden mit Excursen in das Gebiet der Functionentheorie, nicht immer leicht zu übersehen. Wir haben deshalb versucht, den verwickelten Aufbau der Formeln der Weierstrass'schen Theorie durch Trennung der Functions- und Integranden-Eigenschaften, die bei Weierstrass nicht explicit vorgenommen wird, zu gliedern.

In wieweit den von Weierstrass aufgestellten Bildungen die Eigenschaft der Invarianz zukommt, wird noch später zu besprechen sein (Abschn. VIII. Nr. 7).

Von den angeführten Arbeiten abgesehen, ist die Weierstrass'sche Theorie der algebraischen Functionen bisher nicht weiter auf algebraische Probleme angewendet worden.

B. E. B. Christoffel. Erster Teil.

Algebraischer Beweis des Satzes von der Anzahl der linear unabhängigen Integrale erster Gattung. Annali di Mat. (2), t. X, p. 81—100. Febr. 1880.

Die Anzahl der Integrale erster Gattung.

18. Diese kurze Abhandlung Christoffel's hat den Zweck, an einem der Sätze der Theorie der algebraischen Functionen die algebraischen Beweismethoden anzuzeigen, welche er in seinen Vorlesungen ausgebildet hat, und die er der in der Fussnote*) citirten Arbeit ohne Beweis zu Grunde legt. Die Betrachtungen sind den Weierstrass'schen verwandt, aber, weil direct nur das einzelne Problem der Darstellung der Integranden erster Gattung, und dies nur bei [illegible] singulärer Grundcurve, angegriffen wird, einfacher und durch [illegible] [illegible]. Eine Curve mit höheren Singularitäten denkt sich Christoffel mit Riemann durch Grenzbetrachtung aus einer solchen mit gewöhnlichen, getrennten Doppelpunkten abgeleitet; dagegen lässt er die Reducibilität der Grundcurve zu. Wir beschränken uns in diesem Bericht auf den Fall einer irreductibeln Curve, weil der Einfluss der Reducibilität auf die Zahl der Integrale erster Gattung auch hierbei schon ersichtlich wird (wie übrigens, nebenbei bemerkt, auch in dem Brill-Noether'schen Beweise).

Christoffel geht von einer Gleichung $F(s, z) = 0$ mit r Doppelpunkten aus, für welche angenommen wird, dass die n Werte von s für $z = \infty$ und die m Werte von z für $s = \infty$ endlich und von einander verschieden seien. Ihre über der Z-Ebene ausgebreitete Riemann'sche Fläche besitze ω Verzweigungspunkte. Christoffel definirt alsdann die Geschlechtszahl p durch die Gleichungen:

$$p = (m-1)(n-1) - r = \frac{\omega}{2} - (n-1) = \omega + r - (m+1)(n-1).$$

*) Die Arbeit „Ueber die kanonische Form der Riemann'schen Integrale erster Gattung", t. IX der Annali di Mat., wird im VIII. Abschnitt zur Besprechung kommen.

und beweist auf algebraischem Wege, dass die Zahl der linear-unabhängigen Integranden erster Gattung w' gleich p ist. Wir teilen den Gedankengang mit, der zu diesem Ergebnisse führt.

Ist

$$w = \int w' \, dz = \int \psi(s, z) dz$$

ein endliches Integral, so wird $w' = \psi(s, z)$ in den ω Verzweigungspunkten zu ∞^1, in den r Doppelpunkten zu $\frac{0}{0}$. Christoffel setzt daher w' additiv aus $\omega + r$ linear-unabhängigen Termen zusammen, die sich einzeln auf je eine dieser Stellen $s = \alpha_i$, $z = \beta_i$ $(i = 1, 2, \ldots, \omega + r)$ beziehen:

$$1) \quad w' = \psi(s, z) = \sum_{i=1}^{\omega+r} A_i T_i(s, z) = \sum_i A_i \frac{F(s, \beta_i)}{(s-\alpha_i)(z-\beta_i)}.$$

$T_i(s, z)$ ist also identisch mit dem Weierstrass'schen $f(\alpha_i \beta_i s)/(z-\beta_i)$ (s. VII, Nr. 4), und diese Darstellung stimmt im wesentlichen mit jener von $H(z, s)$ (VII, Nr. 12) überein. Aber der Beweis ist viel directer und beruht auf der Behandlung einer rationalen Function von z allein, nämlich von:

$$\psi(t, z) = U + U_1 t + \cdots + U_{n-1} t^{n-1},$$

wo t eine fest angenommene Grösse ist, und die U in z rational sind. Aus der Lagrange'schen Interpolationsformel*)

$$\psi(t, z) = \sum_{h=1}^{n} \frac{w'_h}{F'(s_h, z)} \frac{F(t, z)}{t - s_h}, \quad \text{wo} \quad F'(t, z) = \frac{\partial F(t, z)}{\partial t},$$

$s_1, \ldots, s_n$ die Werte von s aus $F(s, z) = 0$; $w'_h = \psi(s_h, z)$,

folgt nämlich für die rationale Function $\psi(t, z)$ von z, dass sie nur in den $\omega + r$ Stellen $z = \beta_i$ unstetig wird. Betrachtet man nun einen Ausdruck von der Form:

$$\psi(t, z) - \sum_{i=1}^{\omega+r} A_i T_i(t, z),$$

so ist derselbe nirgends unstetig, also constant, und folglich gleich 0, indem derselbe für $z = \infty$ zu 0 wird.

---

*) Nimmt man $\psi(s, z)$ als eindeutige Function der Stelle s, z von $F(s, z) = 0$ an, so liefert obige Formel die Function $\psi(t, z)$ und damit die U als eindeutige Functionen von z, und speciell als rationale Functionen von z, wenn $\psi(s, z)$ nur polare Unstetigkeiten hat. Dieser Schluss findet sich bei Christoffel, wie bei Weierstrass. Prym hatte (J. f. Math. 83) denselben bei Riemann vermisst, weil die Riemann'sche Schlussweise auf einer Abzählung an Punktgruppen beruhe, die nicht durch Functionen φ verknüpft seien; indessen wäre auch diese Betrachtung leicht dadurch zu vervollständigen, dass man vorher eine etwaige Specialgruppe durch eine weitere Gruppe zu einer Nicht-Specialgruppe ergänzt.

Dabei hat man, da $\psi(t, z)$ für $z = \infty$ mit den w'_h zu 0^2 wird, für die A_i auch noch die Bedingung:

$$2) \qquad \sum_i A_i \frac{F(t, \beta_i)}{t - \alpha_i} = 0.$$

Ferner erkennt man die lineare Unabhängigkeit der $\omega + r$ Grössen $T_i(s, z)$ daraus, dass sie je in einem der $\omega + r$ Punkte ein besonderes Verhalten (∞^1, bezw. $\frac{0}{0}$) zeigen.

Weitere Bedingungen für die A_i ergeben sich nun noch aus den m Stellen $s = \infty$, wo die $T_i(s, z)$ noch unendlich werden. Aus 1) hat man zunächst:

$$3) \qquad w' = \psi(s, z) = \frac{G(\overset{n-1}{s}, \overset{\omega+r-2}{z})}{Q(z)},$$

wo $Q(z) = (z - \beta_1) \ldots (z - \beta_{\omega+r})$; G in s und in z ganz, von den angegebenen Graden, ist. Hier führt nun Christoffel, wie Weierstrass, statt der Potenzen von s die aus

$$F(s, z) \equiv as^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

gebildeten ganzen algebraischen Functionen von z:

$$f_\mu(s, z) = as^\mu + a_1 s^{\mu-1} + \cdots + a_\mu = -\frac{a_{\mu+1}}{s} - \cdots - \frac{a_n}{s^{n-\mu}}$$

$$(\mu = 1, \ldots, n-1)$$

ein, die für $s = \infty$ je zu 0^1 werden, sodass, wegen der Endlichkeit, G die Form erhält:

$$4) \qquad G(s, z) = A_0(z) f_{n-1}(s, z) + \cdots + A_{n-2}(z) f_1(s, z) + A_{n-1}(z),$$

wo die $A(z)$ ganze rationale Functionen von z, A_{n-1} vom Grade $\omega + r - 2$, die übrigen vom Grade $\omega + r - 2 - m$ sind. Durch Vergleichen von 3), 4) mit 1) ergeben sich die Bedingungen:

$$5) \qquad \sum_{i=1}^{\omega+r} A_i \alpha_i^\nu \beta_i^\mu = 0 \quad (\nu = 0, 1, \ldots, n-2;\ \mu = 0, 1, \ldots, m),$$

welche für die Endlichkeit von $\int w' dz$ notwendig, aber auch hinreichend sind, indem auch 2) eine Folge derselben ist. — Man hat nur noch zu zeigen, dass diese $(m+1)(n-1)$ Bedingungsgleichungen zwischen den $\omega + r$ Grössen A_i auch linear-unabhängig von einander sind.

Man kann die Gleichungen 5) dahin zusammenfassen, dass für jede ganze Function $g(\overset{n-2}{s}, \overset{m}{z})$ sein muss:

$$\sum_{i=1}^{\omega+r} A_i g(\alpha_i, \beta_i) = 0.$$

Wären nun diese Gleichungen von einander abhängig, so würde eine

von den A unabhängige Combination $g(\overset{n-2}{s}, \overset{m}{z})$ existiren, welche genau in denselben Stellen und in derselben Ordnung, wie $F'(s, z)$, verschwinden (also $g(\alpha_i, \beta_i) = 0$), und in denselben $2m(n-1) = \omega + 2r$ Stellen und derselben Ordnung, wie $F'(\overset{n-1}{s}, \overset{m}{z})$, unendlich würde. Bei irreductibler Grundcurve $F(s, z) = 0$ ist aber dieses g, das nur auf den $(n-2)$ten Grad in s steigt, identisch gleich null.

Hiermit hat Christoffel den Beweis erbracht, dass die Anzahl der linear-unabhängigen Integranden erster Gattung $\omega + r - (m+1)(n-1) = p$ beträgt.

Die Riemann'sche Form

$$w' = \frac{\varphi(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z})}{F'(s, z)}$$

des Integranden erster Gattung ergiebt sich daraus, dass $\sum_{h=1}^{n} w'_h \frac{F(t, z)}{t - s_h}$ für jedes t eine ganze rationale Function von z wird (in t vom Grade $n-2$ wegen $\sum w'_h = 0$). Für $\varphi(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z})$ bestehen nur die r Adjunctionsbedingungen

$$\varphi(\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa) = 0, \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, r),$$

wo sich die $\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa$ nur auf die Doppelpunkte von $F(s, z) = 0$ beziehen: auch diese r Gleichungen müssen also, damit nur noch p Integranden erster Gattung übrig bleiben, von einander linear-unabhängig sein. Es folgt daraus noch, dass man in 5) die r auf Doppelpunkte bezüglichen $A_\varkappa$ nicht alle willkürlich annehmen, aber als von null verschieden bestimmen kann.

Seine weitere Theorie.

19. Obwohl Christoffel die weiteren Teile der Theorie nur andeutet, lassen sich ihre Züge doch erkennen. Die Bildung der Integranden dritter Gattung, $dR(\varepsilon)/dz$, geschieht genau so, wie in Formel 1): nur dass noch ein Glied von der Form

$$-\frac{1}{F'(\sigma, \zeta)} \cdot \frac{F(s, \zeta)}{(s-\sigma)(z-\zeta)}$$

hinzukommt, wo, abgesehen von den n Stellen $z = \infty$, nur $\varepsilon = \sigma, \zeta$ der Unstetigkeitspunkt von $R(\varepsilon)$ ist. Die Differenz zweier Ausdrücke $R(\varepsilon) - R(\varepsilon')$ liefert das Integral dritter Gattung mit nur den beiden Parametern $\varepsilon = \sigma, \zeta$ und $\varepsilon' = \sigma', \zeta'$, und lässt sich auch in die Riemann'sche Form überführen. Die Differentiation nach ζ giebt den Integranden zweiter Gattung.

Für die Darstellung einer algebraischen Function $S(s, z)$, die in dem

Punkte $\varepsilon_\varkappa$ zu ∞^1 wie $E_\varkappa(z-\zeta_\varkappa)$ ($\varkappa = 1, 2, \ldots q$) wird, denkt Christoffel sich das Product $S.w'$, wo w' irgend ein Integrand erster Gattung ist, durch eine Summe von Integranden dritter und erster Gattung ausgedrückt:

$$S.w' = -\sum_{\varkappa=1}^{q} E_\varkappa\, w'(\varepsilon_\varkappa)\frac{dR(\varepsilon_\varkappa)}{dz} + \sum_{i=1}^{p} c_i\, w_i(z) + c.$$

Hierdurch wird S als Quotient aus einem Integranden dritter Gattung, dividirt durch einen Integranden erster Gattung dargestellt.

Die Bestimmung der c_i in dieser Formel würde diejenigen Gleichungen zwischen den $w_i(\varepsilon_\varkappa, \zeta_\varkappa)$ liefern, aus welchen die Unterscheidung zwischen Special- und Nicht-Specialgruppen, also der Riemann-Roch'sche Satz, sich ergiebt (s. VII, Nr. 5, 9)).

Man erkennt aus dem Gesagten, dass die Verwandtschaft der Christoffel'schen Ausdrücke mit den Weierstrass'schen sich auf die Bildung der Integranden beschränkt. Die der Functionen ist verschieden, insofern Christoffel nicht von den beiden Variabelnpaaren in den Integranden dritter Gattung Gebrauch macht, also die Functionen des Parameters nicht benutzt. Die Darstellung der Functionen S könnte man mit der in Abschn. VIII zu besprechenden invarianten insofern in Beziehung setzen, als S als Quotient erscheint, dessen Nenner eine beliebige φ-Form ist; nur ist der Zähler, der Integrand dritter Gattung, selbst nicht auf invariante Weise definirt; nicht einmal eine Beziehung zu einer solchen ist angedeutet.

Sieht man von dem Umstande ab, dass auch bei Christoffel die Theorie der algebraischen Functionen den Durchgangspunkt durch die Theorie der Integranden nimmt und im wesentlichen nicht-invariante Bildungen benutzt, so ist auf die Einfachheit des Gedankenganges und der Entwicklung hinzuweisen, woran aber die Beschränkung auf gewöhnliche Singularitäten ihren Anteil hat.

VIII. Abschnitt.

Darstellung des Gebildes, seiner Formen und Functionen in invarianter Gestalt.

Gruppirung.

1. Wir haben nunmehr eine allgemein-invariantentheoretische Richtung zu besprechen, welche von der Darstellung des algebraischen Gebildes durch Relationen zwischen den φ-Formen ausgeht. An dieselbe schliessen sich weiterhin die Transformationen der Gebilde in sich an.

Neben diese allgemeine Auffassung stellt sich eine Reihe von Theorien, welche kanonische Darstellungen des algebraischen Gebildes, Darstellungen mittelst irgendwie ausgezeichneter einzelner Functionen, anstreben oder von solchen ausgehen. Dazu gehört:

a) die schon besprochene (VII, A, Nr. 16) Weierstrass'sche Verwendung von Functionen, welche nur an einer Stelle des Gebildes, die insbesondere noch eine ausgezeichnete für die Klasse sein kann, unendlich werden;

b) eine von Christoffel ausgeführte Untersuchung über eine kanonische Form, welche man der Gleichung des Gebildes geben kann, indem man irgend eine Function z, welche der Parameter einer einfach-unendlichen Vollschar ist, als unabhängige Variable zu Grunde legt, als abhängige Variable aber den Integranden s erster Gattung;

c) die Einführung der „kanonischen Riemann'schen Fläche" durch Klein, d. h. die Auszeichnung einer Variabeln z, welche eine solche „Specialfunction" (nämlich in der Form φ_1/φ_2 darstellbare Function) ist, dass eine Potenz derselben eine in einer Gruppe von $2p-2$ Punkten wirklich unendlich werdende „Specialfunction" ist;

d) kann man die an die Theorie der Wurzelfunctionen anknüpfen-

den Darstellungen, insbesondere die von Schottky und Frobenius, hierherrechnen.

Wir berichten in A über die allgemeine Richtung, in B und C über die Darstellungen b), c), während die Untersuchungen d) im Abschnitt IX mitbesprochen werden.

A. Allgemein-invariantentheoretische Richtung.

Litteraturverzeichnis:

H. Weber,

(1) Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3. Berlin, Reimer 1876 (1874 in Göttingen eingereicht).

Dazu: Bemerkungen zu dieser Schrift, J. f. Math. 88. Juni 1879.

(2) Ueber gewisse in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmefälle. Math. Ann. 13 (p. 35—48). Sept. 1877.

L. Kraus, Note über aussergewöhnliche Specialgruppen auf algebraischen Curven. Math. Ann. 16. Nov. 1879.

M. Noether,

(1) Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen. Math. Ann. 7, Aug. 1880 (vorher im Auszug in Erlanger Sitzungsber., Mai 1880).

(2) Note über die Normalcurven für p = 5, 6, 7. Math. Ann. 26. Jan. 1885.

(3) Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen. Math. Ann. 23. Oct. 1883.

(4) Zur Theorie der Abel'schen Differentialausdrücke und Functionen. Math. Ann. 37. Erster Teil: Differentialausdrücke; zweiter Teil: Functionen. 1890 (s. auch Erl. Sitzungsber. 1884 und 1886).

2. Da die Quotienten aus irgend zweien der zum algebraischen Gebilde gehörigen p Formen φ für rational-eindeutige Transformation des Gebildes invariant sind (Abschn. V. E), sind es auch alle solche algebraischen Functionen des Gebildes, welche zugleich Quotienten nullter Dimension der φ sind. Dass diese Eigenschaft aber allen algebraischen Functionen des Gebildes zukommt, und dass man, um sie in diese Form zu bringen, nur die Gleichungen des Gebildes selbst in invariante Form umzuschreiben braucht, wodurch „die Untersuchungen nicht nur an Allgemeinheit, sondern auch an Einfachheit und Eleganz gewinnen“, diesen Umstand hat Weber in (1) für p = 3, in (2) für ein allgemeines p zuerst betont.

Die φ-Relationen.

In der That ist schon im nicht-hyperelliptischen Falle die Gleichung der Normalcurve von Clebsch-Gordan, einer ebenen Curve (p+1)ter

Ordnung, im wesentlichen nichts Anderes, als eine homogene Gleichung zwischen drei Formen φ: alle zugehörigen algebraischen Functionen sind also Functionen nullter Dimension dieser drei Formen φ. Nur ist, sobald $p > 3$, diese Relation nicht die einfachste und hat, auch nach linearer Transformation der Curve, noch zu viele Constanten, während sie für $p = 3$ die einzige überhaupt existirende Relation zwischen den φ ist, und jede Relation vierten Grades zwischen den drei Grössen φ, wenn sie nur eine Curve ohne mehrfache Punkte vorstellt, eine Klasse aus $p = 3$ völlig definirt. Für $p > 3$ denkt sich Weber in (2) die Normalform des Gebildes durch das rationale Gleichungssystem zwischen den φ, das aus der Curve f durch Transformation mittelst aller p Formen φ entsteht, also durch die in V. Nr. 62 genannte Normalcurve N_{2p-2} dargestellt, und definirt, analog wie es (V. Nr. 63) von Brill-Noether für $\tau = 0$ überhaupt geschieht, die Moduln als die bei linearer Transformation absoluten Invarianten dieses Systems. Vor allem aber fragt Weber (wie dies Riemann nach der zweiten Auflage der Werke — vgl. V. Nr. 21 — in seiner Vorlesung — gethan) nach der Zahl der quadratischen Relationen zwischen den φ, indem er durch den Inbegriff der Relationen niedrigster Ordnung zwischen den φ das Gebilde zu charakterisiren sucht.

Da die allgemeinste Function, welche in den $2(2p-2)$ Nullpunkten einer $\Phi_0^{(2)}$, wo $\Phi_0^{(2)}$ ein ganzer quadratischer homogener Ausdruck in den φ ist, zu ∞^1 wird, noch $3p-3$ linear und homogen eingehende Constanten besitzt, müssen zwischen den $\frac{1}{2}p(p+1)$ quadratischen Formen $\Phi^{(2)}$ der φ, indem $\Phi^{(2)}/\Phi_0^{(2)}$ zu jenen Functionen gehört, nach Weber (2) mindestens $\frac{1}{2}(p-2)(p-3)$ linear-unabhängige lineare Relationen bestehen. Aber es ist sehr wohl denkbar, dass, wie es im hyperelliptischen Falle wirklich eintritt, auch in anderen, ja im allgemeinen Falle, noch weitere lineare Relationen zwischen den $\Phi^{(2)}$ existiren; mit anderen Worten: jene Function $\Phi^{(2)}/\Phi_0^{(2)}$ braucht nicht die allgemeinste der genannten Art zu sein, oder die $\Phi^{(2)} = 0$ könnten aus dem Gebilde keine Voll-, sondern nur eine Teilschar (vgl. V. Nr. 56) ausschneiden — wie etwa in unserem Raume die Flächen zweiter Ordnung aus einer Raumcurve, die nicht der vollständige Schnitt zweier Flächen ist, im allgemeinen keine Vollschar ausschneiden. — Für die invariante Darstellung blieb also noch eine Lücke auszufüllen.

Kraus (Math. Ann. 16) sucht dies zu thun, indem er die $\Phi^{(2)}$ ohne weiteres mit den Curven $C_{2(n-3)}$ der Ordnung $2(n-3)$ identificirt, welche jeden i-fachen Punkt der zu Grunde gelegten Curve f_n zum $2(i-1)$-fachen Punkte haben. Aber, abgesehen davon, dass der weitere Schluss

für die C_{2n-3} auf nicht strenger Abzählung beruht, wird die Möglichkeit nicht erörtert, dass die $\Phi^{(2)}$ nur einen Teil der C_{2n-3} bilden. Bei **Noether** (1) wird die Frage erledigt, und zwar nicht nur in Bezug auf die Scharen $\Phi^{(2)}$, sondern für die Scharen $\Phi^{(\mu)}$ überhaupt, wo $\Phi^{(\mu)}$ eine Form μter Dimension in den $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ ist. Das Resultat ist, dass die Anzahl der linear-unabhängigen Relationen μter Dimension ($\mu > 1$) in allen Fällen, einzig den hyperelliptischen ausgenommen,

$$\frac{p(p+1)\ldots(p+\mu-1)}{1 \cdot 2 \ldots \mu} - (2\mu-1)(p-1)$$

beträgt; dass also die $\Phi^{(\mu)}$ alsdann **Vollscharen** des Gebildes liefern, d. h. dass $\Phi^{(\mu)}/\Phi_0^{(\mu)}$ wirklich die allgemeinste Function ist, welche in der von $\Phi_0^{(\mu)}$ gelieferten Gruppe von $\mu(2p-2)$ Punkten, oder einem Teil derselben, zu ∞^1 wird. Es werden, um den Beweis zu führen, zuerst für $\mu = 2$, $3(p-1)$ linear-unabhängige Ausdrücke $\Phi^{(2)}$ wirklich aufgestellt, und zwar in der Form $\varphi_1 \Phi^{(1)} + \varphi_2 \Phi'^{(1)} + \varphi_3 \Phi''^{(1)}$, wo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ gewissen Bedingungen genügen; dann für $\mu = 3$ analog $5(p-1)$ linear-unabhängige Ausdrücke $\Phi^{(3)}$ in der Form $\varphi_1 \Phi^{(2)} + \varphi_2 \Phi'^{(2)} + \varphi_3 \Phi''^{(2)}$; für $\mu > 3$ endlich $2(\mu-1)(p-1)$ linear-unabhängige $\Phi^{(\mu)}$ in der Form $\varphi_1 \Phi^{(\mu-1)} + \varphi_2 \Phi'^{(\mu-1)}$.

3. Dieser Satz ist für die Darstellung der algebraischen Functionen — vom hyperelliptischen Fall abgesehen, den schon **Abel** und **Weierstrass** angegriffen und leicht erledigt hatten — insofern grundlegend, als durch ihn alle Sätze, welche ihrem begrifflichen Inhalte nach zu den invarianten gehören müssen, und die noch bei **Riemann**, **Weierstrass**, **Clebsch-Gordan**, zum grösseren Teil auch bei **Brill-Noether**, in einer an die speciell ausgewählte Darstellungsform des Gebildes, wie $f_n(s, z) = 0$, geknüpften Ausdrucksweise ausgesprochen sind, in einer für **alle** Darstellungsformen gültigen bestimmten Formulirung erscheinen, welche ihre eigentliche Bedeutung erst blosslegt. So sind z. B., wie bei **Weber** (1) für $p = 3$, die zu f_n adjungirten Curven $(n-2)$ter Ordnung, welche durch $n-2$ Punkte des Schnittes einer Geraden mit f_n gehen, — Curven, die im Zähler des Integranden dritter Gattung bei **Clebsch-Gordan** auftreten — durch Formen $\Phi^{(2)}$ zu ersetzen, die für $2p-1$ Nullpunkte des Nenners φ verschwinden; eine übrigens schon bei **Roch** ähnlich auftretende Bemerkung (Ueber **Abel**'sche Integrale dritter Gattung, Formel (13), J. für Math. 68). Ein anderes Beispiel liefert die Theorie der Relationen zwischen den Wurzelformen, welche an **Riemann** und **Roch** (s. V, B) anknüpft und deren Weiterentwicklung in Abschn. IX besprochen werden wird.

Invariante Gestalt der algebraischen Sätze.

Discussion der φ-Relationen.

4. Abgesehen von der Existenz, dem Grad, der Zahl und der linearen Unabhängigkeit der Relationen zwischen den Formen φ ist über den Inhalt und die Herstellungsweise derselben bis jetzt nur wenig bekannt. Das Bekannte soll hier angeführt werden.

Für $p = 3$ besteht, wie oben gesagt, eine allgemeine Relation vierten Grades zwischen den drei Formen φ. Für $p = 4$ hat man eine Relation zweiten und eine Relation dritten Grades zwischen den vier Formen φ; beide Relationen können allgemein angenommen werden. Für $p = 5$ hat man drei quadratische Relationen zwischen $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$, welche, wenn allgemein angenommen, ein Gebilde mit $p = 5$ eben noch definiren (Weber (2)); die 12 absoluten simultanen Invarianten dieses Systems können als die Moduln betrachtet werden. — Die quadratischen Relationen für $p = 6$ und für $p = 7$ sind, im Falle nicht-specieller Moduln, bei Noether (2) aufgestellt, und zwar in einer Form, welche nur die Moduln explicit enthält. Dies war möglich, weil sich für $p = 6$ und 7 Gleichungen der Gebilde zwischen drei Variabeln, $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, angeben lassen; denn sobald diese vorliegen, kann man auch die Ausdrücke aller φ durch die x_1, x_2, x_3, und zwar rational (nach Noether (3)), aufstellen, also auch alle zwischen den φ selbst existirenden Relationen durch systematische Rechnung entwickeln. Ein Teil dieser Relationen ergiebt sich dann ohne Hülfe von $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, ein Teil nur mit Hülfe von $f = 0$; indessen wechselt diese Eigenschaft mit der aus der Klasse ausgewählten Gleichung $f = 0$ und ist für die Relationen selbst unwesentlich. Es ist klar, dass sich auf dem eben genannten Wege die Relationen noch für eine Reihe von höheren p (für $p = 8$ siehe Käsbohrer, Dissert. Erlangen 1893, wo übrigens die Gleichung $f = 0$ nicht selbst, sondern nur die Coordinaten der vielfachen Punkte dieser Curve benutzt sind), insbesondere bei besonderen Modulverhältnissen, herstellen lassen. — Eine Discussion der Relationen für $p > 5$ auf ihren vollen Inhalt hin hat man noch nicht vorgenommen; indessen findet sich wenigstens einiges Material hierzu in neueren geometrischen Arbeiten von Castelnuovo (Ric. di Geom. sulle curve algebriche, Atti dell' Acc. di Torino, t. 24) und Bertini (Intorno ad alc. teoremi della Geom. sopra una curva alg., ib. t. 26).

Bei besonderen Modulbedingungen können sich die Relationen des allgemeinen Falles sehr bedeutend modificiren. Von solchen Ausnahmefällen sind bisher einige behandelt worden, welche dadurch sich auszeichnen, dass, statt einer endlichen Anzahl, unendlich viele Abel'sche Wurzelformen $\sqrt{\varphi}$ (V, Nr. 22) existiren. Setzt sich ein System von Wurzelformen $\sqrt{\varphi}$ aus m solchen linear und homogen zusammen, so ge-

hört dasselbe (Weber (2) nach Riemann J. f. Math. 65) zu einer ungeraden oder geraden Thetacharakteristik, je nachdem m ungerade oder gerade ist, und die zugehörige Thetafunction verschwindet mit ihren Derivirten bis zur $(m-1)$ten Ordnung einschliesslich für die Nullwerte der Argumente. Der speciellste Fall ist der hyperelliptische (s. Weber (2) und Noether (1)), und für $p=3$ existirt kein anderer, in obigem Sinne ausgezeichneter Fall. Für $p=4$ kann eines jener Systeme $m=2$ existiren, was eine Modulbedingung liefert; die quadratische Gleichung zwischen den $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$ wird dann die eines Kegels zweiter Ordnung (Weber); die ebene Normalcurve ist eine Curve fünfter Ordnung mit zwei benachbarten Doppelpunkten (Selbstberührungspunkt), die sich auch auf eine Curve sechster Ordnung mit zwei benachbarten dreifachen Punkten, oder auch mit einem dreifachen und drei auf einer Geraden liegenden Doppelpunkten transformiren lässt. Sobald für $p=4$ mehr als eines der Systeme existirt, wird die Klasse die hyperelliptische, und es existiren gleich 10 Systeme mit $m=2$ (Weber (2)). Für beliebige p weist Kraus nach, dass bei Existenz eines Systems mit $m=2$ die Normalform für das Gebilde eine Curve $(p+1)$ter Ordnung mit einem Selbstberührungspunkt und $\frac{1}{2}(p-4)(p+1)$ weiteren, in einer Curve $(p-4)$ter Ordnung liegenden Doppelpunkten wird; für $m>2$ aber eine Curve $(p-m+2)$ter Ordnung mit $\frac{1}{2}\{(p-m)^2-(p+m)\}$ Doppelpunkten, durch welche noch eine die Grundcurve in $m-3$ Punkten berührende Curve $(p-m-3)$ter Ordnung geht. Insbesondere können für $p=5$ eines, zwei oder drei Systeme mit $m=2$ existiren; dem entsprechend lassen sich eine, zwei oder alle drei quadratischen Relationen auf solche zwischen nur je drei der fünf Formen φ reduciren; bei mehr als drei Systemen mit $m=2$ wird das Gebilde hyperelliptisch. Kraus hat auch einen Fall bezeichnet, in welchem die quadratischen Relationen für sich nicht mehr ausreichen, um das algebraische Gebilde zu definiren: wenn nämlich die zugehörige Normalcurve $(p+1)$ter Ordnung einen $(p-2)$-fachen Punkt hat, d. h. wenn es möglich ist, das Gebilde auf eine dreiblättrige Riemann'sche Fläche zu beziehen.

Gebilde, welche unendlich viele eindeutige Transformationen in sich zulassen.

5. Von den Anwendungen der invariantentheoretischen Anschauung sei zuerst die Frage nach den Gebilden, welche unendlich viele eindeutige Transformationen in sich zulassen, erwähnt.

Litteratur:

H. A. Schwarz, Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine Schar rationaler eindeutig umkehrbarer Transformationen in sich selbst zulassen. J. f. Math. 87, 1875.

G. Hettner, Ueber diejenigen algebraischen Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche eine Schar etc. etc. Gött. Nachr. 1880.

F. Klein, Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale. § 19. 1881. Leipzig. Teubner 1882.

M. Noether.
  (1) Note über die algebraischen Curven, welche eine Schar eindeutiger Transformationen in sich zulassen. Math. Ann. 20. 4. März 1882.
  (2) Nachtrag hierzu. Math. Ann. 21. 1882.

H. Poincaré, Sur un théorème de M. Fuchs. (Die bezügliche Stelle nach einem Briefe von F. Klein vom 2. Apr. 1882.) Acta Math. VII, 1884.

A. Hurwitz,
  (1) Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen. Gött. Nachr. 1887, Math. Ann. 32.
  (2) Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich. Math. Ann. 41, 1892.

E. Picard,
  (1) Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. Mém. couronné 1888. J. de Math. Sér. 4, V. 1889.
  (2) Sur les transformations birationnelles des courbes algébriques en ellesmêmes. Bull. de la Soc. math. de France XXI. p. 1. 1893.

Von solchen Gebilden kennt man diejenigen für $p = 0$, welche je ∞^3 Transformationen in sich zulassen, entsprechend den linear-gebrochenen Substitutionen, denen man ihren rationalen Parameter unterwerfen kann; ferner diejenigen für $p = 1$ mit zwei Arten von je ∞^1 Transformationen in sich, entsprechend den Substitutionen $u + c$, bezw. $-u + c$ für den elliptischen Parameter u, Substitutionen, die sich nach dem Abel'schen Theorem für die Curve auch algebraisch definiren lassen, und die für die Curve dritter Ordnung (seit Salmon, Higher plane curves, Capitel über Correspondenz. 2. Ausg. 1873) in vielen algebraischen und geometrischen Arbeiten untersucht worden sind. Für $p > 1$ ist die Frage von Schwarz, Hettner, Klein, Noether, Hurwitz, Picard behandelt und dahin beantwortet worden, dass Gebilde solcher Art überhaupt nicht existiren.

Schwarz führt die Untersuchung mit functionentheoretischen Mitteln, indem er die Coordinaten als analytische Functionen eines Integrals erster Gattung u, für kleine Werte von u, auffasst und zeigt, dass diese Functionen mittelst des angenommenen Parameters der Transformation beliebig weit eindeutig fortsetzbar sind; letzteres ist aber bekanntlich nur für $p = 0$ oder 1 möglich. Der Beweis ist streng, aber insofern nicht erschöpfend, als er, da die Transformationen als analytische Functionen eines Parameters angenommen sind, die Möglichkeit von unendlich vielen discreten Transformationen nicht ausschliesst (nach Klein l. c., pag. 67, wo der Satz an der Rie-

mann'schen Fläche veranschaulicht wird). Diese Bemerkung bezieht sich auch auf den Hettner'schen Beweis, der algebraischer Natur ist und auf die Weierstrass'schen Entwicklungen sich stützt. Der Grundgedanke ist der, dass gewisse ausgezeichnete Stellen des Gebildes nur in endlicher Anzahl auf demselben vorhanden sind, dass aber unendlich viele, von einem Parameter analytisch abhängende Transformationen unendlich viele solcher Stellen aus einer erzeugen würden — eine Bemerkung, die (Hettner zufolge) auch Weierstrass mittelst seiner kanonischen Form in einen Beweis umgesetzt hatte. Dieser Gedankengang gehört in das invariante Gebiet und ist in den Noether'schen beiden Noten als solcher, als Satz über die φ-Scharen, aufgefasst: es wird die dabei von Hettner nicht behandelte Möglichkeit erledigt, dass die unendlich vielen Transformationen alle die singuläre Stelle des Gebildes unverändert lassen könnten. Ausserdem aber wird von Noether (erste Note) nachgewiesen, dass nicht unendlich viele discrete Transformationen existiren können, dass vielmehr, da man die Transformation in sich mit zunächst unbestimmten Parametern anschreiben kann, deren Bestimmung eine Aufgabe der algebraischen Eliminationstheorie ist, nur algebraisch eingehende Parameter übrig bleiben können. Dieser letztere Schluss findet sich, indem nur die Transformation durch die lineare der φ ersetzt ist, ebenso bei Picard (1), pag. 119 und (2) wieder; während Poincaré denselben nach einem Briefe von Klein (der von späterem Datum als die Note (1) von Noether ist) aus der Theorie der Fuchs-Klein'schen Functionen ableitet. Picard (1) zeigt ferner mit Hülfe der Integrale erster Gattung, dass unendlich viele Transformationen irgend einen der für $p > 1$ existirenden φ-Quotienten nur in sich selbst überführen könnten, und beweist dadurch wiederum jenen Satz. Die lineare Ueberführung der Integrale behandelt schon vorher Hurwitz in der Note (1), welche die Transformationen einer Curve in sich auf die Theorie der singulären Correspondenzen zurückführt (s. Ref. Abschn. X); er zeigt, dass eine solche Transformation für $p > 1$ nur periodisch sein kann, d. h. nach mehrmaliger Wiederholung jeden Punkt auf die Ausgangsstelle zurückführt, indem sie p Integranden erster Gattung bis auf Zahlenfactoren, welche Wurzeln der Einheit sind, in sich überführt. Da diese Factoren nicht von einem Parameter der Transformation abhängen können, so folgt hieraus wieder jener Satz, wie dieser auch umgekehrt die Periodicität der Transformation erweisen würde.

In dem Aufsatze (2) zeigt Hurwitz, dass die Anzahl r der oben erwähnten ausgezeichneten Stellen des Gebildes, welche bei den Transformationen (wenn sie die Identität mitenthalten) unverändert bleiben müssten,

$r > 2p+2$ sein würde, dass aber eine von der Identität verschiedene Transformation höchstens $2p+2$ Stellen in sich überführen kann. Zu erwähnen ist hierbei die Art der Abzählung jener Stellen: sie werden aus $\Delta = 0$ gefunden, wo Δ die Determinante aus den Differentialquotienten erster bis $p$ter Ordnung der p Integrale erster Gattung, genommen nach irgend einem dieser Integrale, bedeutet. Man erhält dabei immer die Zahl $(p-1)p(p+1)$, wenn man nur jede Stelle, in welcher eine Function der Klasse von niedrigerer als $(p+1)$ter Ordnung unendlich werden kann, ohne noch an anderer Stelle unendlich zu werden, mit geeigneter Multiplicität zählt. Diese Multiplicität m der Stelle setzt sich aus den Weierstrass'schen Lückenzahlen $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_p$ der Stelle (VII, Nr. 16) mittelst der Formel $m = \sum_{\alpha} \varkappa_\alpha - \frac{1}{2}p(p+1)$ zusammen. — Die von Hurwitz (2) gegebene Zahl für die Hyperosculationsstellen bezüglich der Schar der $\Phi^{(\varkappa)}(\varkappa > 1)$, nämlich $(2\varkappa-1)^2 p(p-1)^2$, findet sich schon bei Humbert (Sur un problème de contact de M. de Jonquières, Rend. Circ. Mat. Palermo IV, 1890) analog abgeleitet, nur unter Anwendung des Thetafuchsischen Parameters.

Ein Gebilde, das eine eindeutige Transformation in sich besitzt, deren Periode gleich n ist, lässt sich (Hurwitz (1)) durch eine Gleichungsform darstellen: $F(s^n, z) = 0$, wobei die Transformation durch

$$s' = e^{2i\pi/n}.s, \quad z' = z$$

gegeben ist. Aber ein algebraisches Gebilde kann auch eine ganze Gruppe solcher cyklischen Transformationen besitzen, deren Ordnung r nach dem Gesagten für $p > 1$ eine endliche (nach Hurwitz (2) unter einer gewissen von p abhängigen Grenze liegende) sein muss; und umgekehrt kann man bei jeder gegebenen Gruppe von Substitutionen algebraische Gebilde construiren, welche eine zu derselben holoedrisch isomorphe Gruppe von Transformationen in sich zulassen. Sie können durch r-fache Uebereinanderlagerung eines algebraischen Gebildes gewonnen werden, sind also Flächen mit äusserst singulären Moduln. Es sind eben die von Klein und Dyck vielfach untersuchten „regulären" Gebilde (Klein, Math. Ann. 9—17; Dyck, Math. Ann. 17, 20), welche ausser durch ihre gruppentheoretischen Eigenschaften noch dadurch Interesse haben, dass gerade auf sie mannigfache functionentheoretische Fragen führen, wie bei den Modulargleichungen der elliptischen Functionen u. s. w. Wir verweisen deshalb auf Klein's Forschungen und seinen eigenen ausführlichen Bericht (Vorlesungen über Riemann'sche Flächen Heft 2).

Die Mannigfaltigkeit der eindeutigen Transformationen, welche ein

Gebilde in sich selbst zulässt, hat ihre Bedeutung für die Zahl der Moduln. Giebt es ∞^ρ solcher Transformationen, so stehen ρ Parameter für die Wegschaffung von Constanten des Gebildes nicht zur Verfügung (IV. Nr. 16), und die Klasse würde nicht $3p-3$ Moduln, wie nach Riemann, sondern $(3p-3)+\rho$ Moduln erhalten (s. Klein im Litteraturverzeichnis). Daher hat man für $p=0, 1$, wo $\rho=3$, bezw. 1 ist, noch 0, bezw. 1 Modul.

6. Die Aufgabe, die Transformation zu finden, welche zwei gegebene Curven $f(x)=0$, $F(y)=0$ derselben algebraischen Klasse in einander überführt, kann auf sehr verschiedene Weisen gelöst werden: immer aber führt sie auf die Lösung eines Systems von rein algebraischen Gleichungen. Man kann, da man die Ordnung von $F(y)=0$ kennt, für die Transformationsformeln $\rho y_i = \psi_i(x)$ eine obere Grenze der Ordnung der ψ_i angeben, diese also, mit einer Anzahl unbestimmter Parameter λ behaftet, unmittelbar anschreiben und die λ zunächst mit Hülfe unbestimmter Punkte $x^{(h)}$ von $f=0$ so bestimmen, dass die aus $f(x)=0$, $\rho y_i=\psi_i(x)$ resultirende Curve $F'(y)=0$ von der Ordnung von $F(y)=0$ wird. Die Identificirung von $F'(y)$ mit $F(y)$ ergiebt dann das Gleichungssystem für die $x^{(h)}$ und die übrigen Parameter. Vorteilhafter ist die Benutzung der Methoden, welche die invariantentheoretische Auffassung an die Hand giebt, vor allem der linearen Transformation zwischen den φ-Formen, insbesondere die Ueberführung ausgezeichneter φ-Formen in ebensolche, nachdem man zuvor $f=0$ und $F=0$ in eine der nur in endlich-verschiedener Anzahl existirenden ($\tau=0$, s. Referat V. E. Nr. 62) Normalcurven transformirt hat. Diese Behandlung liefert explicitere Transformationsbeziehungen. Poincaré (s. Nr. 5) denkt sich die Normalcurve N_{2p-2} der φ in „Ebenencoordinaten" angeschrieben, also die Gleichung $\Omega(u)=0$ gebildet, welche die Bedingung ausspricht, dass eine Curve $\sum_{h=1}^{p} u_h\varphi_h = 0$ die gegebene Grundcurve berührt, und führt die Form $\Omega(u)$ in eine entsprechende $\Omega'(u')$ über, die aus der Gleichung der zweiten Curve folgt. Picard (1) (s. Nr. 5) denkt sich ein Büschel von φ-Curven durch $p-2$ Punkte $x^{(h)}$ von $f=0$ in ein Büschel von φ-Curven durch $p-2$ Punkte $y^{(h)}$ von $F(y)=0$ transformirt. Die Gleichheit der absoluten Invarianten beider Büschel giebt Beziehungen zwischen den $x^{(h)}$ und $y^{(h)}$ von der Form $i(x^h)=J(y^h)$, und dasselbe leistet die Ueberführung von Quotienten aus speciellen φ der beiden Büschel. Insbesondere kann man so, indem man die $p-2$ Punkte benachbart wählt, Gleichungen zwischen x und y allein erhalten.

Transformation zweier Curven in einander.

Die Integranden.

7. Durch die Einführung der Formen φ wird der Differentialausdruck erster Gattung in zwei Factoren mit Covarianteneigenschaft zerlegt: in die algebraische Form $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ und in die Differentialform

$$d\varpi_x = \frac{\Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{\sum_h c_h \dfrac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_h}}.$$

Die Fortentwicklung des invarianten Standpunktes verlangt eine analoge Zerlegung auch der höheren Integranden: ein Gedanke, welcher der Arbeit (4) von Noether zu Grunde liegt. Schreibt man einen solchen Differentialausdruck in der Gestalt

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) . d\varpi_x ,$$

so wird hier Ψ so dargestellt:

$$\Psi(x_1, x_2, x_3) \equiv \frac{\Phi^{(\mu+1)}}{\Phi^{(\mu)}},$$

wo wieder $\Phi^{(\nu)}$ eine ganze homogene Form νter Dimension in den $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ ist. In diesem Ausdruck für Ψ, welcher wieder als „algebraische Form" bezeichnet wird, erkennt man den Covariantencharakter unmittelbar; er ist in den φ von der ersten Dimension. Man erkennt weiter, dass alle Relationen zwischen Integranden nichts sind, als lineare homogene Relationen zwischen Formen $\Phi^{(\mu+1)}/\Phi^{(\mu)}$, wobei für verschiedene Terme auch die Zahlen μ verschiedene sein können. Natürlich ist eine solche Relation, nach Division mit einer und derselben beliebig aber fest gewählten Form φ, auch als Relation zwischen algebraischen Functionen der Klasse aufzufassen, oder, bei Wegschaffen der Nenner, als lineare homogene Relation zwischen φ-Producten, zu je ν genommen. Und umgekehrt kann jede Relation der letzteren Art auch als eine Relation zwischen Integranden aufgefasst werden.

Es genügt dabei, die Form Ψ für irgend eine speziell vorgelegte Gleichungsform des algebraischen Gebildes invariant zu bilden, um Formeln zu erlangen, welche vom speciellen Gebilde der Klasse unabhängig sind. Was die Nullpunkte der Formen betrifft, so braucht man diejenigen Nullpunkte, welche zugleich allen φ, bei specieller Bildung derselben, angehören werden, überhaupt nicht mitzuzählen, da sie sich bei Functions- und Integralbildungen doch wieder wegheben (z. B. die Doppelpunkte bei einer ebenen Grundcurve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$). In diesem Sinne haben die Formen φ $2p-2$ einfache Nullpunkte, die Formen $\Phi^{(\mu+1)}/\Phi^{(\mu)}$ aber eine um $2p-2$ grössere Anzahl von Null-, als von Unendlichkeitspunkten; die $\mu(2p-2)$ Nullpunkte des Nenners $\Phi^{(\mu)}$ können von den

$(\mu+1)(2p-2)$ Nullpunkten des Zählers $\Phi^{(\mu+1)}$ teilweise oder alle aufgehoben werden. Anders wie bei den Functionen kann man bei den Formen die Anzahl und Lage der Unendlichkeitspunkte ganz beliebig vorgeben, und zwar bis zu beliebig kleiner Anzahl >1 herunter — was der VII, Nr. 15 erwähnte Satz ist, der übrigens für $p=0$ nicht gilt.

Auf diesen Satz allein wird eine Reduction der Integranden auf die Normalformen der verschiedenen Gattungen gestützt, die von allen Ausnahmefällen unabhängig ist — abgesehen von dem in die allgemeine φ-Darstellung nicht aufgenommenen hyperelliptischen Falle —, und die von allen Grenzbetrachtungen absieht. Die Normalformen sind: a) die p allenthalben endlichen Formen erster Gattung, $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$; b) die Formen zweiter Gattung, welche je nur in einem Punkte, aber in den Ordnungen 2, 3, … unendlich werden; c) die Formen dritter Gattung, welche je in zwei Punkten in erster Ordnung unendlich werden. — Diese Zerlegungen repräsentiren genau die Erweiterung der von Aronhold für $p=0$ durchgeführten Formenzerlegungen (s. V, A, Nr. 9); während die gewöhnliche, auf Formen (-1)ter Dimension bezügliche binäre Partialbruchzerlegung für $p=0$ sich von den bezeichneten dadurch unterscheidet, dass hier in der That eine Form $1/(x_1y_2-x_2y_1)$ existirt, die nur für eine Stelle zu ∞^1 wird.

Aus jenem Satze allein, verbunden mit den aus ihm in der Abhandlung von Brill-Noether erschlossenen Eigenschaften der φ-Formen, wird ferner das ganze Weierstrass'sche Formelsystem abgeleitet, und zwar mit Klarlegung der invarianten Bestandteile desselben. An Stelle des Weierstrass'schen Ausdrucks $H(xy;\, x'y')$, welcher eine Function der Stelle xy (die für $x=x_0$, $y=y_0$ verschwindet) und Integrand in $x'y'$ (∞ in $x'=x_0$, $y'=y_0$) ist (VII, Nr. 13, 14), tritt hier der Ausdruck

$$P_{x_1x_2x_3,\,x_1^0x_2^0x_3^0}(x_1'\,x_2'\,x_3') \equiv P_{x\,x^0}(x'),$$

(wo die Stelle $x_1x_2x_3$ wieder durch einen Buchstaben x bezeichnet ist), welcher genau mit dem Clebsch-Gordan'schen Integranden dritter Gattung in $x_1'\,x_2'\,x_3'$:

$$\frac{\Omega_{n-2}(x')}{\Sigma\pm x_1'x_2x_3^0} = \frac{\Phi^{(2)}(x')}{\Phi^{(1)}(x')}$$

übereinstimmt. Bezüglich x' ist dies die gebrochene algebraische Normalform dritter Gattung, welche in $x'=x$ und $x'=x^0$ zu ∞^1 wird (und zwar in $x'=x$ so, dass beim Integriren der Coefficient des logarithmischen Gliedes 1 ist), und welche in p gegebenen festen Punkten $x'=a_1, \ldots, a_p$ verschwindet. Hierdurch wird $P_{x\,x^0}(x')$ zugleich die all-

gemeinste Function von x, welche in $x = x', a_1, \ldots, a_p$ zu ∞^1, mit vorgeschriebenem Factor in x', und in $x = x^0$ zu null wird. — Die Thatsache, dass dieser Ausdruck, nachdem er in x' normirt worden war, in Bezug auf x von den Doppelpunkten des zu Grunde gelegten Gebildes $f(x) = 0$ von selbst unabhängig wird, kann man vom invarianten Standpunkt aus a priori einsehen. Denn weil bei Transformation dieses Gebildes die Grösse $P_{x\,x^0}(x')$, als Form in x' aufgefasst, nur denselben Factor annimmt, wie alle $\varphi(x')$, d. h. einen nur von x', nicht von x abhängigen Factor, so ist $P_{x\,x^0}(x')$, als Function von x aufgefasst, bei der Transformation absolut invariant, zeigt also in den singulären Stellen von $f(x) = 0$ kein besonderes Verhalten.

In dem nunmehr abzuleitenden Formelsystem ergiebt sich zunächst der Vertauschungssatz durch Reduction des Ausdrucks

$$D_x P_{x\,x^0}(x') = \frac{d_x P_{x\,x^0}(x')}{d\varpi_x},$$

der sowohl in x' als auch in x eine Form zweiter Gattung wird, auf Summen von Normalformen in x; und hieraus folgen alle in Nr. 14 des Referats VII „Weierstrass, zweiter Teil“ angedeuteten Sätze. Zu bemerken ist hierbei noch, dass man die Brill-Noether'sche Ableitung des Riemann-Roch'schen Satzes gar nicht vorauszusetzen braucht, dass sich derselbe vielmehr, wie bei Weierstrass, aus den hier besprochenen Functionsdarstellungen, ebenfalls ergäbe; ferner, dass auf diese Weise (Noether (4), § 14) auch die invariante Bedeutung des Abel'schen Differentialtheorems völlig klar liegt.

B. Christoffel's kanonische Form des Gebildes.

E. B. Christoffel. Ueber die kanonische Form der Riemann'schen Integrale erster Gattung. Annali di Matematica, Ser. 2. t. IX pag. 240–301. Febr. 1878.

Aufgabe und Bezeichnungen.

8. Die wichtige Frage nach der Aufstellung der Gleichungen von Gebilden, welche zu einem gegebenen Geschlecht p gehören, ist, wie VII, A, Nr. 16 besprochen, von Weierstrass und seinen Schülern in Angriff genommen worden; sodann aber auf einem anderen Wege in der jetzt zu besprechenden Arbeit von Christoffel unter dem Namen des „Problems der Doppelpunkte“. Hier ist die Frage combinirt mit der Aufgabe: eine endgültige Ausdrucksform für den Integranden erster Gattung zu gewinnen. Insofern unter dem „Problem der Doppelpunkte“ die Aufgabe einbegriffen wird, aus vorgelegter Gleichung $f(s,z) = 0$

die Doppelpunkte soweit zu ermitteln, dass sich die φ-Formen der zu $f = 0$ gehörigen Integranden erster Gattung, die dort verschwinden, ergeben, ist dieselbe, was das rationale Verfahren anbelangt, auch anderweitig (vgl. VI. Nr. 12) gelöst worden; Christoffel's Absicht geht aber auf explicite Ausdrücke.

Geht man von einer Function z der „Ordnung" μ (welche in μ Stellen des algebraischen Gebildes zu ∞^1 wird) aus, so hängt das allgemeinste zugehörige Integral w erster Gattung von den Doppelpunkten derjenigen Gleichung $\overset{\mu}{f}(s, z) = 0$, welche durch Hinzunahme einer beliebigen zweiten Function s entsteht, nicht ab. Um die Darstellung von diesen Doppelpunkten unabhängig zu machen, discutirt Christoffel gleich die Beziehung $\overset{\mu}{f}(s, z) = 0$ zwischen z und der bestimmten Function $s = dw/dz$, wo s noch p willkürliche, linear und homogen eingehende Parameter hat. Auch die Function z wird von ihm weiterhin, in der Absicht zu einem Problem der linearen Invariantentheorie zu kommen (s. unten, Nr. 11), auf eine „kanonische" Function beschränkt, welche bei gegebenen μ Unendlichkeitspunkten nur zwei Constanten homogen und linear enthält, d. h. deren μ Unendlichkeitspunkte eine Gruppe aus einer linearen einfach-unendlichen Vollschar bilden. Endlich macht Christoffel die Voraussetzung, dass die Verzweigungs- und Doppelpunkte von s, als Function von z, nur einfache sind, die für getrennte endliche Werte von z stattfinden.

Für z kann dabei noch eine solche Function gewählt sein, deren „Ordnung" μ für die betrachtete algebraische Klasse überhaupt möglichst niedrig ist. Diese Annahme würde aber die Theorie nicht vereinfachen, sondern nur die weitere Teilung des Geschlechts p in Familien μ von Klassen veranlassen.

Es handelt sich zunächst um die lineare Zusammensetzung aller p Integranden erster Gattung aus einer kleineren Anzahl solcher, multiplicirt je mit einer ganzen Function von z. Denkt man sich an Stelle der Integranden erster Gattung die damit proportionalen p Formen φ gesetzt, so erkennt man, dass das algebraische Hülfsmittel ausschliesslich die Constantenbestimmung des Riemann-Roch'schen Satzes ist. Die bezüglichen bekannten Begriffsbestimmungen und Sätze über Punktgruppen einer algebraischen Curve (s. V. E) werden hier von Christoffel übernommen (die algebraischen Beweise sind in der später erschienenen, in VII. B besprochenen Arbeit angedeutet), aber unter abweichenden Bezeichnungen.

Die Specialfunctionen der Klasse, in der Form φ_1/φ_2 darstellbar,

werden als „Functionen erster Gattung“, die übrigen als „Functionen zweiter Gattung“, die Specialpunktgruppen als „Punktsysteme erster Gattung“ eingeführt. Verschwindet in einer Specialpunktgruppe von μ Punkten eine λ-fach unendliche lineare Schar von Functionen φ ($\lambda \geqq 0$), d. h. bestimmt die Gruppe eine der ∞^{p-1} Curven φ bis auf λ nichthomogen eingehende lineare Parameter, so wird λ der „Defect“ der Punktgruppe genannt; ist die Mannigfaltigkeit der linearen Schar $g_\mu^{(\rho)}$, welcher die Gruppe angehört, gleich ρ ($\geqq 1$), ist also nach dem Riemann-Roch'schen Satze $\rho = \mu - (p - 1 - \lambda)$, so heisst ρ der „Ueberschuss“ der Punktgruppe (nämlich der Ueberschuss der Zahl μ der Punkte über die Zahl $p - 1 - \lambda$ der unabhängigen Bedingungen für die in der Gruppe verschwindenden Formen φ). Die Zahlen ρ, λ sind also identisch mit den Brill-Nöther'schen q, bezw. r für die Scharen $g_Q^{(q)}$, wenn $\mu \equiv Q$ ist (vgl. V. E. Nr. 58). Die „Punktsysteme zweiter Gattung“ werden wir hier mit denen erster Gattung zusammenfassen, indem wir für sie nur $\lambda = -1$, $\rho = \mu - p$ setzen.

Zusammensetzung des Integranden erster Gattung.

9. Wenn man eine Function z zu Grunde legt, welche einen Ueberschuss ρ, Defect λ hat [wo ρ zunächst auch > 1 sein darf, während auf den kanonischen Fall $\rho = 1$ erst unten in Nr. 11 besonders eingegangen wird], so lässt sich die Zusammensetzung der Integranden erster Gattung folgendermassen erschliessen:

Man betrachte die beiden Gruppen G und G′ von je μ Punkten, in denen $z = 0$, bezw. $= \infty$ wird. Man hat dann $\lambda + 1$ linear-unabhängige Integranden erster Gattung v_i', die in G verschwinden; also auch $\lambda + 1$ linear-unabhängige Integranden erster Gattung, die in G′ zu 0^3 werden, nämlich $\sigma_i = v_i'\, z$ ($i = 1, 2, \ldots, \lambda + 1$). [Statt dessen könnte man immer von den $\lambda + 1$ Formen φ reden, die in G, bezw. in G′, zu 0^1 werden. Denn für $z = \varphi_1/\varphi_2$ ist $v_i' = \Phi_i^{(1)} . d\varpi\, dz$, wo $d\varpi$ (s. oben Nr. 7) in G′ nicht unendlich wird, $\Phi_i^{(1)}$ die in G zu 0^1 werdenden φ vorstellt, $d\varpi/dz = \varphi_2^2 . d\varpi/(\varphi_2 d\varphi_1 - \varphi_1 d\varphi_2)$ in G′ zu 0^2 wird; die aus $\sigma_i = v_i'/z = \varphi_2/\varphi_1 . \Phi_i^{(1)} . d\varpi/dz$ folgenden φ, von der Gestalt $\varphi_2/\varphi_1 . \Phi_i^{(1)}$, werden daher in G′ zu 0^1.] Und umgekehrt: Giebt es einen Integranden erster Gattung, der in G′ je zu 0^{2+k} wird [d. h. giebt es eine Form φ, die in G′ zu 0^k wird, nämlich eine Curve $\varphi = 0$, die $f = 0$ an jeder der μ Stellen von G′ k-punktig trifft], so sind $z, z^2, \ldots, z^k$ Functionen erster Gattung.

Sei zunächst $k = 1$. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass

$$\sigma_1, \ldots, \sigma_{\lambda+1}, \quad z\sigma_1, \ldots, z\sigma_{\lambda+1}$$

$2(\lambda+1)$ linear-unabhängige Integranden erster Gattung werden, ist nach der letzterwähnten Umkehrung die, dass z, aber nicht z^2, Function erster Gattung sei. Nimmt man nun $p-2(\lambda+1)$ weitere, unter sich und von den vorigen linear-unabhängige Integranden erster Gattung

$$\sigma_{\lambda+2}, \ldots, \sigma_{p-\lambda-1} \equiv \sigma_{\mu-\varrho}$$

hinzu, so erhält man in

$$s = y_1\sigma_1 + \cdots + y_{\mu-\varrho}\sigma_{\mu-\varrho},$$

wo die $y_1, \ldots, y_{\lambda+1}$ ganze lineare Functionen von z mit willkürlichen Parametern, die $y_{\lambda+2}, \ldots, y_{\mu-\varrho}$ willkürliche Parameter sind, den allgemeinen Integranden erster Gattung mit seinen p willkürlichen Parametern.

Für den Fall $k > 1$, wo z^k, aber nicht z^{k+1}, Function erster Gattung ist, bildet man analog zuerst die Integranden erster Gattung $\sigma^{(k)}$, welche in G' zu 0^{k+2} werden, und aus jedem solchen $\sigma^{(k)}$, durch Multiplication mit einer beliebigen rationalen ganzen Function kten Grades $y^{(k)}$ von z, weitere Integranden erster Gattung, welche ihre Nullpunkte alle in gewissen Graden in G' und G haben; alsdann diejenigen $\sigma^{(k-1)}$, welche in G' zu 0^{k+1} werden und von den $\sigma^{(k)}$, $z\sigma^{(k)}$ verschieden sind; auch diese $\sigma^{(k+1)}$ kann man noch mit einer beliebigen ganzen Function $(k-1)$ten Grades $y^{(k-1)}$ von z multipliciren; u. s. w. Indem man dann die Gesamtheit dieser linear-unabhängigen Integranden durch weitere $\sigma^{(0)}$ zu p solchen ergänzt, erhält man für den allgemeinsten Integranden erster Gattung wieder einen Ausdruck von $\mu-\rho$ Gliedern:

$$s = y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2 + \cdots + y_{\mu-\varrho}\sigma_{\mu-\varrho}.$$

Von jenen „Fundamentalintegranden" erster Gattung σ_i möge es L_k geben, die in G' zu 0^{k+2}, L_{k-1}, die zu 0^{k+1}, ..., L_0, die zu 0^2 werden. Die y_i sind dann rationale ganze Functionen von z, mit willkürlichen Coefficienten, deren Grad hinsichtlich z der Ordnung des Verschwindens der φ-Form der entsprechenden σ_i in G' genau gleich ist, so dass sie vom Grade k für die ersten L_k, ..., 0 für die letzten L_0 sind.

Für $\rho = 1$ erhält z bei vorgegebenem Defect λ die möglichst niedrige „Ordnung" $\mu = p - \lambda$ [nicht überhaupt die möglichst niedrige Ordnung; wodurch z. B. auch der Fall $g^{(1)}_{p+1}$ von Nicht-Specialgruppen umfasst wird]; und dann erscheint $s = dw/dz$ in der sogenannten „kanonischen" Gestalt von $\mu-1$ Gliedern. Aus dem Umstande, dass alle $L_i \geqq 0$ sind, leitet Christoffel für das k einer kanonischen Function z ($\rho = 1$)

noch die Einschränkung her:

$$\frac{p-\mu+1}{\mu-1} \gtreqless k \leqq \frac{2p-2}{\mu}.$$

Gleichung für die Integranden erster Gattung.

10. Die Gleichung $\overset{\mu}{f}(s, z) = 0$, μten Grades in s, welcher s genügt, muss zunächst eine Reihe von Eigenschaften besitzen, damit s ein Integrand erster Gattung werde. Wegen der Gültigkeit des Abel'schen Theorems muss der Coefficient von $s^{\mu-1}$, die Summe der Wurzeln s_i, null sein; ferner wird, nach den über die Verzweigungs- und Doppelpunkte gemachten Voraussetzungen, für

$$f(s, z) = As^{\mu} + A_2 s^{\mu-2} + \cdots + A_{\mu} = 0,$$

wo die A_i ganze rationale Functionen von z sind, die Gleichung $A(z) = 0$ die $2(p+\mu-1)$ getrennten Verzweigungspunkte liefern, während der weitere Factor der Discriminante D ein vollständiges Quadrat ϑ einer ganzen Function $\mathfrak{A}(z)$ werden muss, die nur unter sich und von denen von $A(z)$ verschiedene Linearfactoren besitzt, also

$$D = A^{2\mu-2}[\Pi(s_1, \ldots s_{\mu})]^2 = A \cdot \vartheta = A \cdot \mathfrak{A}^2.$$

Weiter werden die $A_i(z)$ sich als ganze rationale Formen iter Dimension der Parameter $y_1, y_2, \ldots y_{\mu-\varrho}$ darstellen, deren Coefficienten ganze Functionen von z sind, von einem solchen Grade, dass der Grad jedes Terms in $A_i(z)$ zu $2(p+\mu-1-i)$ wird (damit s in G', wo $z = \infty$, zu 0^2 werde).

Christoffel beweist aber auch die Umkehrung, indem er zeigt, dass die vorgenannten Eigenschaften zur Definition eines Integranden erster Gattung s für eine irreductible algebraische Klasse (p, μ) hinreichend sind. Man kann dabei die $y_1, \ldots y_{\mu-\varrho}$ als willkürliche ganze Functionen von z von den Graden $a_1, a_2, \ldots a_{\mu-\varrho}$ wählen, wo $a_1 = k \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_{\mu-\varrho}$ und

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{\mu-\varrho} + (\mu - \varrho) = p$$

ist, also mit zusammen p willkürlichen Coefficienten $x_1, \ldots, x_p$. Die vorgeschriebenen Grade der A_i in z bewirken schon, dass s bei willkürlichen $x_1, \ldots x_p$ ein Integrand erster Gattung wird; und hieraus, zusammen mit einer Untersuchung der Unstetigkeiten und Verzweigungen von s als Function eines x_h, ergiebt sich weiter, dass s von den x_h, also auch von den $y_1, \ldots, y_{\mu-\varrho}$ eine lineare ganze homogene Function wird.

Dagegen brauchen hier die p Factoren von $x_1, \ldots, x_p$ in s, welche Integranden erster Gattung sind, noch nicht linear-unabhängig zu sein. Aber auch dies Letztere wird erreicht, wenn $\varrho = 1$ ist, also im kanonischen Falle. Für den Beweis und die weitere Discussion der Formen

$A_i(z)$ in diesem Falle macht nun Christoffel die Hülfsmittel der Invariantentheorie für $\mu-1$ Variable flüssig.

11. Sei $p=1$ und seien $s_1, \ldots, s_\mu$ die μ Zweige von s. Dann hat man, von der Gleichung in Nr. 10 ausgehend, indem man s_μ vermöge $\sum s_h = 0$ aus den symmetrischen Functionen der s_h eliminirt, zunächst die bekannten kanonischen Formen

Invariantentheoretische Hülfsmittel im kanonischen Falle.

$$\frac{A_i}{A} = A_i'(s_1, \ldots, s_{\mu-1})$$

in den $\mu-1$ Variabeln $s_1, \ldots, s_{\mu-1}$. Der Uebergang von diesen Formen zu denen in den $y_1, \ldots, y_{\mu-1}$ geschieht nun durch eine lineare Transformation

$$s_i = y_1\sigma_{1,i} + y_2\sigma_{2,i} + \cdots + y_{\mu-1}\sigma_{\mu-1,i} \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu-1).$$

Die Coefficienten $\sigma_{\varkappa,i}$ dieser Transformation sind zwar nicht bekannt, aber Christoffel zeigt nicht nur, dass die Determinante derselben,

$$r = \frac{\partial(s_1, \ldots, s_{\mu-1})}{\partial(y_1, \ldots, y_{\mu-1})},$$

von null verschieden ist — da sich sonst zwischen den $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\mu-1}$ eine Identität $\sum G_i\sigma_i = 0$ mit ganzen Functionen G_i von z ergeben würde, die nicht existiren kann —, sondern schliesst aus dem Verhalten in den Verzweigungspunkten $A(z) = 0$ und den Punkten $z = \infty$ auch auf den Wert von r:

$$r = \frac{1}{\sqrt{A(z)}^{\mu-2}}.$$

Da somit sowohl die kanonischen Formen $A_i'(s_1, \ldots, s_{\mu-1})$ der $A_i(y_1, \ldots, y_{\mu-1})$, als die Substitutionsdeterminante r bekannt sind, so kann man auch die In- und Covarianten der A_i in den y ausdrücken und Relationen zwischen denselben und den $A_i(y)$ erhalten: Relationen, welche, soweit sie nicht für jedes System A_i gelten, notwendige Bedingungen der vorliegenden Aufgabe darstellen. So ergiebt sich z. B. für die Hesse'sche Determinante von A_2

$$H_y(A_2) = (-1)^{\mu-1}\mu\,.\,A^{\mu-2},$$

ein Ausdruck, der in Verbindung damit, dass in den Verzweigungspunkten die Grösse $s\sqrt{A} = \sqrt{-A_2}$ linear in $x_1, \ldots, x_p$ sein soll, lehrt, dass für diese Punkte A_2 ein reines Quadrat werden muss; ähnliche Bildungen erlauben, aus A_2 und A_3 alle übrigen A_i $(i = 3, \ldots, \mu)$ zu bestimmen. Insbesondere ermittelt Christoffel den Doppelpunktsfactor $\mathfrak{A}(z)$ der Discriminante in der expliciten Form:

$$\mathfrak{A}(z) = \frac{\partial(A_2, \ldots, A_\mu)}{\partial(y_1, \ldots, y_{\mu-1})},$$

ein Ausdruck, welcher umgekehrt wieder für r den Wert $r = 1/\sqrt{A}$ nach sich zieht.

Nimmt man in der in Nr. 10 angeführten Bedingungsgleichung $\vartheta = \mathfrak{A}^2$ für $\mathfrak{A}$ die ebengenannte Functionaldeterminante, also für r den Wert $1/\sqrt{A}$, so folgt jetzt aus $r \neq 0$, dass man in

$$s = y_1 \sigma_1 + \cdots + y_{\mu-1} \sigma_{\mu-1}$$

den vollständigen Integranden erster Gattung vor sich hat; und ferner wird, wenn der höchste unter den Graden a_i der willkürlichen ganzen Functionen y_i von z der Grad $a_1 = k$ ist, z^k eine Specialfunction, z^{k+1} keine solche, und die Zahl ρ für die Function z wirklich zu 1.

Anwendungen. 12. Die Specialfälle ordnen sich bei Christoffel nach den Werten von μ an, wie denn die Beherrschung der Fälle mit niedrigem μ der Zielpunkt der ganzen Untersuchung ist. Das hyperelliptische System $\mu = 2$ erledigt sich auf die bekannte Weise. Ausserdem wird auch das System $\mu = 3$ vollständig erledigt. Für dieses ergiebt sich die Gleichung

$$27 J . s^3 + 9 H . s + f = 0,$$

wo f eine beliebige binäre Form dritten Grades in y_1, y_2:

$$f = \alpha y_1^3 + 3\alpha_1 y_1^2 y_2 + 3\alpha_2 y_1 y_2^2 + \alpha_3 y_2^3,$$

H ihre Hesse'sche Form

$$H = \begin{vmatrix} \alpha y_1 + \alpha_1 y_2, & \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, & \alpha_2 y_1 + \alpha_3 y_2 \end{vmatrix} = \beta y_1^2 + \beta_1 y_1 y_2 + \beta_2 y_2^2,$$

J die Invariante $J = 4\beta\beta_2 - \beta_1^2$ ist, und wo nur H(z) und J(z) nicht gleichzeitig verschwinden dürfen. Die Zahl k ist mit der Einschränkung $\frac{1}{2}(p-2) \leqq k \leqq \frac{1}{3}(2p-2)$ zu wählen, und demgemäss sind dann die Grade der willkürlichen ganzen Functionen y_1, y_2 von z:

$$a_1 = k, \quad a_2 = p - 2 - k,$$

und die der ganzen Functionen $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ von z bezw. $2(p-1) - 3k$, $p - k$, $k + 2$, $3k - p + 4$. — Für $\mu = 3$ erledigt sich übrigens auch der nicht-kanonische Fall $\rho = 2$, $p = 1$ ähnlich. — Für allgemeine $\mu > 3$ wird die Theorie der Form A_2 und damit auch die der höheren A_i insoweit gefördert, als in den Coefficienten der Substitution, welche $A_2(y_1, \ldots, y_{\mu-1})$ in ihre adjungirte Form $\Gamma_2(\eta_1, \ldots, \eta_{\mu-1})$ überführt, die Unterdeterminanten von r eingeführt werden. Dadurch werden die Coefficienten von $\Gamma_2(\eta)$ Functionen von niedrigerem Grade in z, als die von $A_2(y)$: A(z) wird geradezu die Discriminante von $\Gamma_2(\eta)$; und auch in den Ausdrücken der $A_3, A_4, \ldots$ durch die η hebt sich A(z) wenigstens einmal hinweg.

13. Vergleicht man die Christoffel'sche mit der Weierstrass'schen kanonischen Form (VII. Nr. 16), so ist zu bemerken, dass in der letzteren die Function z von der Art ist, dass (von linearer Transformation von z abgesehen) nur eine endliche Anzahl auf dem Gebilde existiren, während die Christoffel'sche Function z noch eine Anzahl willkürlicher Parameter enthalten kann. Infolge dessen ist jene Function mit mehr individuellen Eigenschaften versehen als die letztere, und dementsprechend unterscheidet Weierstrass innerhalb desselben Geschlechts p weit mehr Familien als Christoffel, was sich schon von $p = 3$ an geltend macht. Eine weitere Folge ist, dass in Weierstrass' kanonischer Gleichung nur die Moduln erscheinen, welche er sogar in expliciter Form aufzunehmen sucht. Bei Christoffel dagegen enthält die Gleichung auch noch jene willkürlichen Parameter, und er greift das Problem, die zu seinem System (μ, p, k) gehörigen, von jenen Parametern unabhängig gemachten Moduln zu bestimmen, sei es der Ausdrucksweise, sei es nur der Anzahl nach, überhaupt nicht an, sondern bezeichnet es nur als im Wege seiner Theorie liegend. — Andererseits wieder führt die auf Invariantentheorie gestützte Untersuchung Christoffel's zu weiter durchgeführten Gleichungsformen, als die Weierstrass'sche Methode, nach welcher eben den Fall $\mu = 3$ Valentin (s. VII, Nr. 16) berechnet hat.

Verhältnis zur Weierstrass'schen kanonischen Form.

13*. Die vollständige Gleichung für den Integranden erster Gattung, gebildet in Bezug auf eine gegebene singularitätenfreie Curve nter Ordnung, wurde, insbesondere für die Fälle $n = 3$ und $n = 4$, zuerst von A. Harnack, Math. Ann. IX, mit invariantentheoretischen Mitteln discutirt; aber mit projectivem Ziele, nicht zum Zwecke der Aufstellung der Gleichung des Gebildes selbst. Bezüglich der Gleichung

Zusatz.

$$\overset{\mu}{f}(s, z) = A(z)s^{\mu} + A_1(z)s^{\mu-1} + A_2(z)s^{\mu-2} + \cdots + A_{\mu}(z) = 0,$$

welcher ein Integrand erster Gattung, s, bei allgemeinem p zu genügen hat, finden sich, auch für den Fall irgend welcher Singularitäten der Grundcurve, die Endlichkeitsbedingungen bei Raffy, Annales de l'École Normale, Ser. 2, t. XII, 1883, in folgender Form ausgesprochen:

Ist $s = 1/U$, und werden mit c die Werte von zU für unendlich grosse Werte von einer der Grössen z, U, oder von beiden, mit c'_0 die Werte von dz/dU für $U = 0$ bezeichnet, so müssen alle c und alle c'_0 verschwinden.

Aus dem Verschwinden der c folgt, dass in der Gleichung

$$A(z) + A_1(z)U + \cdots + A_{\mu}(z)U^{\mu} = 0$$

das Glied höchster Dimension (in Bezug auf z und U gemeinsam) das von U unabhängige Glied A(z) sein muss; und aus dem Verschwinden der c'_0 folgt, dass jedem Factor $(z-a)^\alpha$ von A(z) ein Factor $(z-a)^\alpha$ von $A_1(z)$, $(z-a)^{\alpha-1}$ von $A_2(z)$, $(z-a)^{\alpha-2}$ von $A_3(z)$, ... entsprechen muss; aus Beidem resultirt wieder, wie auch aus dem Abel'schen Satze:

$$A_1(z) = 0.$$

C. Klein's kanonische Flächen.

Litteraturverzeichniss:

F. Klein.

(1) Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen. Math. Ann. 27, Apr. 1886.

(2) Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen beliebig vieler Argumente. Gött. Nachr., Nov. 1887.

(3) Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen. II. Math. Ann. 32, März 1888.

(4) Ueber irrationale Covarianten. Gött. Nachr., Mai 1888.

(5) Zur Theorie der Abel'schen Functionen. I. II. Gött. Nachr., März u. Mai 1889.

(6) Zur Theorie der Abel'schen Functionen. Math. Ann. 36, Sept. 1889. Dazu

(6') Formes principales sur la surface de Riemann. C. R. Jan. 1889.

(6") Des fonctions thêta sur la surface générale de Riemann. C. R. Febr. 1889. (Ferner eine Note in den Proc. of the London Math. Soc., Febr. 1889.)

(7) Vorlesungen über Riemann'sche Flächen. Autogr. Göttingen. 1. Heft 1891/2. 2. Heft 1892.

(8) Klein-Fricke, Elliptische Modulfunctionen, Bd. 2. 1892.

G. Pick.

(1) Zur Theorie der elliptischen Functionen. Math. Ann. 28, 1886.

(2) Zur Theorie der Abel'schen Functionen. Math. Ann. 29, 1886.

H. Burkhardt.

(1) Beiträge zur Theorie der hyperelliptischen Sigmafunctionen. Math. Ann. 32, Apr. 1888.

(2) Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Nach Vorlesungen von F. Klein. Math. Ann. 35, 1889.

(3) Untersuchungen aus dem Gebiete der hyperelliptischen Modulfunctionen. Math. Ann. 36, 1889.

Dazu Arbeiten von Brioschi (Rendic. Acc. dei Lincei 1886—1890, Gött. Nachr. 1890), Wiltheiss (Math. Ann. Bde. 29—38, 1886—1890, Gött. Nachr. 1889), Krazer (Math. Ann. 33, 1888), Pascal (Gött. Nachr. 1888, 1889, Annali di Matem. Ser. 2, t. 17, 18), Osgood (Diss. Erlangen 1890), White (Diss.

Göttingen 1891 und Acta Leopoldina). Wirtinger (Wiener Monatshefte 1891, Math. Ann. 40, 1891).

14. F. Klein hat die Formentheorie nach einer von der oben (VIII, A, Nr. 7) angedeuteten Richtung verschiedenen weiter entwickelt. Die $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ können, wie dort gesagt, als Formen aufgefasst werden, welche auf dem algebraischen Gebilde nirgends unendlich werden, also als „ganze algebraische Formen", die in je $2p-2$ Stellen zu 0^1 werden. Jene Eigenschaft kommt auch den rationalen ganzen homogenen Ausdrücken νter Dimension $\Phi^{(\nu)}$ der φ zu, die man demgemäss als „ganze algebraische Formen νten Grades" bezeichnen kann. Setzt man die p Differentiale erster Gattung $dw_\alpha = \varphi_\alpha d\varpi$ ($\alpha = 1, \ldots, p$), so erhält man in

Formentheorie.

$$d\varpi = \frac{dw_\alpha}{\varphi_\alpha}$$

eine „Differentialform" -1ter Dimension, welche auf dem algebraischen Gebilde weder null noch unendlich wird.

Hieran knüpft Klein zweierlei Gedankenreihen. Einmal will er die Formentheorie auch im transcendenten Gebiete verwerten (s. die folg. Nr. 15). Auf der anderen Seite (s. Nr. 16) soll die ganze Grundlage, die lineare Invariantentheorie der Formen von p Variabeln, dahin erweitert werden, dass auch Formen von $s < p$ Variabeln $z_1, \ldots, z_s$, mit der zugehörigen Invariantentheorie, eingeführt werden. Die $z_1, \ldots, z_s$ sind dabei solche Grössen, deren Combinationen zu je k (> 1) wieder Formen φ geben, so dass die φ dann „ganze Formen kten", die $\Phi^{(\nu)}$ „ganze Formen kνten Grades" der z werden. Die Transformationen der s Variabeln bilden hierbei nur eine Untergruppe jener Hauptgruppe von linearen Substitutionen für die p Formen φ.

15. In ersterer Beziehung handelt es sich zunächst darum, die Weierstrass'sche Primfunction (VII. Abschn., Nr. 14) durch eine Primform zu ersetzen. Dieselbe hat vermöge der homogenen Variabeln den Vorzug, keinen wesentlich singulären Punkt mehr zu besitzen; ferner soll sie auf dem algebraischen Gebilde unverzweigt sein (d. h. durch Division mit einem homogen machenden Factor, der bei den Quotientenbildungen, die hier immer vorzunehmen sind, wegfällt, auf eine unverzweigte Function sich reduciren); und endlich soll sie daselbst nirgends unendlich und nur einmal in erster Ordnung zu null werden. Eine solche unendlich vieldeutige Form $\Omega(x, y)$ erhält Klein, wie Weierstrass, aus dem Integral dritter Gattung, $P_{x,y}^{\xi,\eta}$, dessen beide Grenzen ξ und η, dessen beide Parameter x und y sind (wobei unter x hier eine Stelle des Gebildes verstanden ist); und zwar durch einen Grenzübergang, indem er die bei-

Primform.

den Grenzen ξ und η bezw. gegen die Parameter x und y hin convergiren lässt, wobei die Primform

$$\Omega(x,y) = \lim_{dx=0,\, dy=0} \sqrt{\left\{ d\varpi_x\, d\varpi_y \cdot e^{-P_{x,y}^{x+dx,\, y+dy}} \right\}}$$

entsteht. Sie wird für $x = y$ zu 0^1, und ist in den $\varphi(x)$ sowohl als in den $\varphi(y)$ vom Grade $-\frac{1}{2}$.

Jede algebraische Function des Gebildes lässt sich durch Quotienten von Producten solcher Primformen ausdrücken. Um aber auch die Formen $\Phi_x^{(\nu)}$ des Gebildes als ein Product von Primformen zu erhalten, braucht man nur ihre Beziehung zur νten Potenz einer ein für alle Mal fest gewählten Form erster Dimension ins Auge zu fassen.

Eine Θ-Function mit ungerader Charakteristik α stellt sich dann in der Gestalt dar:

$$\Theta_\alpha\left(\left(\int_y^x dw_i\right)\right) = C_\alpha' \cdot \sqrt{\varphi_\alpha(x) \cdot \varphi_\alpha(y)} \cdot \Omega(x,y),$$

wo $\varphi_\alpha(x)$ die zur Charakteristik α gehörige Berührungsform φ ist. Bei Klein dient diese Formel direct zur Definition der Θ-Function im algebraischen Gebilde (insbesondere des kanonischen ϑ, wenn in $\Omega(x,y)$ statt P das kanonische Integral dritter Gattung zur Verwendung kommt); man könnte aber auch umgekehrt diese zur Definition der Primform verwenden. Und analog lassen sich auch die Θ-Functionen mit Argumenten, die Integralsummen sind, ausdrücken.

Kanonische Riemann'sche Flächen.

16. Um die in Nr. 14 bezeichnete Auffassung zu erweitern, legt Klein eine Function z zu Grunde, welche in einer Gruppe G' von μ Stellen des Gebildes zu ∞^1 wird: d. h. eine μ-blättrige, über der Z-Ebene ausgebreitete Riemann'sche Fläche T. Indem mit $z = z_1/z_2$ homogen gemacht wird, erhält man aus denjenigen „ganzen algebraischen" (nach Kronecker's Ausdruck) Functionen $G_\nu(z)$ des Gebildes, welche in G' je in der νten Ordnung unendlich werden, die „ganzen algebraischen Formen νten Grades von z_1, z_2", von der Ordnung $\nu \cdot \mu$:

$$\Gamma_\nu(z_1, z_2) = z_2^\nu\, G_\nu(z).$$

Die Fläche T wird als „kanonische" bezeichnet, wenn G' eine „Specialgruppe" ist, die k-mal $(k \geqq 1)$ genommen noch ebenfalls eine Specialgruppe, und zwar von genau $2p-2$ Punkten, ergiebt; wobei also

$$k \cdot \mu = 2p - 2.$$

Ist dann z_1^k die zum Differential erster Gattung dw' gehörige Form φ, so erhält man mit Hülfe von

$$dw' = z_1^k \cdot d\varpi = z_1^k \cdot \frac{z_2\, dz_1 - z_1\, dz_2}{\Sigma(z_1, z_2)}$$

eine „Differentialform $d\varpi$“, die weder 0 noch ∞ wird, von der Dimension $-k$, und eine „Verzweigungsform $\Sigma(z_1, z_2)$“, welche eine ganze algebraische Form $(k+2)$ten Grades von z_1, z_2 ist und ihre 0^1-Stellen in den $\mu(k+2) = 2p - 2 + 2\mu$ Verzweigungspunkten der Fläche T hat. Und umgekehrt genügt die Existenz einer solchen Verzweigungsform Σ dafür, dass z^k eine in $2p-2$ Punkten unendlich werdende Specialfunction, die Fläche T also eine kanonische ist.

Nun giebt es aber, wenn G' einer $(s-1)$-fach unendlichen Vollschar von corresidualen Gruppen $g_\mu^{(s-1)}$ angehört, unter den ganzen algebraischen Formen ersten Grades von z_1, z_2 s linear-unabhängige, die bezeichnet seien mit:

$$z_1, \; z_2, \; z_3, \; \ldots, \; z_s.$$

Zu den ganzen Formen νten Grades gehören dann die Producte dieser s Ausdrücke zu je ν, aber im allgemeinen auch noch weitere Ausdrücke, deren Gesamtzahl nach dem Riemann-Roch'schen Satze zu bestimmen ist. Insbesondere sind die $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ die ganzen Formen kten Grades, so dass sich alle Differentiale erster Gattung in der Gestalt $\Gamma_k(z_1, z_2) . d\varpi$ schreiben.

Die im vorstehenden (Nrn. 15, 16) gegebene Darlegung findet sich ähnlich bei Klein-Fricke (8), Bd. II, Abschn. VII, Cap. 1, und in Klein's Vorlesungen über Riemann'sche Flächen, Heft 1, wo auch der Verfasser sich über die Stellung ausspricht, welche die Brill-Noether'sche Theorie zur Riemann'schen und zur arithmetischen Theorie der ganzen algebraischen Functionen nach seiner Ansicht einnimmt.

Beispiele für kanonische Flächen sind:

a) der immer existirende, in Nr. 14 hervorgehobene Fall: $\mu = 2p-2$, $k = 1$, $s = p$, wobei die Gesamtheit der ganzen algebraischen Formen νten Grades durch die dortigen $\Phi^{(\nu)}$ gegeben ist;

b) der hyperelliptische Fall $\mu = 2$, $k = p-1$, $s = 2$. Hierbei ist, wenn das Gebilde durch $s^2 = f_{2p+2}(z, 1)$ gegeben ist, die Verzweigungsform $\Sigma = \sqrt{f_{2p+2}(z_1, z_2)}$; die $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ sind die rationalen ganzen Functionen $(p-1)$ten Grades von z_1, z_2; die ganzen algebraischen Formen werden im allgemeinen rationale ganze Functionen von z_1, z_2 und Σ;

c) die ebene Curve nter Ordnung ohne mehrfache Punkte $f(z_1, z_2, z_3) = 0$, $\mu = n$, $p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, $k = n-3$, $s = 3$. z_1, z_2, z_3 sind dabei lineare Ausdrücke der Coordinaten, von denen z_1 und z_2 nicht einen gemeinsamen Nullpunkt auf der Curve haben. Nach dem Restsatze werden die ganzen algebraischen Formen νten Grades hier die

rationalen ganzen Functionen νter Dimension von z_1, z_2, z_3. Die Verzweigungsform Σ wird zu $\partial f / \partial z_3$:

d) die vollständige Schnittcurve von $s-2$ $(s-2)$-dimensionalen Gebilden im ebenen Raume von $s-1$ Dimensionen, ohne mehrfache Punkte:

e) einige durch binomische Gleichungen $y^\mu = f(z)$ gegebene Gebilde.

Fall b) wurde von Klein in (1), (3) behandelt, von Burkhardt weiter ausgeführt: Fall c) von Pick angegriffen und für $p = 3$ von Pascal verfolgt: Fall d) von White, e) von Osgood. Der allgemeine Fall a) findet sich bei Klein (6), (7).

Integranden. 17. Die in Nr. 16 bezeichneten kanonischen Flächen verwendet man, um die lineare Invariantentheorie der Formen von s Variabeln für die Normirung der Integranden zweiter und dritter Gattung, und damit auch für die Entwicklung der von diesen abhängigen Transcendenten nutzbar zu machen [wegen der Entstehung dieser Begriffe s. Nr. 18]. Indessen ist diese Absicht erst für den Fall b) von Nr. 16, teilweise auch für die Fälle c) bis e), erreicht, bei c) insbesondere für die ebene Curve vierter Ordnung, $p = 3$; während die Normirung im allgemeinen Falle a) vor der Schwierigkeit steht, die Abhängigkeit des algebraischen Gebildes von den Moduln zu untersuchen.

Zunächst hat man für den Factor von $d\varpi_z$ im Integranden zweiter Gattung eine Form (s. übrigens VIII, A, Nr. 7, insbes. Noether (4) in der Litteratur zu VIII, A):

$$\frac{\Psi(z:\zeta)}{(z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1)^2},$$

welche nur an einer Stelle des Gebildes unendlich, und zwar zu ∞^2 für $z = \zeta$, wird. Auf der kanonischen Fläche ist $\Psi(z:\zeta)$ sowohl in z_1, z_2, als in ζ_1, ζ_2 eine ganze algebraische Form $(k+2)$ten Grades und geht in jener einen Stelle in $[\Sigma(z_1, z_2)]^2$ über. Das Integral dritter Gattung, mit den Parametern ξ, η und den Grenzen x, y, wird dann

$$P_{\xi,\eta}^{x,y} = \int_y^x \int_\eta^\xi \frac{\Psi(z:\zeta)}{(z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1)^2} d\varpi_z d\varpi_\zeta.$$

In Bezug auf die „Primform" lässt sich der in Nr. 15 angedeutete Grenzübergang mit Hülfe des Abel'schen Theorems ausführen, indem man die von x (bezw. y) selbst verschiedenen Stellen des Gebildes

$$x^{(i)} \text{ (bezw. } y^{(i)}) \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu - 1)$$

einführt, für welche noch $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$ (bezw. $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2$) wird. Es ergiebt sich dabei

$$\Omega(x, y) = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\sqrt{\Sigma(x_1, x_2) \cdot \Sigma(y_1, y_2)}} \cdot e^{\frac{1}{2}\sum_{1}^{\mu} i\, p_{x,y}^{x_i, y_i}}.$$

eine Form, die sich mittelst der fest gewählten Grundform (Nr. 16) noch mannigfach modificiren lässt.

Der Invariantentheorie stellt nun Klein — und hierin erscheint der Fortschritt — die Aufgabe, die Form $\Psi(z; \zeta)$ des Integranden zweiter Gattung, der noch ein Ausdruck $(z\zeta)^2 \cdot \sum_{ik} c_{ik}\varphi_i(z)\varphi_k(\zeta)$ mit willkürlichen c_{ik} zugefügt werden darf, so zu normiren, dass sie eindeutig definirt ist und in Bezug auf die Grössen des vorgegebenen Rationalitätsbereiches der Gleichungen des Gebildes einen ausgezeichneten Charakter hat, nämlich eine ganze rationale Function derselben wird.

18. Angebahnt wurden diese Begriffe durch die Weierstrass'sche Theorie der elliptischen Functionen, welche die beiden Invarianten der binären Form vierter Ordnung f in das Integral erster Gattung und in die Umkehrungsfunctionen einführt, von welch letzteren $\sigma(u)$ die Eigenschaft hat, dass alle Coefficienten der Potenzentwicklung rationale ganze Functionen der Invarianten sind.

Hyperelliptischer Fall.

Schreibt man nämlich das Weierstrass'sche elliptische Integral dritter Gattung in der Form

$$\int^{u}\!\!\int^{v} du\, dv\, p(v-u),$$

wo $u, v, w = v - u$ die Weierstrass'schen elliptischen Integrale erster Gattung sind, von bezw. z, ζ, ξ bis ∞ hin integrirt, $z = p(u)$, $\zeta = p(v)$, $\xi = p(w)$, und verwendet das Additionstheorem für $p(v-u)$, so erhält man einen Ausdruck, der mit dem Klein'schen:

$$\xi = p(v-u) = \frac{\sqrt{f(z)} \cdot \sqrt{f(\zeta)} + F(z; \zeta)}{2(z_1\zeta_2 - z_2\zeta_1)^2}$$

identisch wird, wenn man in die Weierstrass'sche Form vierten Grades in z homogene Variable $z = z_1 / z_2$ einführt und diese Form durch lineare Transformation in die allgemeine Form vierten Grades $f(z_1, z_2)$ überführt. $F(z; \zeta)$ ist dabei eine zweite Polare von $f(z) = f(z_1, z_2)$, nach ζ genommen (für jene schon von Weierstrass gegebene Formel s. Biermann's Dissert. „Problemata quaedam etc." Berlin 1865). Aus diesem Ausdruck Q für das Integral dritter Gattung ergiebt sich weiter eine Verification für die Definition der σ-Function vermöge:

$$\sigma(w) = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\sqrt[4]{f(x) \cdot f(y)}} e^{\frac{1}{2}Q},$$

wo Q nach der Variabeln z vom Punkte $(y, \sqrt{f(y)})$ bis zu $(x, \sqrt{f(x)})$ hin, nach ζ von $(y, -\sqrt{f(y)})$ bis $(x, -\sqrt{f(x)})$ hin zu integriren ist. Aus den ϑ-Functionen von zwei Variabeln werden dann σ-Functionen von zwei Variabeln w_1, w_2 construirt, welche bei linearer Periodentransformation sich rein, d. h. ohne Zusatz weiterer Factoren, unter einander permutiren; und da man hierbei die w_1, w_2 linearen Substitutionen unterwerfen darf, so werden auch, indem $w_\alpha = \int z_\alpha d\varpi_z$ ist, die linearen Substitutionen der z_1, z_2 herangezogen. Die Form des zugehörigen Integrals dritter Gattung hat Klein aus der obigen durch Induction abgeleitet, während die Beweise und die Verallgemeinerung auf beliebiges p erst nachher folgten: die Form $\Psi(z; \zeta)$ wird für den hyperelliptischen Fall $f = f_{2p+2}(z_1, z_2)$ normirt zu

$$\tfrac{1}{2}\{\sqrt{f(z)} \cdot \sqrt{f(\zeta)} + a_z^{p+1} a_\zeta^{p+1}\},$$

wo $a_z^{p+1} a_\zeta^{p+1}$ die $(p+1)$te Polare von $f(z) \equiv a_z^{2p+2}$ bedeutet. Diese Form ist eine Covariante von f(z), und zwar eine rationale, da $\sqrt{f(z)}$, $\sqrt{f(\zeta)}$ als bekannt anzusehen sind; aber zugleich die einzige in den Coefficienten ganze lineare Covariante. Das zugehörige Integral dritter Gattung $Q_{\zeta, \eta}^{x, y}$ selber ist eine absolute Covariante von f(z). Bildet man also mit diesem Q, statt mit P, die Primform $\Omega(x, y)$, so kommt man statt auf die Θ-Functionen auf die ausgezeichneten σ-Functionen. Man hat nun noch die Wurzelformen aufzusuchen, d. h. die den verschiedenen Charakteristiken entsprechenden Spaltungen von $f_{2p+2}(z) = \varphi \cdot \chi$ (vgl. Abschn. IX, C) vorzunehmen.

In den Reihenentwicklungen der σ nach Potenzen der Argumente w werden dann, für $p = 2$, die Coefficienten ganze rationale Functionen der Coefficienten der entsprechenden φ, χ; und zwar werden die Terme $(2\nu+1)$ter, bezw. 2νter Dimension simultane Covarianten dieses Formenpaares φ, χ, in welchem nur die Variabeln z_1, z_2 durch w_1, w_2 ersetzt sind.

Solche Reihenentwicklungen werden bei Klein in (1) für $p = 2$, in (3) für ein allgemeines p erörtert, näher noch bei Wiltheiss, Brioschi und Pascal. Die weiteren Betrachtungen Klein's in (1) und (3) und Burkhardt's (2), (3) haben den Zweck, die σ-Functionen, sowie daraus abzuleitende Functionen, worunter auch die gewöhnliche ϑ-Function, in Bezug auf ihr Verhalten gegenüber Gruppen von linearen

Periodentransformationen zu untersuchen und danach einzuteilen: die ganze Richtung gehört also in das Gebiet der Modulfragen.

Fall der ebenen Curve ohne mehrfache Punkte.

19. Ganz analoge explicite Darstellungen giebt Pick für die singularitätenfreie ebene Curve $n$ter Ordnung $f(z_1, z_2, z_3) \equiv a_z^n$. (Nr. 16. c). Hier wird die Form $\Psi(z; \zeta)(z\zeta)^2$ so normirt, dass der Zähler derselben wieder eine in den Coefficienten von f rationale ganze Covariante von $f(z_1, z_2, z_3)$ ist.

Aus dem zugehörigen Integral dritter Gattung $Q_{\xi\eta}^{xy}$ leitet nun Klein (6) für $p = 3$, $n = 4$ Functionen σ her, in deren Potenzentwicklungen alle Terme eindeutige Functionen in demjenigen Rationalitätsbereich der Coefficienten von f sind, welcher durch Auszeichnung der entsprechenden Wurzelform geschaffen wird. Bei einer ungeraden $\sigma(w_1, w_2, w_3)$ $\left(\text{wo } w_i = \int^z z_i\, d\varpi\right)$, welche einer Doppeltangente $A = 0$ zugeordnet ist, besteht dieser Bereich aus den Coefficienten der A, B, C in der Gleichungsform $f = AC - B^2$; und zwar wird ein Term von irgend einer Dimension eine in diesen Coefficienten rationale ganze Covariante, die auch noch bei denjenigen Substitutionen, welche die kanonische Form von f nicht ändern:

$$A' = \lambda A, \quad B' = B + UA, \quad C' = \frac{1}{\lambda}(C + 2UB + U^2A).$$

(λ eine Constante, U eine lineare Form von z_1, z_2, z_3) Invarianteneigenschaft hat: eine sogenannte irrationale Covariante von f (Klein (4), (6)).

Liegt die Richtung schon dieser Untersuchungen in dem Gebiete der Modulfunctionen, so gilt dies noch mehr von den weiteren Betrachtungen über diejenigen Factoren, welche von den σ-Functionen zu den gewöhnlichen ϑ-Functionen hinüberleiten. Für die Durchführung dieser Gedanken, welche bisher erst an dem Falle $p = 3$, $n = 4$ vorgenommen werden konnte, wäre eine Reihe von Abhandlungen zu citiren, welche hauptsächlich invariantentheoretischen Entwicklungen gewidmet sind, besonders solche (Litt. zu C) von Wiltheiss, Pascal und Wirtinger. Vgl. auch Abschn. IX, E, Nr. 28, 29.

Die Monodromieuntersuchungen.

20. Wir verfolgen indessen diese in das Gebiet der „Monodromieuntersuchungen" gehörigen Forschungen — welche die Abhängigkeit der algebraischen und transcendenten Functionen des Gebildes von seinen Moduln zum Gegenstande haben — nicht weiter. In dieses Gebiet lässt sich übrigens auch die schon von Weierstrass und Christoffel angegriffene Aufgabe einordnen, die Gleichung der Gebilde mit gegebenem Geschlecht p und Blätterzahl μ der zugehörigen Riemann'schen

Fläche wirklich aufzustellen; eine Aufgabe, die für den Fall $\mu = 3$ von J. Thomae, Math. Annalen 6 und 18, mit Hülfe der hyperelliptischen Wurzelformen behandelt worden ist. Das allgemeinere Problem: die Untersuchung der μ-wertigen Functionen von z, bei gegebener Lage der Verzweigungspunkte in der Z-Ebene, ist bisher nur hinsichtlich der Anzahl der wesentlich verschiedenen Functionen und der Gruppe der zugehörigen Gleichung erledigt worden, und zwar von A. Hurwitz: „Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten", Math. Annalen 39, auf gruppentheoretischem Wege. Da dieser Aufsatz die bisherige kurze Litteratur über die Monodromieuntersuchungen angiebt, so genügt es, betreffs des Gebietes selbst auf ihn zu verweisen, indem wir nur bezüglich der allgemeineren Fragen zu den schon genannten Arbeiten noch die folgenden hinzuzufügen haben:

Ch. Hermite, Sur les fonctions algébriques. Comptes Rendus de l'Ac. de Paris, 32, 1851.

L. Fuchs, Die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Parameters aufgefasst. J. f. Math. 71, 1869.

C. Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques. 1870.

IX. Abschnitt.

Wurzelfunctionen und Wurzelformen.

Litteraturverzeichnis*):

(1) J. Plücker, 1839 (s. V, A, a).

(2) A. Göpel, J. f. Math. 35, 1847; G. Rosenhain (Pariser Arbeit, eingereicht 1846, publicirt 1851; Brief an Jacobi, vom 3. Sept. 1844, J. f. Math. 40, 1849) (s. III, D).

(3) K. Weierstrass, 1849 etc. (s. III, E).

(4) J. Steiner, 1852; O. Hesse, 1853 (s. V, A, e).

(5) Ch. Hermite, Sur la théorie de la transformation des fonctions Abéliennes. Comptes R. 40, 1855.

(6) B. Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen (s. IV, C). J. f. Math. 54, 1857 (Werke VI, mit einer, am Schlusse hinzugefügten, aus dem Nachlasse stammenden Bemerkung über Wurzelfunctionen).

(6_1) B. Riemann, Zur Theorie der Abel'schen Functionen für den Fall $p = 3$ (Werke, erste Aufl. XXX), Vorlesung 1862 (s. V, B).

(7) F. Prym, Neue Theorie der ultraëlliptischen Functionen. Denkschr. der Wiener Akad. der Wissensch. XXIV, Sept. 1863. (Pars prior, bis § 17 incl., als Dissert. „Theoria nova functionum ultraëll.", Berlin, März 1863; zweite Ausgabe der „Neuen Th." mit nachträgl. Bemerkungen und neuen Tafeln: Berlin 1885.)

(8) G. Roch, Habilitationsschrift (s. V, B), October 1863.

(8_1) G. Roch, Ueber die Doppeltangenten etc. (s. V, B). J. f. Math. 66, 1864.

(9) A. Clebsch, Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie. J. f. Math. 63, Oct. 1863. (Ferner J. f. Math. 64.) (s. V, C).

(10) L. Königsberger, Ueber die Transformation der Abel'schen Functionen erster Ordnung. J. f. Math. 64, Apr. 1864. (Ferner J. f. Math. 65.)

---

*) In wesentlich chronologischer Ordnung, um den Vergleich der Entstehungszeiten der vielen verwandten Arbeiten zu erleichtern.

(11) S. Aronhold, Ueber den gegenseitigen Zusammenhang der 28 Doppeltangenten einer allgemeinen Curve vierten Grades. Monatsber. d. Berl. Akad., Juli 1864.

(12) J. Thomae, Die allgemeine Transformation der Thetafunctionen. Dissert. Göttingen 1864.

(12_1) J. Thomae, Bestimmung von $d \lg \vartheta(0, \ldots, 0)$ durch die Klassenmoduln. J. f. Math. 66, 1865.

(13) B. Riemann. Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen. J. f. Math. 65, 1865 (s. IV, D).

(14) A. Brill, Ueber diejenigen Curven etc. ($p = 2$) (s. V, C). J. f. Math. 65, 1865. (Dazu eine Note in Math. Ann. 6, 1872.)

(15) F. Prym, Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche. Denkschr. d. Schweiz. Naturforsch.-Gesellsch. XXII, Juni 1866.

(16) L. Kronecker, Ueber bilineare Formen. Monatsber. d. Berl. Akad., October 1866 (auch im J. f. Math. 68: vorher in Vorlesung 1864).

(17) A. Clebsch und P. Gordan. Theorie der Abel'schen Functionen (s. V, D). Leipzig. August 1866.

(18) J. Thomae, Einige Sätze aus der Analysis situs Riemann'scher Flächen. Ztsch. f. Math. u. Phys. XII, 1867.

(19) M. Henoch, De functionum Abelianarum periodis. Dissert. Berlin 1867.

(20) A. Cayley. Note sur l'algorithme des tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre. J. f. Math. 68, Sept. 1867.

(21) R. Sturm, Untersuchungen über das Flächennetz zweiter Ordnung. J. f. Math. 70. Oct. 1868.

(22) C. F. Geiser, Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades. Math. Ann. 1, Oct. 1868.

(22_1) C. F. Geiser, Ueber die Steiner'schen Sätze von den Doppeltangenten der Curven vierten Grades. J. f. Math. 72, Juli 1870. (Vgl. dazu W. Frahm, Bemerkung etc. Math. Ann. 7; E. Toeplitz, Ueber ein Flächennetz zweiter Ordnung. Math. Ann. 11.)

(23) A. Clebsch, Zur Theorie der binären Formen sechster Ordnung und die Dreiteilung der hyperelliptischen Functionen. Abhdlgen. d. Gött. Ges. d. W. XIV, 1869.

(24) C. Jordan, Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris 1870 (Auszug daraus: Sur les équat. de la division etc., Math. Ann. 1, 1869).

(25) A. Clebsch, Ueber den Zusammenhang einer Klasse von Flächenabbildungen mit der Zweiteilung der Abel'schen Functionen. Math. Ann. 3, Mai 1870.

(26) L. Fuchs. Ueber die Form der Argumente der Thetafunction etc. J. f. Math. 73, 1871.

(27) J. Thomae, Beitrag zur Theorie der Abel'schen Functionen. J. f. Math. 75, Mai 1872.

(27_1) J. Thomae, Darstellung des Quotienten zweier Thetafunctionen etc. Math. Ann. 6, 1873 (s. auch ibid. 18).

(28) W. Godt, Ueber den Connex erster Ordnung und zweiter Klasse. Diss. Göttingen 1873. (Dazu Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, erster Bd., sechste und siebente Abteilung, Leipzig 1876.)

(29) A. Pringsheim, Zur Transformation zweiten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Math. Ann. 9, Aug. 1875.

(30) H. Weber, Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht drei. Berlin 1876 (eingereicht der Gött. Soc. 1874; Bemerkungen dazu: J. f. Math. 88, 1879) (s. VIII, A).

(31) J. Thomae, Sammlung von Formeln, welche bei Anwendung der elliptischen und Rosenhain'schen Functionen gebraucht werden. Halle 1876.

(31_1) J. Thomae, Ueber eine specielle Klasse Abel'scher Functionen. Halle 1877.

(32) A. Pringsheim, Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen, insbes. derjenigen dritter Ordnung ($p = 4$). Math. Ann. 12, März 1877.

(33) A. Cayley, On the double thetafunctions in connexion with a 16-nodal quartic surface. J. f. Math. 83, März 1877.

(33_1) A. Cayley, Further investigations on the double thetafunctions. J. f. Math. 83, März 1877.

(34) C. W. Borchardt, Ueber die Darstellung der Kummer'schen Fläche vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten durch die Göpel'sche biquadratische Relation zwischen vier Thetafunctionen mit zwei Variabeln. J. f. Math. 83, Mai 1877.

(34_1) A. Cayley, On the 16-nodal quartic surface. J. f. Math 84, Aug. 1877 (auch J. f. Math. 94).

(34_2) H. Weber, Ueber die Kummer'sche Fläche vierter Ordnung mit 16 Knotenpunkten und ihre Beziehung zu den Thetafunctionen mit zwei Veränderlichen. J. f. Math. 84, Aug. 1877.

Vgl. zu diesem Thema ferner:

(34_3) K. Rohn, Transformation der hyperelliptischen Functionen $p = 2$ etc. Math. Ann. 15, Mai 1879.

(34_4) F. Brioschi, La relazione di Göpel per funzioni iperellittiche d'ordine qualunque. Annali di Matem. X, 1881.

(34_5) F. Klein, Ueber Configurationen, etc. Math. Ann. 27, 1885.

(34_6) P. Domsch, Darstellung der Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt etc. Diss. Leipzig 1885.

(34_7) B. Reichardt, Darstellung der Kummer'schen Fläche etc. Nova acta Leopoldina, Bd. 50, 1887, u. Math. Ann. 28.

(34_8) L. Schleiermacher, Ueber Thetafunctionen mit zwei Variabeln. Sitzber. der phys. med. Soc. Erlangen XVIII, 1886.

(34_9) E. Picard, Sur les intégrales de différ. totales etc. Journ. de Math. S. 4, t. I, 1885 (C. R. 1884); und Mém. s. l. th. des fonct. alg. de deux var. etc. Journ. de Math. S. 4, t. 5, 1888.

(34_{10}) E. Pascal, Annali di Matem. XVIII u. XIX.

(34_{11}) W. Wirtinger, Gött. Nachr. 1889 ($p = 3$); Wiener Monatshefte 1, 1890; Math. Ann. 40, 1891 ($p = 3$).

(34_{12}) F. Schottky, Ueber die Beziehungen zwischen den 16 Thetafunctionen von zwei Variabeln. J. f. Math. 105, 1889 [Weddle'sche Fläche].

(34_{13}) F. Caspary, Sur les deux formes etc. C. R. 1891 [Weddle'sche Fläche].

(34_{14}) G. Humbert, Th. gén. des surfaces hyperellipt. J. de Math. S. 4, t. 9, 1893.

(35) H. Weber, Ueber gewisse in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmefälle (s. VIII, A). Math. Ann. 13, Sept. 1877.

(36) A. Cayley, A memoir on the double thetafunctions. J. f. Math. 85, Dez. 1877.

(37) H. Weber, Ueber die Transformationstheorie der Thetafunctionen, insbes. derer von drei Veränderlichen. Annali di Mat. Ser. 2, t. 9, Jan. 1878.

(37_1) H. Weber, Anwendung der Thetafunctionen zweier Veränderlicher etc. Math. Ann. 14, Mai 1878. (Dazu:

(37_2) F. Caspary, J. f. Math. 94, 1881.)

(38) M. Noether, Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen. Sitzber. d. physik. med. Soc. Erlangen, X, Januar 1878. (Ausgeführt in „Ueber eine Klasse von auf die einfache Ebene abbildbaren Doppelebenen", Math. Ann. 33, 1888.)

(38_1) M. Noether, Zur Theorie der Thetafunctionen von vier Argumenten. Math. Ann. 14, Juni 1878 (vorher: Erl. Sitzber. X. Febr. 1878).

(39) R. de Paolis, Trasform. piana doppia di terzo ordine primo genere e la sua applicazione alle curve del 4° ordine. Mem. d. Acc. dei Lincei, Ser. 3, t. 2, 1878.

(40) F. Schottky, Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen von drei Variabeln. Leipzig 1880. (I. Teil als Habilitationsschrift, Breslau 1878.)

(41) A. Cayley, On the triple thetafunctions. J. f. Math. 87, Sept. 1878.

(41_1) A. Cayley, Algorithm for the characteristics of the triple thetafunctions. J. f. Math. 87, Dez. 1878.

(41_2) C. W. Borchardt, Zusatz zur obigen Abhandlung (41_1). J. f. Math. 87, Dez. 1878.

(41_3) A. Cayley, On the triple thetafunctions. J. f. Math. 87, Dez. 1878.

(42) M. Noether, Ueber die Gleichungen achten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Curven vierter Ordnung. Math. Ann. 15, Jan. 1879.

(43) A. Cayley, On the addition of the double thetafunctions. J. f. Math. 88, März 1879.

(43_1) A. Cayley, ($p = 2$). Philosoph. Transact. Bd. 171, 1879.

(43_2) H. R. Forsyth, Memoir on the thetafunctions, particularly those of two variables. Philosoph. Transact. Bd. 173, 1881.

(44) C. Jordan, Mém. sur les caractéristiques des fonctions thêta. J. de l'École Polyt., Cah. 46, 1879 (vorher Note in den Compt. Rend., Mai 1879).

(45) H. Stahl, Das Additionstheorem der Thetafunctionen mit p Argumenten. J. f. Math. 88, Mai 1879.

(46) M. Noether, Ueber die Thetacharakteristiken. Sitzber. der Erl. Soc. XI, Juli 1879.

(47) H. Stahl, Beweis eines Satzes von Riemann über Thetacharakteristiken. J. f. Math. 88, August 1879.

(48) M. Noether, Zur Theorie der Thetafunctionen von beliebig vielen Argumenten. Math. Ann. 16, Nov. 1879. (Vorher: Ueber die allgemeinen Thetafunctionen. Sitzber. der Erl. Soc. XII, Nov. 1879.)

(49) L. Kraus, Note über aussergewöhnliche Specialgruppen auf algebraischen Curven. Math. Ann. 16, Nov. 1879 (s. VIII, A).

(50) H. Stahl, Zur Lösung des Jacobi'schen Umkehrproblems. J. f. Math. 89. Jan. 1880 (auch als Dissert. Berlin).

(51) G. Frobenius, Ueber das Additionstheorem der Thetafunctionen mehrerer Variabeln. J. f. Math. 89, Febr. 1880.

(52) M. Noether, Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen. Math. Ann. 17, Aug. 1880 (vorher: Erl. Sitzber. XII, Mai 1880) (s. VIII. A).

(53) F. Prym, Untersuchungen über die Riemann'sche Thetaformel und die Riemann'sche Charakteristikentheorie. Leipzig 1882.

(53_1) A. Krazer, Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen auf Grund der Riemann'schen Thetaformel. Leipzig, 1882.

(53_2) A. Krazer, Ueber Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind. Math. Ann. 22, Febr. 1883.

Dazu:

(53_3) Schleicher, Darstellung und Umkehrung von Thetaquotienten, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind. Prog. Bayreuth 1890.

(53_4) Sievert. Beiträge etc. Festsch. z. 150j. Jubil. der Univers. Erlangen vom Neuen Gymnasium Nürnberg 1893.

(54) A. Cayley, On the bitangents of a plane quartic. J. f. Math. 94, Dez. 1882 u. Jan. 1883.

(55) A. Ameseder, Geometrische Untersuchung der ebenen Curven vierter Ordnung, insbes. ihrer Berührungskegelschnitte (I. ohne, II. mit vielfachen Punkten). Sitzber. der Wiener Akad. d. W. 1882, 1883.

(56) G. Frobenius, Ueber Gruppen von Thetacharakteristiken. J. f. Math. 96, Apr. 1883. (Mit Fortsetzung: Ueber Thetafunctionen mehrerer Variabeln. J. f. Math. 96. Mai 1883.)

(57) H. Weber, Ueber die Galois'sche Gruppe der Gleichung 28. Grades, von welcher die Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung abhängen. Math. Ann. 23, Oct. 1883.

(58) O. Staude, Ueber die Parameterdarstellung der Verhältnisse der Thetafunctionen zweier Veränderlichen. Math. Ann. 24. Apr. 1884.

(58_1) O. Staude, Ueber die algebraischen Charakteristiken der hyperelliptischen Thetafunctionen. Math. Ann. 25. Oct. 1884.

(59) G. Frobenius, Ueber die Beziehung zwischen den 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung. J. f. Math. 99, Mai 1885.

(60) F. Klein, Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen. Erste Abt. Math. Ann. 27, April 1886.

(60₁) F. Klein, Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen. Zweite Abt. Math. Ann. 32, März 1888 (s. VIII, C).

Dazu:

(60₂) H. Burkhardt, Beiträge etc. Ibid. Apr. 1888 (s. VIII, C).

(61) G. Humbert, Applic. de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques. Journ. de Math. Ser. 4, t. 2, 1886.

(62) M. Noether, Zum Umkehrproblem in der Theorie der Abel'schen Functionen. Math. Ann. 28, Sept. 1886.

(63) F. Schottky, Zur Theorie der Abel'schen Functionen von vier Variabeln. J. f. Math. 102, Nov. 1886.

(63₁) F. Schottky, Ueber specielle Abel'sche Functionen vierten Ranges. J. f. Math. 103, Febr. 1887.

(64) K. Bobek, Ueber Curven vierter Ordnung vom Geschlecht 2, ihre Systeme berührender Kegelschnitte und Doppeltangenten. Denksch. d. Wiener Akad. d. W., 53, 1887.

(65) G. Frobenius, Ueber die Jacobi'schen Covarianten der Systeme von Berührungskegelschnitten einer Curve vierter Ordnung. J. f. Math. 103, Juni 1887.

(65₁) G. Frobenius, Ueber die Jacobi'schen Functionen dreier Variabeln. J. f. Math. 105, 1888.

(66) A. v. Braunmühl, Ueber die Göpel'sche Gruppe p-reihiger Thetacharakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind etc. Math. Ann. 32, 1888.

Vorher:

(66₁) Sitzber. der Erl. Soc. XVIII, 1886 (mit einer Anmerkung von M. Noether).

(66₂) Abhdlgn. der bayr. Akad. d. W. 1887 (Vgl. dazu Krazer, in Jahrb. f. Mathem. 1887).

Ferner:

(66₃) Math. Ann. 37, 1890 [ntel Charakteristiken].

(67) M. Noether, Zur Theorie der Berührungscurven der ebenen Curve vierter Ordnung. Abh. d. bayr. Akad. d. W. XVII, 1889.

(68) F. Schottky, Eine algebraische Untersuchung über Thetafunctionen von drei Argumenten. J. f. Math. 105, 1889.

(69) H. Burkhardt, Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Nach Vorlesungen von F. Klein. Math. Ann. 35, 1889 (s. VIII, C).

(70) F. Klein, Zur Theorie der Abel'schen Functionen. Math. Ann. 36, 1889.

Dazu:

(70₁) Vorlesung über Riemann'sche Flächen (autographirt erschienen). II. Teil, Göttingen 1892 (s. VIII, C).

(71) G. Kohn, Ueber die Berührungskegelschnitte und Doppeltangenten der allgemeinen Curve vierter Ordnung. J. f. Math. 107, 1890.
(Vorher Ber. d. Wiener Akad. d. W. 1888 und: Monatsh. f. Math. u. Phys., Bd. 1.)

(72) W. Weiss, Ueber eine algebraische Theorie der Scharen nicht-adjungirter Berührungscurven, welche zu einer algebraischen Curve gehören. Sitzber. d. Wiener Ak. d. W. 1890.
(Vorher als Diss. Erlangen 1887.
Fortsetzung: Prager deutsche math. Gesellsch. 1892. Sitzber. d. Wiener Akad. d. W. 1893.)

(73) W. F. Osgood, Zur Theorie der zum algebraischen Gebilde $y^m = R(x)$ gehörigen Abel'schen Functionen. Dissert. Erlangen 1890 (s. VIII, C).

(74) F. Schottky, Ueber die charakteristischen Gleichungen symmetrisch ebener Flächen und die zugehörigen Abel'schen Functionen. J. f. Math. 106, 1890.
(74_1) F. Schottky, Theorie der elliptisch-hyperelliptischen Functionen von vier Argumenten. J. f. Math. 108, 1891.

(75) J. Thomae, Ueber Thetafunctionen, deren Argumente einem System von Drittelperioden gleich sind. Ztsch. f. Math. u. Phys. 1891.

(76) E. Pascal, Rappres. geometr. delle caratter. di genere 3 e di genere 4 e loro gruppi di sostituzioni. Annali di Mat. Ser. 2, t. 20, 1892.
(Dazu eine Reihe von Noten in den Rend. dell'Acc. dei Lincei, 1892 u. 1893.)

(77) H. Stahl, Ueber eine allgemeine Formel zur Lösung des Jacobi'schen Umkehrpoblems. J. f. Math. 111. 1893.

(78) H. D. Thompson, Hyperelliptische Schnittsysteme und Zusammenordnung der algebraischen und transcendenten Thetacharakteristiken. American J. of Math. 15, 1893.

1. Eine **Wurzelfunction** ist eine solche mehrdeutige, aber unverzweigte Function einer Stelle x des algebraischen Gebildes $f(x) = 0$, deren mte Potenz eine rationale Function der Coordinaten von x ist: $\sqrt[m]{\psi(x)/\chi(x)}$. Die Null- und Unendlichkeitsstellen der Function sind nämlich im allgemeinen solche *erster* Ordnung, indem die von ψ/χ immer zu je m zusammenfallen. $\psi = 0$, $\chi = 0$ stellen also Curven gleicher Ordnung dar, welche die Curve $f = 0$, ausser in gemeinsamen Punkten, nur noch an je r Stellen m-punktig treffen. Neben sie stellen sich die **Wurzelformen** $\sqrt[m]{\psi(x)}$, zu denen insbesondere Riemann's sogenannte „Abel'sche Functionen $\sqrt{\varphi}$" gehören. Die Bezeichnung „Wurzelfunction mten Grades" rührt von Weber (30) her, der Ausdruck „Wurzelform" von Noether (62).

Uebersicht über den Abschnitt.

Aus der Theorie dieser Functionen und Formen haben wir bereits früher über folgende Punkte berichtet:

1) über die je 3-punktig berührenden Curven ($m = 3$) bei einer Grundcurve dritter Ordnung f_3 ($p = 1$) (V, A, e Nr. 16);

2) über die eine Grundcurve vierter Ordnung f_4 ($p = 3$) je 2-punktig ($m = 2$) berührenden reinen Berührungscurven $\chi^{(\mu)}$ μter Dimension, d. h. solche, welche f_4 überall in erster Dimension berühren, wo sie treffen (V. A. e Nrn. 18 u. 19). Dabei wurde (V. Nr. 18) auf die Beziehung zur Gleichungsform von f_4: $A . f_4 \equiv B^2 - C . \chi^{(\mu)}$ hingewiesen, insbesondere auf die daraus abzuleitenden Relationen zwischen je drei Doppeltangentenpaaren einer von Steiner so genannten „Gruppe“, der Art

$$\sqrt{x_1 \xi_1} + \sqrt{x_2 \xi_2} + \sqrt{x_3 \xi_3} = 0,$$

d. h. zwischen Wurzelformen; ferner auf den Hesse'schen auf 8 Zahlen 1, 2, ... 8 sich stützenden Algorithmus, welcher die Gruppirungen der reinen Berührungscurven von f_4 wiedergiebt (V, Nr. 19);

3) kurz über die Zuordnung der einfachsten Wurzelfunctionen zu halben Perioden und der Riemann'schen $\sqrt{\varphi}$ zu ungeraden Thetafunctionen (V, B. Nr. 22);

4) über die Discussion jener einfachsten Relationen für $p = 3$ in Riemann's Vorlesung (V. B. Nr. 23);

5) über den „algebraischen Satz“, der für beliebige p die Constantenzahl der zu einem System gehörigen Wurzelformen liefert, insbesondere für $m = 2$ (V. B. Nr. 24);

6) über die auf das Abel'sche Theorem und die Thetafunction gestützte Theorie der Berührungscurven von Clebsch (V. C. Nrn. 29 u. 33).

Indessen verlangt die ausgedehnte Litteratur, die über Wurzelfunctionen und Berührungscurven existirt, eine besondere Besprechung, wobei auch fast die ganze Litteratur über Thetafunctionen heranzuziehen ist, aus deren „Charakteristikentheorie“ (nach Riemann'scher Bezeichnung (6_1)) sich bis jetzt allein eine vollständige Einsicht in die Gruppirungsverhältnisse der Wurzelfunctionen gewinnen lässt. Wir geben eine Uebersicht über diese Untersuchungen, einmal wegen der selbständigen Bedeutung dieser den rationalen Functionen des Gebildes nächst stehenden algebraischen Functionen, ferner wegen der wichtigen Anwendungen, welche von den Wurzelformen auf Geometrie und Abel'sche Functionen gemacht werden, und endlich wegen der nicht unerheblichen Schwierigkeiten, die in der Zuordnung des Transcendenten zum Algebraischen liegen. Darf man es zunächst dem Reize, den jene Anwendungen auf das weite Gebiet der algebraischen und transcendenten Relationen bieten, zuschreiben, dass so viele Forscher ihre Kräfte der Begründung

und Entwicklung der Theorie zugewendet haben, so hat doch andererseits die Ausbildung der Hülfsmittel einen sehr abstracten Zug angenommen, indem die Anwendung der Gruppentheorie auf die Charakteristikensymbole ganz in den Vordergrund getreten ist. Dies ist bis jetzt so sehr der Fall, dass wir den Relationen selbst nur ein (Schluss-) Capitel E widmen können, in den ersten vier Capiteln aber bloss von den Zuordnungen zu sprechen haben. Die Schwierigkeiten der Zuordnung waren auch die Ursache, dass in der Geschichte der Gruppirung der Wurzelformen häufig längst festgestellte Wahrheiten verkannt wurden, dass scheinbare Neufunde mit unzutreffenden Citaten, ja Rückschritte vorkamen — ein weiterer Grund zu einem eingehenden Bericht. Wir referiren zuerst in A—C über den heutigen Standpunkt hinsichtlich der Zuordnung von Wurzelfunctionen und -Formen zu Charakteristiken, der in Wirklichkeit auf die ältesten Arbeiten, insbesondere die Hermite'sche (5) sich gründet; wobei wir uns an Burkhardt (69) anlehnen können, der diese Coordination am eingehendsten und correctesten wiedergiebt, freilich nur für $p = 2$ und ohne historische Entwicklung. Wir werden dann in D über den geschichtlichen Gang berichten. Es sind daher der Reihe nach die folgenden Punkte zu besprechen:

A. ad 3): die genauere Zuordnung der Wurzelfunctionen zu transcendenten Ausdrücken und ihren Charakteristiken;

B. dasselbe bezüglich der Wurzelformen „ungerader Dimension" für $m = 2$ (s. unten Nr. 2 u. 9) und der Thetafunctionen;

C. die Anwendung auf den hyperelliptischen Fall;

D. die geschichtliche Entwicklung der Indices-Bezeichnungen, von Rosenhain und Weierstrass an, ihre Förderung von transcendenter und geometrisch-algebraischer Seite her bis zur Neuzeit;

E. die Theta- und Wurzelformen-Relationen für $m = 2$, insbesondere die neueren Arbeiten über $p = 3$ und 4.

Einen Ueberblick über Inhalt und Anordnung von A und B schicken wir in Nr. 2, über D in Nr. 14 voraus, während bezüglich E auf das Inhaltsverzeichnis verwiesen werden darf.

A. Zuordnung von Wurzelfunctionen zu transcendenten Functionen.

2. Die Theorie der Berührungscurven zu einer Grundcurve $f = 0$, derjenigen Curven, welche $f = 0$, abgesehen von festen gemeinsamen Punkten, überall, wo sie schneiden, m-punktig treffen, d. h. die Theorie der Wurzelfunctionen $m$ten Grades, ist von zwei Seiten her in Angriff

Uebersicht über A u. B.

genommen worden: einmal vom Abel'schen Theorem her, nach dem Vorgange von Clebsch (9); sodann mittelst des Ausdrucks der Wurzelfunctionen durch Thetaquotienten, nach Riemann (6_1) und Roch (8_1). Darüber, dass beide Arten eine und dieselbe transcendente Zuordnung zu den halben Perioden begründen, werden wir in A, Nr. 3 und 6 sprechen. Da aber diese Zuordnung in einer von Riemann festgestellten Weise von der Zerschneidung der zu $f = 0$ gehörigen Fläche abhängt, so haben wir in Nr. 4, 5 auch die Wirkungen zu verfolgen, welche die Abänderung der Zerschneidung auf die Zuordnung hervorbringt, und zu diesem Zwecke die linearen Periodentransformationen heranzuziehen, welche Hermite (5) aus der Theorie der elliptischen Functionen in die der höheren Transcendenten eingeführt hat: sie definiren die invarianten Eigenschaften, welche die Art der Zuordnung begründen.

Diese Zuordnung, insbesondere auf dem zweiten der oben bezeichneten Wege, kommt schon in den Formeln von Göpel, Rosenhain (2), Weierstrass (3) zum Ausdruck. Sie ist bei gegebener Zerschneidung algebraisch einfach ausführbar, liefert dann aber im allgemeinen nur gegenseitige Beziehungen zwischen Wurzelformen. Nur in einem Falle erhebt sie sich zur absoluten Charakterisirung: wenn nämlich eine der Wurzelformen mten Grades selbst rational ist: wie dies z. B. bei der Grundcurve vierter Ordnung f_4, $p = 3$, hinsichtlich der Schar der je m-punktig berührenden Curven mhter Ordnung gegenüber der Schar der m-fach zu zählenden Curven hter Ordnung stattfindet. Die so charakterisirten Wurzelformen mhter Dimension werden wir mit $\sqrt[m]{}$ bezeichnen; für $m = 2$ insbesondere mit $\sqrt{}$ die „Wurzelformen gerader Dimension".

Den nächsten Fortschritt stellt nun die in Abt. B zu besprechende Zuordnung dar, die den Fall $m = 2$ betrifft, indem sie zwar von der Zerschneidung der Fläche abhängt, aber absolute Eigenschaften der Wurzelformen ergiebt. Sie bezieht sich nicht mehr auf die Thetaquotienten, sondern einzeln auf deren Zähler und Nenner, und nicht mehr auf die Wurzelfunctionen, sondern auf „Wurzelformen ungerader Dimension", geometrisch auf die Verallgemeinerung der eine Grundcurve vierter Ordnung überall in erster Ordnung (je 2-punktig) berührenden Systeme von Curven ungerader Ordnung. Die berührenden Curven dritter Ordnung sind bekanntlich von Hesse (s. V, A. e) in Systeme erster und zweiter Art eingeteilt worden, denen man die beiden Arten von Thetafunctionen, bezw. die geraden und die ungeraden, entsprechen lassen kann. Diese Systembegriffe und Einteilungen übertragen sich auf eine beliebige Grund-

curve f, und zwar zunächst bezüglich der adjungirten überall berührenden Curven φ (s. V. C und D), aber weiter mit Hülfe der invarianten Darstellung (s. VIII. A) auch bezüglich der f überall berührenden Curven $X^{(2h+1)} = 0$ (wo $X^{(\mu)}$ ein Ausdruck μter Dimension in den φ ist). Um hierüber berichten zu können, haben wir jedoch sowohl transcendente (Nr. 7—9), wie algebraische (Nr. 10) Untersuchungen heranzuziehen: erstere insbesondere in Verbindung mit denen über die gleichzeitig auftretenden „Thetacharakteristiken", für welche wir vorläufig [nach Weierstrass] Königsberger (10) und Riemann (6_1), nennen, indem wir uns vorbehalten, das Geschichtliche, namentlich in Bezug auf die möglichen Systeme, in Abteilung D zu besprechen. Diese Zuordnung zu den (von den Charakteristiken der halben Perioden verschiedenen) Thetacharakteristiken kann bei gegebener Zerschneidung der Fläche mit den in A genannten Mitteln, verbunden mit einem einfachen combinatorischen Verfahren, ausgeführt werden (Nr. 11). Wir erwähnen hier nur noch, dass diese Mittel zuerst bei Riemann (6_1), bei Prym (7), Roch (8_1), Clebsch (9) auftreten, und durch Prym (15), vor allem aber durch die Bestimmung der unteren Grenzen der Integrale bei Clebsch-Gordan (17) — die übrigens einen andeutenden Vorläufer schon bei Thomae (12_1) hat — ihre Bedeutung erlangt haben. Nr. 12 berichtet über eine directere Zuordnung mittelst Formeln.

Abteilung C ist dazu bestimmt, unseren Bericht in A, B an einem sehr speciellen Beispiel zu illustriren und für D vorzubereiten.

3. Die Grundlage der Theorie kann man in der Formulirung, die ihr Clebsch (9) gegeben hat, aussprechen wie folgt. Lässt man in den Gleichungen des Abel'schen Theorems die oberen und unteren Grenzen der Integralsummen erster Gattung zu je m zusammenfallen, so erhält man:

Zuordnung durch das Abel'sche Theorem.

$$\sum_{i=1}^{q} \int_{y_i}^{x_i} du_\mu \equiv \frac{\omega_\mu^{\varkappa}}{m} \text{ (mod. ganzer Perioden)}. \quad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

wo $\omega_\mu^{\varkappa}$ eine lineare Function der 2p Perioden des Integrals erster Gattung u_μ mit ganzzahligen Coefficienten vorstellt, deren Index $\varkappa$ den verschiedenen Werten der letzteren zugeordnet ist. Es existirt dann eine „Wurzelfunction" $\sqrt[m]{[\psi(x)/\chi(x)]_\varkappa}$ (s. Nr. 1), welche in den Punkten $x_1, \ldots, x_q$ zu 0^1, in $y_1, \ldots, y_q$ zu ∞^1 wird; alle zu demselben $\varkappa$ gehörigen Wurzelfunctionen bilden ein System, und solcher Systeme giebt es m^{2p}. Sind die $y_1, \ldots, y_q$ gegeben, so giebt es ∞^{q-p} oder mehr

Lösungssysteme $x_1, \ldots x_q$. Zum Zweck einer Darstellung der Wurzelfunction kann man der Curve $\chi(x) = 0$ vorschreiben: zu f adjungirt zu sein und in den y_i je m-punktig zu treffen; der Curve $\psi(x)$: mit $\chi(x)$ von gleicher Ordnung, zu f adjungirt zu sein, durch die weiteren Schnittpunkte von χ mit f zu gehen und f in $q-p$ der q Punkte m-punktig zu treffen; unter diesen $\psi(x)$ sind die gesuchten enthalten. Eines der Systeme ist aber hier vor den übrigen als uneigentliches ausgezeichnet, indem für $\omega_\mu^\varkappa / m \equiv 0$ die Functionen desselben rational in den x werden; man rechnet daher nur die übrigen $m^{2p}-1$ Systeme als eigentliche.

Setzen sich die $\omega_\mu^\varkappa$ linear und ganzzahlig aus den 2p kanonischen Periodensystemen zusammen, ist also — wenn die Normalintegrale u_μ die Zuwächse πi, bezw. 0 bei Ueberschreiten der Riemann'schen Querschnitte a_μ, bezw. a_ν $(\mu \neq \nu)$ (d. h. längs der Wege b_μ, bezw. b_ν, negativ genommen, integrirt) annehmen, und die $a_{\mu\nu}$ $(\mu \gtreqless \nu)$ an den Querschnitten b_ν (d. h. längs der Wege a_ν, positiv genommen, integrirt) —

$$\omega_\mu^\varkappa \equiv m_\mu^\varkappa \pi i + \sum_{\nu=1}^{p} n_\nu^\varkappa a_{\mu\nu} \quad (\text{mod. } m). \quad (\mu = 1, 2, \ldots, p)$$

und

$$\frac{\omega_\mu^\varkappa}{m} \equiv g_\mu^\varkappa \pi i + \sum_\nu h_\nu^\varkappa a_{\mu\nu} \quad (\text{mod. ganzer Perioden})$$

[in Riemann'scher Bezeichnung (6), Art. 26 mit der Correctur in Werke VI], so giebt man der Wurzelfunction die transcendente „Periodencharakteristik" (P.-Ch.) $\begin{bmatrix} h_1^\varkappa, & \ldots & h_p^\varkappa \\ g_1^\varkappa, & \ldots & g_p^\varkappa \end{bmatrix}$ oder kürzer, indem man die g, h mit der bekannten Zahl m multiplicirt und die kleinsten Reste mod. m nimmt:

$$[\varkappa] = \begin{bmatrix} n_1^\varkappa, & \ldots, & n_p^\varkappa \\ m_1^\varkappa, & \ldots, & m_p^\varkappa \end{bmatrix}.$$

Nach der definirenden Relation haben dann Quotienten, bezw. Producte zweier Wurzelfunctionen, die zu demselben m gehören, P.-Chn., deren Elemente durch Subtraction, bezw. Addition der entsprechenden Elemente der P.-Chn. der beiden Wurzelfunctionen entstehen; und insbesondere ist der Quotient zweier Wurzelfunctionen von derselben P.-Ch. rational. Für $m = 2$ haben Product und Quotient zweier Wurzelfunctionen dieselbe P.-Ch.

Wenn nun auch zunächst diese P.-Chn. für die Berührungscurven, mit teilweise festen einfachen, teilweise m-fachen Schnittpunkten im allgemeinen nur relative Bedeutung haben, so kann man daraus doch einen absoluten Begriff herleiten, indem man im Nenner der Wurzel-

function $\sqrt[m]{[\varphi/\chi]}$, einen solchen Ausdruck $\chi(x)$ wählt, welcher eine vollständige mte Potenz einer ganzen Function hter Dimension der Coordinaten x_1, x_2, x_3 von x ist. Im Zähler erhält man dann eine Wurzelform, welcher man — relativ zu den bekannten rationalen Formen, also absolut — die P.-Ch. $[z]$ zuschreibt; wie z. B. die Wurzelform $\sqrt[m]{\varphi . \chi^{m-1}}$. Die Formen unter dem Wurzelzeichen, $= 0$ gesetzt, ergeben dann „reine" Berührungscurven, welche also die Grundcurve $f(x) = 0$ überall m-punktig treffen, und die von der Dimension $h.m$ in x_1, x_2, x_3 sind. [Der Doppelstrich $\sqrt[m]{\;}$ soll diese Formen im Falle $m = 2$ (von der Dimension $2h$) von den später (in B) ebenfalls zu behandelnden Wurzelformen $\sqrt{\;}$ „ungerader Dimension" $2h+1$ in x_1, x_2, x_3 unterscheiden.]

Nach der Angabe Riemann's (6), § 26, hat es keine Schwierigkeit, festzustellen, wie bei gegebener Zerschneidung der Riemann'schen Fläche die Zuordnung der Wurzelfunctionen W zu den Periodencharakteristiken stattzufinden hat. Man hat zu bestimmen, wie sich auf den Wegen a_μ und b_μ die Werte von W permutiren; wobei zu beachten ist, dass die Verzweigungsstellen von W im allgemeinen zu je m über denen der Riemann'schen Fläche liegen. Man kann auf diese Weise die Fläche auch für die Function W construiren [wegen specieller Fälle s. Dyck, Reguläre Riemann'sche Flächen, Math. Ann. 17, S. 500; Klein (34_5), S. 120; Thomae (75); sowie für den hyperelliptischen Fall und $m = 2$ unten, Nr. 13]. Die Wurzelfunction W, von der P.-Ch. $[z]$, nimmt dann auf dem positiven Wege a_μ den Factor $e^{g^\chi_\mu . 2\pi i}$, auf dem positiven Wege b_μ den Factor $e^{h^\chi_\mu . 2\pi i}$ an.

4. Die Frage, wie sich, wenn man die Zerschneidung ändert, die Periodencharakteristiken ändern, hat Hermite (5) schon 1855 erledigt. Hiernach führt eine solche Aenderung zu einer linearen ganzzahligen Transformation der 2p Periodicitätsmoduln $\omega_{\mu 1}, \dots, \omega_{\mu . 2p}$ irgend eines Integrals erster Gattung v_μ in neue solche $\omega'_{\mu 1}, \dots, \omega'_{\mu . 2p}$, wobei die Determinante der $(2p)^2$ Zahlencoefficienten zu 1 wird, und diese den (von Kronecker, Vorl. 1864 so genannten) Abel'schen Relationen genügen, welche ausdrücken, dass — vermöge der bilinearen Relationen

Hermite'sche Transformation.

$$\sum_{\nu=1}^{p} (\omega_{\mu\nu}\omega_{\mu', p+\nu} - \omega_{\mu'\nu}\omega_{\mu, p+\nu}) = 0$$

zwischen den Perioden $\omega_{\mu 1}, \dots, \omega_{\mu . 2p}$ und $\omega_{\mu' 1}, \dots, \omega_{\mu' . 2p}$ zweier Integrale erster Gattung u_μ und $u_{\mu'}$ — auch die analogen Beziehungen zwischen

den transformirten ω'_μ und $\omega'_{\mu'}$ bestehen müssen. Dies ist die Gruppe der sogenannten Abel'schen Substitutionen [Jordan (24), §§ 217—228, wo noch eine Erweiterung dieses Begriffes („arithm. Gruppe" bei (69)) gegeben ist. Ueber die Umkehrung des Satzes s. unten, Nr. 5].

Indem nun, vermöge der Definition der Perioden-mtel ω^x_μ/m durch eine Integralsumme, dieser Wert modulo ganzer Perioden auch beim Abändern der Zerschneidung erhalten bleibt, drücken sich die Elemente der ursprünglichen P.-Ch. $g^x_1, \ldots, g^x_p, h^x_1, \ldots, h^x_p$ durch die der transformirten P.-Ch. $g^{x'}_1, \ldots, g^{x'}_p, h^{x'}_1, \ldots, h^{x'}_p$ so aus, wie die $\omega'_{\mu 1}, \ldots, \omega'_{\mu, 2p}$ durch die $\omega_{\mu 1}, \ldots, \omega_{\mu, 2p}$, nur transponirt; und dasselbe gilt für die m^x, n^x und $m^{x'}, n^{x'}$. Damit ist die Grundlage der Theorie der P.-Chn. bezeichnet: es besteht nämlich zwischen irgend zwei P.-Chn. [x] und [l] die Beziehung, dass der aus ihren Elementen

$$m^x_1, \ldots, m^x_p, \; n^x_1, \ldots, n^x_p \text{ und } m^1_1, \ldots, m^1_p, \; n^1_1, \ldots, n^1_p$$

gebildete Ausdruck

$$K_{x,1} \equiv \sum_{\nu=1}^{p} (m^x_\nu n^1_\nu - n^x_\nu m^1_\nu)$$

bei allen Abel'schen Substitutionen, also bei allen kanonischen Abänderungen der Zerschneidung, invariant bleibt.

Da es genügt, die Zahlen m^x und n^x mod. m auf ihre kleinsten Reste zu reduciren, so fasst man auch zu einer Klasse oder einem System („Gruppe" bei Prym (15), woher dieser den Ausdruck „Gruppencharakteristik" nimmt) alle diejenigen Substitutionen zusammen, deren Elemente einander mod. m congruent sind; und man hat dann auch die Invarianz von $K_{x,1}$ nur mod. m zu verstehen. Die uneigentliche Klasse $\begin{bmatrix} 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 \end{bmatrix}$ geht immer nur in sich selbst über.

Man fasst auch die m Perioden-mtel $0, \omega^x/m, 2\omega^x/m, \ldots, (m-1)\omega^x/m$, wenn m Primzahl ist, zu einem Aggregat von Systemen zusammen und hat dadurch für die Berührungsprobleme, welche auf die Wurzelfunctionen mten Grades führen, eine Resolvente vom Grade $(m^{2p}-1)/(m-1)$. Zwischen je zwei solchen zusammengefassten Perioden-mteln herrscht die Beziehung $K \equiv 0$ (mod. m). Leitet man noch ein zweites solches Aggregat ebenso aus ω^1/m ab, und ist $K_{x,1} \equiv \alpha$ (mod. m), so wird das K für zwei Perioden aus den beiden Aggregaten immer dann zu 0, wenn $\alpha = 0$, dagegen wird K alle Werte $1, 2, \ldots, m-1$ annehmen, sobald $\alpha \neq 0$. Bei diesem Zusammenfassen zu Aggregaten kommt also bloss die Unterscheidung $K \equiv 0$ oder nicht $\equiv 0$ (mod. m) in Betracht. Eine gemeinsame P.-Ch. für das ganze Aggregat findet sich, bei $m = 3$, in der Anmerkung zu (66_1).

Die Substitutionsgruppe.

5. Die Gruppe H der mod. m verschiedenen Abel'schen oder „linearen Perioden"-Substitutionen ist, wie Hermite (5) für den Fall $p = 2$, $m = 2$ und Jordan (24) allgemein nachweist, von der Ordnung:

$$\Omega_p^{(m)} = (m^{2p}-1)\,m^{2p-1}\,.\,\Omega_{p-1}^{(m)}$$
$$= (m^{2p}-1)\,m^{2p-1}\,.\,(m^{2p-2}-1)\,m^{2p-3}\ldots(m^2-1)\,m.$$

Für ein ungerades m hat dieselbe eine ausgezeichnete Untergruppe von zwei Substitutionen [$m_\nu' = -m_\nu$, $n_\nu' = -n_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, p)$ und die Identität], sodass man auf die Lösung eines Teilungsproblems mit einer einfachen Gruppe von der Ordnung $\frac{1}{2}\Omega_p^{(m)}$ und eine Quadratwurzel kommt. Für $m = 2$, $p > 2$ ist die Gruppe einfach, für $m = 2$, $p = 2$ wieder aus den Factoren $\frac{1}{2}\Omega_2^{(2)} = 360$ und 2 zusammengesetzt.

Die Zusammensetzung dieser Substitutionen aus gewissen elementaren, erzeugenden Substitutionen hat zuerst Kronecker in Vorlesungen von 1864 (16) vorgenommen; bekannt wurde dieselbe zuerst durch Clebsch-Gordan (17), letztes Capitel), danach aus Arbeiten von Thomae (18) und (27), und von Henoch (19) (neuerdings s. Krazer, Annali di Matem., Ser. 2, XII, 1884). Insbesondere hat Thomae ausgeführt, dass auch jeder linearen (Abel'schen) Periodentransformation eine kanonische Querschnittsänderung der Riemann'schen Fläche entspricht: denn diese Aenderungen lassen sich ebenfalls auf eine Reihenfolge elementarer Aenderungen zurückführen, denen gerade die die allgemeine Transformation erzeugenden Periodentransformationen entsprechen.

Damit ist nachgewiesen, dass, im Falle der Irreductibilität derjenigen Gleichung, welche die mod. m wesentlich von einander verschiedenen Querschnittsänderungen der Riemann'schen Fläche ausdrückt, die „specielle" m-Teilungsgleichung, d. h. die algebraische Gleichung für die reinen Berührungscurven m.hter Dimension (s. oben Nr. 3), ebenfalls die Gruppe von der Ordnung $\Omega_p^{(m)}$ zur Gruppe hat. Wegen eines reductibeln Falles s. unten, Nr. 13.

Weitere Erzeugungen aller Substitutionen aus gewissen elementaren bei $m = 2$ werden später (Nr. 19 und 23) zur Sprache gebracht.

Zuordnung durch Thetaquotienten.

6. Die mitgeteilten Ergebnisse lassen sich auch an der expliciten Darstellung der Wurzelfunctionen durch Thetaquotienten ablesen (Roch (8_1), etc.), ohne dass indessen dadurch für die Theorie der Wurzelfunctionen Neues hinzukommt. Diese Darstellungen, welche auf die Theorie der elliptischen Functionen zurückgehen, werden auf den Hermite'schen Satz (Brief an Jacobi, J. f. Math. 32) und dessen Erweiterung ((6),

(9), (14), (17) etc.) gegründet. Nach Riemann (6), Art. 26, ist (bei den von ihm gewählten unteren Grenzen):

$$\prod_{l=1}^{r} \frac{\vartheta\left(\int^{x} du - C^{(l)}\right)}{\vartheta\left(\int^{x} du - C'^{(l)}\right)} e^{-2\sum_{\mu=1}^{p} h_\mu n_\mu} = c \cdot \sqrt[m]{\left[\frac{\psi(x)}{\chi(x)}\right]_{\varkappa}},$$

wenn

$$\sum_{l} C_{\mu}^{(l)} - \sum_{l} C'^{(l)}_{\mu} = \sum_{i=1}^{q} \int_{y_i}^{x_i} du_\mu = \frac{\omega_\mu^{\varkappa}}{m}$$

ist. und wenn man die C^l und $C'^{(l)}$ gleich Summen von je p Integralen setzt, in deren oberen Grenzen die $x_1, \ldots, x_q$ auf die C, die $y_1, \ldots, y_q$ auf die C', von beiden gemeinsamen Punkten abgesehen, verteilt sind; vorausgesetzt, dass dadurch keines der ϑ für alle Werte von x verschwindet. Insbesondere braucht man nur je einen Factor in Zähler und Nenner, wenn $q \overline{\overline{<}} p$ ist, und die p Punkte von C' nicht durch eine Form φ verknüpft sind.

B. Zuordnung von Wurzelformen zweiten Grades ungerader Dimension zu Thetafunctionen.

Die Thetacharakteristiken.

7. Die in die Theorie eingeführten m^{2p} Thetafunctionen

1) $$c . e^{-2\sum_\nu h_\nu v_\nu} . \vartheta(\ldots, v_\mu - g_\mu \pi i - \sum_\nu h_\nu a_{\mu\nu}, \ldots; a_{\mu\nu})$$

lassen sich aus der in der gegebenen kanonischen Zerschneidung der Riemann'schen Fläche ausgezeichneten Function $\vartheta(v; a_{\mu\nu})$ mit Hülfe von Systemen $g_\mu = m_\mu/m$, $h_\mu = n_\mu/m$ von mteln ganzer Zahlen (mod. m) ableiten. Dabei bedeuten die v_μ die zu dieser Zerschneidung, mit den Querschnitten a_ν. b_ν, gehörigen p Normalintegrale erster Gattung (IV, Nr. 18), welche an a_ν die Periodicitätsmoduln πi oder 0, je nachdem $\nu =$ oder $\neq \mu$, und an b_ν die $a_{\mu\nu}$ haben; c ist eine von den v unabhängige Zahl. Für diese Functionen hat man die Bezeichnung

2) $$\vartheta_{\binom{h_1, \ldots, h_p}{g_1, \ldots, g_p}}(v) = \vartheta_{\substack{h \\ g}}(v), \quad \text{oder auch} \quad \vartheta_{\binom{n_1, \ldots, n_p}{m_1, \ldots, m_p}} = \vartheta_{\substack{n \\ m}}(v)$$

angenommen, und nennt den Index einer solchen Thetafunction, $\substack{h \\ g}$ oder $\substack{n \\ m}$, ihre Thetacharakteristik.

Die Einführung der m^{2p} Ausdrücke als besonderer Functionen [für das Geschichtliche s. unten Nr. 14] geht über den Zweck einer bequemen Bezeichnung und übersichtlicheren Gestaltung der Formeln hinaus. In den Ausdruck 1) gehen nämlich die Zahlen g, h nur als Elemente einer „Perioden-

charakteristik" (Nr. 3) ein; aber mit diesen P.-Chn. sind die „Thetacharakteristiken" (Th.-Chn.) nicht zu verwechseln. Diese werden nur dann zu P.-Chn., wenn man sie eben **relativ** gegen das zu Grunde gelegte ϑ betrachtet, d. h. unter Auszeichnung der nicht an sich ausgezeichneten Th.-Ch. $\left({00\ldots0 \atop 00\ldots0}\right)$. Hätte man $\vartheta_{\substack{h\\g}}(v)$ dem Perioden-mtel $\omega_\mu/m = g_\mu\pi i + \sum_\nu h_\nu a_{\mu\nu}$ ($\mu = 1, \ldots, p$), d. h. der P.-Ch. $\left[{h \atop g}\right]$, zugeordnet, so würde eine Vermehrung der unbestimmten Argumente v_μ um $\omega^\varkappa_\mu/m = g^\varkappa_\mu\pi i + \sum_\nu h^\varkappa_\nu a_{\mu\nu}$ zugleich eine Zuordnung zu $\left[{h+h^\varkappa \atop g+g^\varkappa}\right]$ verlangen, d. h. man müsste immer m^{2p} gleichberechtigte Zuordnungen für alle Thetafunctionen gleichzeitig einführen. Die explicite Einführung der m^{2p} Thetafunctionen und ihrer besonderen Charakteristiken bedeutet also, dass man die Bevorzugung der einen vor allen übrigen aufgehoben hat, und dass man dieselben zunächst als gleichberechtigt auffasst.

Auch aus der Theorie der Transformation der Thetafunctionen, welche der einer Aenderung der Zerschneidung zugehörigen linearen Periodentransformation (s. Nr. 4) entspricht, folgt dasselbe. Sind nämlich v'_μ die neuen Normalintegrale, welche mit den v_μ durch lineare homogene Relationen zusammenhängen, $a'_{\mu\nu}$ die neuen Periodicitätsmoduln, so geht $\vartheta_{\substack{h\\g}}(v; a_{\mu\nu})$ nicht in $\vartheta_{\substack{h'\\g'}}(v'; a'_{\mu\nu})$ über, wo die g', h' mit den g, h durch diejenigen linearen homogenen Gleichungen verbunden sind, über welche in Nr. 4 berichtet wurde; sondern, von einer Exponentialgrösse abgesehen, in $\vartheta_{\substack{h'\\g'}}(v' + \frac{1}{2}\omega'^0; a'_{\mu\nu})$, wo $\frac{1}{2}\omega'^0$ eine gewisse **halbe** Periode vorstellt (s. Hermite (5), Königsberger (10), Thomae (12), Clebsch-Gordan (17), Weber (37), Noether (62), etc.; in Bezug auf Algebraisches s. auch unten Nr. 11). Für ein ungerades m hat man also, wenn man nicht auf 2mtel Charakteristiken kommen will, noch die additive Substitution $v' + \frac{1}{2}\omega'^0 = w'$ hinzuzufügen, und hat dann zwischen den Elementen der Charakteristiken $\substack{h\\g}, \substack{h'\\g'}$ im wesentlichen nur die vorgenannte Periodensubstitution. Für $m = 2$ dagegen geht, wenn $\frac{1}{2}\omega'^0_\mu = g'^0_\mu\pi i + \sum_\nu h'^0_\nu a'_{\mu\nu}$ ist, $\vartheta_{\substack{h\\g}}(v)$ in $\vartheta_{\substack{h'+h'\\g'+g'}}(v')$ über; d. h. die Transformation der Elemente n, m der Th.-Ch. geht aus der der P.-Ch. hervor, wenn man noch alle Elemente der neuen Per.-Ch. um diejenigen Zahlen n'^0_μ, m'^0_μ vermehrt, welche aus der Th.-Ch. $\left({0\ldots0 \atop 0\ldots0}\right)$ entstehen.

8. Wir beschränken uns wegen des ausgezeichneten Verhaltens von $m = 2$ (s. Nr. 2 und Nr. 7) nunmehr auf diesen Fall: Gewöhnliche Thetafunctionen und Wurzelfunctionen zweiten Grades.

Eigenschaften derselben.

Als Fundamentalsatz bezüglich der Thetafunctionen für $m = 2$ und ihrer Charakteristiken hat man, parallel zu dem in Nr. 4 mitgeteilten Invarianzsatz, den folgenden anzusehen (s. die in Nr. 2 genannten Arbeiten):

Die 2^{2p} Thetafunctionen zerfallen in $2^{p-1}(2^p + 1)$ gerade und $2^{p-1}(2^p - 1)$ ungerade Functionen ihrer Argumente, je nachdem $\sum_\nu n_\nu m_\nu \equiv 0$ oder 1 (mod. 2). Dieser Charakter (des Geraden oder Ungeraden) bleibt bei allen linearen (Abel'schen) Periodentransformationen (Nr. 4, 7) erhalten.

Während also die $2^{2p} - 1$ Per.-Chn. unter sich gleichberechtigt sind, zerfallen die 2^{2p} Th.-Chn. in zwei Arten. Die „geraden Chn.“ ($\sum n_\nu m_\nu \equiv 0$) oder Chn. erster Art werden gewöhnlich mit (a), (b), ..., die „ungeraden Chn.“ ($\sum n_\nu m_\nu \equiv 1$) oder Chn. zweiter Art mit (α), (β), ... bezeichnet, die Th.-Chn. überhaupt mit $(\varkappa)$, (k), (l), ... (die P.-Chn., wie oben Nr. 3 erwähnt, mit $[\varkappa]$, [k], [l], ...). Aus der Definition der Thetafunctionen ergiebt sich die weitere Bedeutung der Thetacharakteristiken, dass der Ausdruck 1) von Nr. 7 bei Vermehrung des Argumentes v_μ um $-\pi i$ den Factor $(-1)^{n_\mu}$, bei Vermehrung der Argumente $v_1, \dots, v_p$ um $a_{1\mu}, \dots, a_{p\mu}$ den Factor $e^{-(2v_\mu + a_{\mu\mu})} . (-1)^{m_\mu}$ annimmt. Indem man hieraus auf die Factoren von Producten und Quotienten von Θ-Functionen schliesst, ergiebt sich als Gewinn der Einführung der Chn. eine Rechnung mit Charakteristiken. Die Producte von Thetafunctionen zu je r geben nämlich neue Functionen höherer (rter) Ordnung, und nehmen bezw. die Factoren $(-1)^{\overset{\sum}{r} n_\mu}$, $e^{-r(2v_\mu + a_{\mu\mu})} . (-1)^{\overset{\sum}{r} m_\mu}$ an, also mit Charakteristiken, deren Elemente die Summen der Elemente der Chn. der einzelnen Functionen sind. Ein Aehnliches gilt für Quotienten der Functionen und die Differenzen der Chn. Chn. werden also bei beliebigem m summirt, indem man je ihre entsprechenden Elemente summirt (und mod. m reducirt). Da sich nun die Differenz oder Summe zweier Th.-Chn., oder überhaupt die „Summe“ einer geraden Anzahl solcher, mod. 2 genau wie die P.-Chn. transformiren, die Summe einer ungeraden Anzahl von Th.-Chn. aber mod. 2 wieder wie Th.-Chn., so hat man als Grundregel für $m = 2$:

Wenn man r Th.-Chn. durch Summirung entsprechender Elemente zu neuen Chn. zusammensetzt, so ist das Resultat für ein ungerades r wieder eine Th.-Ch. einer der beiden Arten, die gerade Th.-Ch. $\binom{00\dots0}{00\dots0}$ als nicht ausgezeichnet eingeschlossen; für ein gerades r aber eine P.-Ch., wobei jedoch als ausgezeichnet die uneigentliche P.-Ch. auftreten, d. h. die Summe identisch verschwinden kann: alsdann sind

die r Th.-Chn. linear-abhängig. P.-Chn., in beliebiger Anzahl zu einander addirt, geben wieder solche, oder identisch 0.

Die „Summe" von Chn. $\varkappa + l + m + \cdots = \frac{h^\varkappa + h^l + h^m + \cdots}{g^\varkappa + g^l + g^m + \cdots}$ bezeichnet man kurz mit $\varkappa l m \ldots = \frac{h^\varkappa h^l h^m \ldots}{g^\varkappa g^l g^m \ldots}$.

Aus den Thetafunctionen bildet man Quotienten, die 2p-fach periodische Functionen von $v_1, \ldots, v_p$ darstellen, indem man in Zähler und Nenner Producte von gleich vielen Thetafunctionen und von gleicher Gesamtcharakteristik anschreibt, wie z. B. $\vartheta_\varkappa^2(v)\,\vartheta_l^2(v)$ oder $\vartheta_\varkappa(v)\vartheta_l(v)\,\vartheta_m(v)\vartheta_{\varkappa lm}(v)$. Auch hieraus lässt sich die eben erwähnte Grundregel für Th.-Chn. ableiten (s. Schottky (63)). Diese 2p-fach periodischen Functionen sind die sogenannten „Abel'schen Functionen" im weiteren Sinne; sie zerfallen ebenfalls in gerade und ungerade Functionen ihrer Argumente. Von den drei Th.-Chn. $\varkappa, l, m$ oder ihren zugehörigen ϑ-Functionen, und ebenso von den Quadrupeln $\varkappa, l, m, \varkappa lm$, sagt man nun, dass sie, je nachdem jener letztere Quotient eine gerade oder ungerade Function ist, in „syzygetischer" oder „azygetischer" Beziehung stehen [Bezeichnung von Frobenius (56); hergenommen von dem Verhalten der zugehörigen Wurzelformen (s. Nr. 10) für ungerade $\varkappa, l, m$]. Zwei Perioden-Charakteristiken werden „syzygetisch" oder „azygetisch" genannt, je nachdem ihr K (s. Nr. 4) gerade oder ungerade ist.

9. Ist es möglich, einer Thetafunction eine Wurzelform zuzuordnen, so kann man nach Nr. 6, indem man dieselbe mit Wurzelfunctionen multiplicirt, sogleich jeder Thetafunction Wurzelformen zuordnen. Jene Zuordnung, welche in den in Nr. 2 citirten Arbeiten erörtert wird, besprechen wir nach Clebsch-Gordan (17). Man geht dabei wieder von einer gegebenen Zerschneidung der Riemann'schen Fläche aus und betrachtet die p Nullpunkte $y_1^0, \ldots, y_p^0$ der Function von x: $\vartheta\left(\int_y^x du\right)$, wo nur angenommen ist, dass $\vartheta(0) \neq 0$ sein soll. Die y_i^0 hängen nur von y ab und sind bei Clebsch-Gordan algebraisch definirt, nämlich als die p Berührungspunkte einer gewissen, bei der gegebenen Zerschneidung bestimmten Berührungscurve (n—2)ter Ordnung Γ_{n-2}, welche zur Grundcurve f_n adjungirt ist, durch die n—2 weiteren Schnittpunkte von f_n mit ihrer Tangente T des Punktes y hindurchgeht und die f_n in eben jenen p Punkten y_i^0 berührt. Eine Abänderung von y in z würde die p Punkte y_i^0 nur in solche p Punkte z_i^0 überführen, welche rational durch die y_i

Zuordnung der Thetafunctionen zu gewissen Berührungscurven. Die $\Gamma_{q\varkappa}$ der beiden Arten.

y_i^0, z bestimmt sind. Nachdem die p Punkte y_i^0 festgelegt sind, ergeben sich die Nullpunkte $x = x_1, \ldots, x_p$ von $\vartheta\left(\int_y^x du - e\right)$, bei beliebigen e, vermöge der Congruenzen: $e_\mu \equiv \sum_i \int_{y_i^0}^{x_i} du_\mu$ (mod. Perioden). Werden die $e_1, \ldots e_p$ gleich einem halben Periodensystem $\frac{1}{2}\omega^\varkappa$ gesetzt, so erhält man eine Berührungscurve $\Gamma_{n-2}^{(\varkappa)}$, die mit $\Gamma_{n-2}^{(0)}$ alle Eigenschaften gemein hat, nur dass sie f in anderen p Punkten $y_i^{(\varkappa)}$ berührt: Punkte, in denen nun die Function $\vartheta_\varkappa\left(\int_y^x du\right)$ von x verschwindet. Den 2^{2p} Thetafunctionen entsprechen also 2^{2p} solcher Berührungscurven $\Gamma_{n-2}^{(\varkappa)}$, mit denselben festen einfachen Punkten; und auch diese $\Gamma_{n-2}^{(\varkappa)}$ sind, je nach dem Charakter der Th.-Ch. $(\varkappa)$, in zwei Arten zerlegbar, in solche erster Art, wenn $(\varkappa)$ gerade, also selbst erster Art, und zweiter Art, wenn $(\varkappa)$ ungerade, also zweiter Art ist. Die Zerlegung ist sonach gegenüber den Periodentransformationen invariant.

Die Grundlage bezüglich der algebraischen Kriterien dieser Einteilung giebt aber der Riemann'sche Satz über das Verschwinden der Thetafunctionen (13), nach welchem, wenn $\vartheta(v)$ und alle Differentialquotienten von $\vartheta(v)$ bis zu den $(\rho-1)$ten incl. verschwinden und

$$v_\mu = \int_y^x du_\mu - \sum_{i=1}^p \int_{y_i^0}^{x_i} du_\mu \quad (\mu = 1, \ldots, p)$$

gesetzt wird, $\rho-1$ der Grössen x_i willkürlich sind, d. h. die $(x_1, \ldots, x_p)$ einer linearen $\infty^{\rho-1}$-Vollschar angehören. Sobald nun $\vartheta_\varkappa(0) = 0$ ist, fällt einer der p Punkte $y_i^\varkappa$ in y selbst, während die übrigen p—1 Punkte $\eta_1^{(\varkappa)}, \ldots, \eta_{p-1}^{(\varkappa)}$ die Berührungspunkte einer f überall berührenden Curve $\varphi_\varkappa$, einer „reinen" adjungirten Berührungscurve (n—3)ter Ordnung $\varphi_\varkappa = 0$, d. h. die Nullpunkte einer Berührungsform $\sqrt{\varphi_\varkappa}$ werden. Dieser Fall tritt bei ungeradem $(\varkappa)$ immer ein, und kann bei geradem $(\varkappa)$ eintreten [vermöge specieller Moduln (Abschn. VIII, Nr. 4)]. Und zwar gehört [s. Prym (15), Weber (35)] die Punktgruppe $\eta_1^{(\varkappa)}, \ldots, \eta_{p-1}^{(\varkappa)}$, und damit die zugehörige Wurzelform $\sqrt{\varphi_\varkappa}$, zu einer linearen Schar, indem sich diese aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von solchen linear und homogen zusammensetzt, je nachdem die Th.-Ch. $(\varkappa)$ gerade oder ungerade ist. Speciell also entspricht der Charakteristik $(\varkappa)$ eine einzige Form, wenn $(\varkappa)$ ungerade ist und die ersten Differentialquotienten von $\vartheta_\varkappa(v)$ für $v_1 = v_2 = \cdots = v_p = 0$ nicht alle verschwinden, d. h. oben für

$\rho = 1$. Algebraisch hat man somit Berührungscurven erster oder zweiter Art, je nachdem die zugehörigen Wurzelformen $\sqrt{\varphi_\varkappa}$ eine $\infty^{2\nu-1}$- oder $\infty^{2\nu}$-Schar bilden (auch für $\nu = 0$ gültig). Im Falle der Curve vierter Ordnung mit $p = 3$ sind die berührenden $\varphi_\varkappa$, die 28 Doppeltangenten, alle zweiter Art ($\nu = 0$, $\varkappa$ ungerade); im hyperelliptischen Falle $p = 3$ giebt es bei der Grundcurve fünfter Ordnung mit dreifachem Punkt a: erstens die 28 von a ausgehenden Tangentenpaare, als $\varphi_\varkappa$ zweiter Art ($\nu = 0$, $\varkappa$ ungerade); zweitens die ∞^1-Schar der doppelt gezählten Geraden durch a, als $\varphi_\varkappa$ erster Art ($\nu = 1$, $\varkappa$ gerade). Hiermit sind also auch reine Berührungscurven, nämlich alle $\sqrt{\varphi_\varkappa}$, Thetafunctionen $\vartheta_\varkappa(v)$ zugeordnet, aber nur dann, wenn $\vartheta_\varkappa(0)$ verschwindet.

10. Die bisher geschilderten Zuordnungen geben zwar, wenn man die einfachsten Wurzelformen zu Producten und homogenen Summen combinirt, schon die Charakteristiken einer grossen Anzahl von Wurzelformen; um aber eine Einsicht in die Anordnung aller Wurzelformen zu erhalten, sind noch die algebraischen Betrachtungen über invariante Darstellung herbeizuziehen, über welche im VIII. Abschnitt, A berichtet worden ist. Zunächst wird man die in Nr. 9 besprochenen $\Gamma_{n-2}^{(\varkappa)}$ durch Zufügen der Tangente T in reine Berührungscurven $\psi_{n-1}^{(\varkappa)} = T.\Gamma_{n-2}^{(\varkappa)}$ $(n-1)$ter Ordnung umwandeln, welche f_n in $p+n-1$ Punkten berühren, um so für jede Th.-Ch. $(\varkappa)$ auf Wurzelformen $\sqrt{\psi_{n-1}^{(\varkappa)}}$ zu kommen. Irgend zwei Wurzelformen, deren Quotient rational ist, werden alsdann demselben System $(\varkappa)$ zugeordnet. Das Product zweier demselben $(\varkappa)$ zugeordneten Wurzelformen $\sqrt{\psi_{n-1}^{(\varkappa)}}$ und $\sqrt{\chi_r^{(\varkappa)}}$ ist aber nicht nur eine rationale, sondern, vermöge $f_n = 0$, sogar eine ganze Function der Coordinaten, sobald auch $\chi_r^{(\varkappa)} = 0$ zu f adjungirt ist (wie der Restsatz zeigt); und die Gleichungen der Form:

$$\psi_{n-1}^{(\varkappa)}.\chi_r^{(\varkappa)} - B^2 = f.A \quad \text{(B und A ganze Funct. der Coord.)}$$

definiren alle zu $(\varkappa)$ gehörigen Wurzelformen $\sqrt{\chi_r^{(\varkappa)}}$, mit linearen Parametern, wie sie in B eingehen.

Die invariante Darstellung setzt nun, nach VIII, A, an Stelle der eben genannten reinen Berührungscurven $\psi_{n-1}^{(\varkappa)}$ und $\chi_r^{(\varkappa)}$ nur solche $X_\varkappa^{(\mu)}$ [wo sich nun in den grossen X der obere Index auf die Dimension in den φ, der untere auf die Charakteristik bezieht], deren Gleichungen sich aus Ausdrücken μter Dimension $\Phi^{(\mu)}$ in den p φ-Formen linear zusammensetzen, und welche in $\mu(p-1)$ Punkten des algebraischen Gebildes je doppelt verschwinden. Für $\mu = 1$ sind die $\sqrt{X^{(1)}}$ die in Nr. 9 angeführten einfachsten Wurzelformen $\sqrt{\varphi_\varkappa}$. Die Grundlage der ganzen Systemtheorie ist hier die Erweiterung der Hesse'schen Gleichung (s. oben

Nr. 1. 2)):

$$X^{(\mu)}.X^{(2\lambda-\mu)} - [\Phi^{(\lambda)}]^2 = 0.$$

Wenn man nämlich im Falle einer Curve vierter Ordnung ($p = 3$) durch die 2μ Berührungspunkte einer reinen Berührungscurve μter Ordnung $X^{(\mu)}$ eine Curve $\Phi^{(\lambda)}$ der Ordnung $\lambda = \frac{1}{2}(\mu+2)$, bezw. $= \frac{1}{2}(\mu+3)$ legt, so ergiebt vorstehende Gleichung deren Zurückführung auf eine reine Berührungscurve $X^{(2\lambda-\mu)}$ der Ordnung $2\lambda-\mu = 2$, bezw. 3, also eines der 63 gleichberechtigten berührenden Kegelschnittsysteme oder das uneigentliche System der doppelt gezählten Geraden, bezw. eines der $36+28$ Systeme von berührenden Curven dritter Ordnung. Genau ebenso ergiebt sich für den allgemeinen Fall aus jener Gleichung, dass sich alle Wurzelformen zweiten Grades, $m = 2$, von beliebigem μ, zunächst in zwei Abteilungen bringen lassen:

1) Wurzelformen gerader Dimension, für gerades μ, nach Nr. 3 mit $\sqrt{X^{(\mu)}}$ zu bezeichnen, und aus $\sqrt{X^{(2)}}$ rational abzuleiten, speciell auch aus dem uneigentlichen System der doppelt gezählten φ als $X^{(2)}$;

2) Wurzelformen ungerader Dimension, für ungerades μ, mit $\sqrt{X^{(\mu)}}$ zu bezeichnen, aus $\sqrt{X^{(3)}}$ rational abzuleiten.

Dividirt man die Formen $\sqrt{X^{(\mu)}}$ von 1) durch die bei geradem μ rationale Form $\varphi^{\frac{1}{2}\mu}$, so erhält man eine Wurzelfunction, welcher in Nr. 3 eine Periodencharakteristik zugeordnet wurde. Die Form $\sqrt{X^{(\mu)}}$ wurde daher wie in Nr. 3 bezeichnet. Auch nach Nr. 8 muss man diesen Formen $\sqrt{X^{(\mu)}}$, welche sich aus Summen von Producten von je einer geraden Anzahl von $\sqrt{\varphi_\varkappa}$ zusammensetzen, eine Periodencharakteristik zuordnen. Es giebt also $2^{2p}-1$ eigentliche und ein uneigentliches System von solchen $\sqrt{X^{(\mu)}}$.

Die Formen 2), für ungerade μ, zerfallen noch weiter in zwei Arten. Bei der f_4, $p = 3$, hat man in Bezug auf die $X^{(3)}$ nur die beiden Fälle der Nichtexistenz oder der Existenz einer Gleichung

$$X_\varkappa^{(3)}.\varphi_\varkappa - [\Phi^{(2)}]^2 = 0, \text{ vermöge } f_4 = 0,$$

oder, was dasselbe ist, einer Gleichung

$$X_\varkappa^{(\mu)}.\varphi_\varkappa - [\Phi^{\frac{1}{2}(\mu+1)}]^2 = 0;$$

denn im ersten Falle ist $(\varkappa)$ gerade ($\nu = 0$, Berührungssystem erster Art, s. Nr. 9), im zweiten Falle ist $(\varkappa)$ notwendig ungerade ($\nu = 0$, Berührungssystem zweiter Art, $\varphi_\varkappa$ eine der 28 Doppeltangenten). Allgemeiner hat man für die Systeme $X_\varkappa^{(3)}$ auch zunächst wieder die beiden Unterabteilungen, je nachdem eine Gleichung der Art

$$X_\varkappa^{(3)} X_\varkappa^{(1)} - [\Phi^{(2)}]^2 = 0$$

nicht existirt oder existirt. Im ersten Falle ist $(\varkappa)$ jedenfalls gerade, und wir sprechen von einem System erster Art. Die letzteren Systeme führen auf Systeme $\lambda_\varkappa^1 = \varphi_\varkappa$; aber man hat dieselben nun noch weiter nach der Mannigfaltigkeitszahl $M_\varkappa$ eines solchen Systems $\sqrt{\lambda_\varkappa^{1)}}$ zu sammeln und, nach Nr. 9, den Th.-Chn. $(\varkappa)$, für die $\vartheta_\varkappa(0) = 0$, zuzuordnen. Dass alle Systeme von Wurzelformen ungerader Dimension den 2^{2p} Theta-Charakteristiken einzeln zugeordnet sind, dass es also 2^{2p} getrennte Systeme giebt, lehrt auch die Ersetzung von $T.F_{n-2}'$ (s. Anfang dieser Nr.) durch eine Form $\Phi^1.\Phi_\varkappa^2$, wo Φ^1 irgend eine in y doppelt verschwindende φ-Form, $\Phi_\varkappa^2$ ein Ausdruck Φ^2 ist, der in den übrigen Nullpunkten von Φ^1 ebenfalls verschwindet, in p weiteren Punkten $y_1^{(\varkappa)}, \ldots, y_p^{(\varkappa)}$ aber zu 0^2 wird. Dies ist dann eine $(\varkappa)$ zugeordnete Form $\lambda_\varkappa^{3)}$, was auch die Th.-Ch. $(\varkappa)$ sei; und auf diese Formen $\lambda_\varkappa^{3)}$ lassen sich alle $\lambda^{3)}$ reduciren.

Die Zuordnung zu den Th.-Chn. $(\varkappa)$ giebt also eine Einteilung der Wurzelformen ungerader Dimension in 2 Arten: 1) solche erster Art, für welche die Anzahl $M_\varkappa$ der linear-unabhängigen Functionen des Systems $\sqrt{\lambda_\varkappa^{1)}}$, auf welches die Wurzelform rational zurückführt, also auch die Th.-Ch. $(\varkappa)$, gerade ist (wozu auch der obige Fall $M_\varkappa = 0$ gehört); es giebt deren $2^{p-1}(2^p+1)$ getrennte Systeme; 2) solche zweiter Art, für welche $M_\varkappa$, also auch $(\varkappa)$, ungerade ist; $2^{p-1}(2^p-1)$ getrennte Systeme.

Den Grund dieser Einteilung nach dem Charakter der Zahl $M_\varkappa$ rein algebraisch zu erkennen, ist eine wichtige, noch ungelöste Aufgabe der Theorie der Wurzelformen; es bleibt rein algebraisch nachzuweisen, dass eine für allgemeine Moduln einfache Lösung $\sqrt{\lambda_\varkappa^{1}}$ $(M_\varkappa = 1)$ bei speciellen Moduln nur in eine ∞^2-, ∞^1-, ...- Schar von Lösungen übergehen kann.

Insofern die Th.-Chn. $(\varkappa)$ den Wurzelformen ungerader Dimension zugeschrieben sind, heissen sie bei Noether (38_1) etc. auch „eigentliche Charakteristiken" $(\varkappa)$, bei Klein (s. Burkhardt (69) etc.) „Primcharakteristiken"; und insofern die Per.-Chn. $[\varkappa]$ den Wurzelformen gerader Dimension oder den Wurzelfunctionen zugeschrieben werden, bei Noether auch „Gruppencharakteristiken" $[\varkappa]$, bei Klein „Elementarcharakteristiken".

Uebergang von relativen zu absoluten Charakteristiken bei gegebener Zerschneidung.

11. Die Frage, wie man für die Wurzelformen ungerader Dimension die (absoluten) eigentlichen oder Theta-Charakteristiken bei einer vorgelegten Zerschneidung der Riemann'schen Fläche ohne Integrationen finden kann, ist in neuerer Zeit mehrfach aufgeworfen worden (implicit bei Staude (58_1); bei Klein (60_1), der sie auch für den hyperellip-

tischen Fall beantwortet; u. s. w.). Dieselbe ist aber längst durch eine ganz allgemeine Regel erledigt (s. z. B. Fuchs (26)). welche Prym (15) nach Riemann entwickelt hat, und welche auch in der Constantenbestimmung von Clebsch-Gordan (17) enthalten ist.

Man hat zu diesem Zwecke zunächst nach dem in Nr. 3 mitgeteilten Verfahren, welches sich nur der Hülfsmittel der Algebra und der Analysis situs bedient, die Zuordnung der Wurzelfunctionen (oder Wurzelformen gerader Dimension) zu den Charakteristiken halber Perioden auszuführen, die sich insbesondere im hyperelliptischen Falle unmittelbar abliest. Hierdurch ergeben sich auch zu allen Quotienten $\sqrt{X_i^{(3)}}/\sqrt{X_0^{(3)}}$, wo $\sqrt{X_1^{(3)}}$ alle 2^{2p} in Nr. 10 genannten Systeme der $\sqrt{X^{(3)}}$ in irgend einer Ordnung, $\sqrt{X_0^{(3)}}$ ein beliebig herausgewähltes derselben bezeichnen, die zugehörigen P.-Chn., etwa bezw. [1]; d. h. $\sqrt{X_1^{(3)}}$ hat relativ gegen $\sqrt{X_0^{(3)}}$ die Gruppencharakteristik [1]. Die Regel ist nun: „Man hat dasjenige einzige System $\sqrt{X_{1_0}^{(3)}}$ [d. h. diejenige Ch. 1_0] herauszusuchen, welches die Eigenschaft hat, dass alle Theta-Charakteristiken $(k) = (1 1_0)$ gerade oder ungerade sind, je nachdem $\sqrt{X_1^{(3)}}$ ein System erster oder zweiter Art (s. Nr. 10) ist. Dem System $\sqrt{X_1^{(3)}}$ hat man dann diese Charakteristik $(k) = (1 1_0)$ als (absolute) eigentliche Charakteristik (k) in der gegebenen Zerschneidung zuzulegen [insbesondere also der $\sqrt{X_{1_0}^{(3)}}$ die eigentliche Charakteristik $(0) = \binom{0 \dots 0}{0 \dots 0}$, der $\sqrt{X_0^{(3)}}$ die eigentliche Charakteristik (1_0)]. Auch bei Abänderung der Zerschneidung erhält $\sqrt{X_{1_0}^{(3)}}$ immer eine gerade eigentliche Charakteristik, nämlich die $\binom{n'^0}{m'^0}$ von Nr. 7.

Diese ältere Regel erfordert also nur noch einfache arithmetische Combinationen; sie umfasst alle späteren speciellen Formulirungen, welche teilweise, indem sie die Theta- und Perioden-Charakteristiken nicht auseinander halten, die Regel zu verdunkeln geeignet sind. Die Klein'sche correcte Formulirung s. unten, Nr. 13. Eine Vereinfachung der allgemeinen Regel wird noch bei Gelegenheit der Systeme von Charakteristiken (Nr. 21) mitzuteilen sein.

Directere Zuordnung der Thetafunctionen zu den einfachsten Wurzelformen.

12. Die Zuordnung der Thetafunctionen $\vartheta_\varkappa(v)$ (wegen der Bedeutung des Index s. Nrn. 7, 8, wegen v s. Nr. 7) zu den einfachsten Wurzelformen, $\sqrt{\varphi_\varkappa(x)}$, lässt sich auch durch eine Gleichung ausdrücken; aber in einfacher Weise nur, wenn $(\varkappa)$ ungerade, $= (\alpha)$ ist (für andere $(\varkappa)$ vgl. Nr. 24) und $\vartheta_\varkappa\left(\int_y^x du\right)$ nicht für alle x verschwindet. Es wird

dies durch die Riemann'sche Gleichung (6_1) geleistet:

$$\vartheta_\alpha\left(\int_y^x du\right) = \Omega \cdot c_\alpha \cdot \sqrt{\varphi_\alpha(x) \cdot \varphi_\alpha(y)},$$

wo c_α eine von α abhängige, von x und y unabhängige Constante, Ω ein von α unabhängiger Factor ist.

Der obige Factor Ω ist bei Klein (60), von einem Exponentialfactor abgesehen, als eine „Primform" gekennzeichnet (s. VIII, Nr. 15); mit ihrer Hülfe verwandelt sich die rechte Seite der Formel in eine „Function" von x und y. Da man die Factoren von Ω an den Querschnitten angeben kann, so bestimmt der Quotient derjenigen Factoren, die Ω und $\Omega\sqrt{\varphi_\alpha(x)}$ annimmt, die der Th.-Ch. der Wurzelform $\sqrt{\varphi_\alpha(x)}$. Hiervon rührt die Klein'sche Bezeichnung „Prim-Charakteristik" für Theta- oder eigentliche Charakteristiken her, nämlich als einer nicht für die, sondern mit Hülfe der Primform gewonnenen Charakteristik der Wurzelform.

Man kann auch sagen: wird $\vartheta_\alpha(v)$ nach aufsteigenden Potenzen der $v_1, \ldots, v_p$ entwickelt, so liefert das Glied erster Dimension:

$$\sum_{i=1}^{p}\left[\frac{\partial \vartheta_\alpha(v)}{\partial v_i}\right]_{v=0} \cdot \psi_i(x) = c' \varphi_\alpha(x),$$

wo die $\psi_i(x)$ die p Formen φ sind, welche in den kanonischen Integralen erster Gattung auftreten, und c' eine von x unabhängige Constante ist.

Der Unterschied gegenüber der früheren Methode der Zuordnung besteht hauptsächlich darin, dass hier noch weitere transcendente Mittel aufgewendet werden. Uebrigens lässt sich diese Definition auch noch auf den Fall ausdehnen, wo $\vartheta_\varkappa(v)$ und eine Reihe von Differentialquotienten für die Nullwerte der v verschwinden. Wenn nämlich wieder $dv_1 : dv_2 : \ldots : dv_p = \psi_1 : \psi_2 : \ldots : \psi_p$, und das niedrigste, nicht verschwindende Glied in der Entwicklung der Thetafunction das ϱte $(v_1, \ldots, v_p)_\varrho$ ist, so hat man in

$$\Phi_\varkappa^{(\varrho)} = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p)_\varrho = 0$$

eine Gleichung, aus welcher man nach einer ohne Beweis mitgeteilten Angabe von Klein (70_1) die zugehörige $\infty^{\varrho-1}$-Schar von berührenden $\varphi_\varkappa$ folgendermassen ableitet: Wenn man $\psi_1, \ldots, \psi_p$ als homogene Coordinaten eines Raumes [p—1] von p—1 Dimensionen interpretirt, so stellt $\Phi_\varkappa^{(\varrho)} = 0$ ein Raumgebilde von p—2 Dimensionen vor, welches aber nur $\infty^{\varrho-1}$ lineare Tangentengebilde von (p—2)ter Dimension hat; diese letzteren bilden für die Normalcurve des [p—1] die Schar der berührenden $\varphi_\varkappa$.

C. Der hyperelliptische Fall bei $m = 2$.

Einordnung unter den allgemeinen Fall.

13. Am hyperelliptischen Falle haben Weierstrass und Prym ihre Charakteristikenbetrachtungen entwickelt. Bevor wir uns zur Besprechung der Systeme von Charakteristiken wenden, schalten wir hier ein Capitel ein über die Einordnung des in dieser Hinsicht sehr speciellen hyperelliptischen Falles unter die im vorhergehenden mitgeteilten allgemeinen Auffassungen.

Man legt für den hyperelliptischen Fall von der Geschlechtszahl p eine Gleichung $s^2 = f_{2p+2}(z)$, oder auch eine Curve $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ von der Ordnung $p+2$, mit p-fachem Punkt in $x_2 = x_3 = 0$, zu Grunde. In beiden Fällen sind die Formen φ die p ganzen Functionen $(p-1)$ten Grades in z, bezw. homogen in x_2, x_3. Die Wurzeln von $f_{2p+2}(z) = 0$ seien $q_0, \ldots, q_{2p+1}$; wir setzen $z - q_0 = z_0, \ldots\ z - q_{2p+1} = z_{2p+1}$; dann seien $x_2 - q_j x_3 = z_j = 0$ die vom p-fachen Punkte aus gezogenen Tangenten der Curve. $A_r, B_r, \ldots$ seien ganze Functionen $r$ten Grades in z, bezw. homogen in x_2, x_3. Die aus diesen $\sqrt{z_j}$ resultirenden Wurzelfunctionen führen auf Functionen der Art (wegen der Bezeichnung siehe Nr. 3)

$$\frac{A_s\sqrt{z_0 z_1 \ldots z_{2r-1}}}{A_{r+s}},$$

wo $z_0, z_1, \ldots, z_{2r-1}$ von einander verschieden sind, also (Nr. 10) auf „Wurzelformen gerader Dimension“ $\sqrt{z_0 z_1 \ldots z_{2r-1}}$; und für die Zuordnung zu Per.-Chn. genügt hier die Betrachtung aller Wurzelformen gerader Dimension der Art $\sqrt{z_j z_{2p+1}}$ $(j = 0, \ldots, 2p)$. Für die Form gerader Dimension $\sqrt{z_0 z_1 \ldots z_{2r-1}}$ hat man, nach Nr. 3, $m_\mu = \{{0 \atop 1}$, je nachdem der Weg a_μ um eine gerade oder ungerade Zahl der Punkte $q_0, q_1, \ldots, q_{2r-1}$ einfach herumgeht: $n_\mu = \{{0 \atop 1}$, je nachdem der Weg b_μ um eine gerade oder ungerade Zahl der Punkte $q_0, q_1, \ldots, q_{2r-1}$ einfach herumgeht.

So hat man z. B. bei der sogenannten Weierstrass'schen Zerschneidung, nach welcher

Weg b_μ um $q_{2\mu-1}, q_{2\mu}$; Weg a_μ um $q_0, q_1, \ldots, q_{2\mu-1}$

je einmal gehen, bei $p = 3$, also $\mu = 1, 2, 3$, folgende Tabelle für Wurzelformen gerader Dimension und P.-Chn. $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$. Den Wurzelfunctionen oder Wurzelformen gerader Dimension:

$\sqrt{z_0 z_1}$; $\sqrt{z_1 z_2}$; $\sqrt{z_0 z_1 z_2 z_3}$; $\sqrt{z_3 z_4}$; $\sqrt{z_6 z_7}$; $\sqrt{z_5 z_6}$; $\sqrt{z_1 z_3 z_5 z_7}$; etc.

gehören die Per.-Chn. zu:

$\begin{bmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,0\,0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0\,0\,0 \\ 1\,0\,0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,0\,0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0\,0\,1 \\ 0\,0\,0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 0\,0\,0 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} 1\,1\,1 \\ 1\,0\,1 \end{bmatrix}$; etc.

aus deren sechs ersten Zuordnungen übrigens schon von selbst die anderen folgen, bis auf die Form $\sqrt{z_0 z_1 \ldots z_7}$, der aber, als Wurzelform gerader Dimension, nur die uneigentliche Per.-Ch. $\left[\begin{smallmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{smallmatrix}\right] = 0$ zugeschrieben ist. In der That ist diese Form rational bekannt ($= s$).

Als Wurzelformen ungerader Dimension hat man hier zuerst die $\sqrt{\varphi_k}$, von der Art $\sqrt{z_{\alpha} z_{\alpha} \ldots z_{\alpha_{p-1}}}$, dann irgend welche Producte aus einer ungeraden Anzahl solcher Factoren. Zwei Wurzelformen ungerader Dimension, deren Product $= A\sqrt{z_0 z_1 \ldots z_{2p+1}}$, wo A eine ganze homogene Function von x_2, x_3 ist, haben dieselbe eigentliche (oder Th.-)Ch. Nimmt man $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ von einander verschieden, so erhält man $(2p+2)_{p-1}$ Wurzelfunctionen ungerader Dimension $\sqrt{\varphi_k}$, welche je keiner Schar angehören, d. h. (Nr. 9) ungerade eigentliche Chn. (k) haben. Nimmt man aber nur zwei der α einander gleich, so erhält man in $A_1 \sqrt{z_{\alpha_1} \ldots z_{\alpha_{p-3}}}$, wo A_1 eine beliebige lineare Form von x_2, x_3 ist, eine ∞^1-Schar von Wurzelformen $\sqrt{\varphi_k}$, die also einer geraden eigentlichen Ch. (k) zugeordnet sind, und zwar giebt es $(2p+2)_{p-3}$ solcher Scharen; u.s.w. Ebenso ist ein Product von $p+1$ verschiedenen $\sqrt{z_j}$, weil es sich nicht auf ein Product von $p-1$ Factoren $\sqrt{z_j}$ rational zurückführen lässt, einer geraden eigentlichen Ch. (k) zugeordnet, für welche $\vartheta_k(0)$ nicht verschwindet. Insbesondere sind die $\sqrt{z_j}$ selbst geraden oder ungeraden eigentlichen Chn. zugeordnet, je nachdem p von der Form 4π oder $4\pi+2$. Ist aber p ungerade, so sind alle Wurzelformen ungerader Dimension Producte einer geraden Zahl von $\sqrt{z_j}$, also äusserlich von derselben Gestalt wie die P.-Chn. zugeordneten Wurzelformen gerader Dimension $\sqrt{}$; dies rührt davon her, dass eine von jenen hier von vorneherein ausgezeichnet ist, die Wurzelform ungerader Dimension $\sqrt{z_0 z_1 \ldots z_{2p+1}}$. Die $\sqrt{z_{\alpha_1} z}$, haben hier gerade oder ungerade eigentliche Chn., je nachdem p von der Form $4\pi+1$ oder $4\pi+3$ ist, u. s. w.

Für $p=3$ nimmt man nun irgend eine Wurzelform ungerader Dimension heraus, etwa $\sqrt{X_0} = \sqrt{z_0 z_1 \ldots z_7}$; dann stellen die oben hingeschriebenen Per.-Chn. die relativen Gruppen-Chn. der Wurzelformen ungerader Dimension

$\sqrt{z_0 z_1}$; $\sqrt{z_1 z_2}$; $\sqrt{z_0 z_1 z_2 z_3}$; $\sqrt{z_3 z_4}$; $\sqrt{z_0 z_7}$; $\sqrt{z_5 z_6}$; $\sqrt{z_1 z_3 z_5 z_7}$; etc.

gegenüber $\sqrt{X_0}$ dar (da z. B. $\sqrt{z_0 z_1 \ldots z_7} \cdot \sqrt{z_0 z_1}$ und $\sqrt{z_0 z_1}$ dieselbe eigentliche Ch. haben). Addirt man zu den oben angegebenen Per.-Chn. die eigentliche Ch.: $(l_0) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$, so ordnet sie den Wurzelformen ungerader

Dimension, gebildet aus je zwei verschiedenen der $\sqrt{z_j}$ (d. h. solchen zweiter Art), ungerade, denen gebildet aus je vier verschiedenen der $\sqrt{z_j}$ (d. h. solchen erster Art) aber gerade eigentliche Chn. zu.

Es erhalten nämlich die genannten Wurzelformen ungerader Dimension der Reihe nach die eigentlichen Chn.:

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\ \text{etc.}$$

Die Ch. (I_0), die einzige mit der genannten Eigenschaft, ist also der $\sqrt{X_0} = \sqrt{z_0 z_1 \ldots z_7}$ als eigentliche Charakteristik zuzulegen: dagegen der Wurzelform ungerader Dimension, welche gegen $\sqrt{X_0}$ die relative Gruppench. $\left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\1&0&1\end{smallmatrix}\right)$ hatte, nämlich $\sqrt{z_1 z_3 z_5 z_7}$, oder der rational mit ihr verbundenen $\sqrt{z_0 z_2 z_4 z_6}$, die gerade (in der Zerschneidung ausgezeichnete) eigentliche Ch. $\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$. — Man könnte auch, was dasselbe ist, die Wurzelfunctionen $\sqrt{}$ auf alle möglichen Weisen, von rationalen Factoren abgesehen, in das Product zweier eigentlicher Wurzelformen $\sqrt{}$ zerlegen, und fände nur einen Factor $\sqrt{z_1 z_3 z_5 z_7} = \sqrt{z_0 z_2 z_4 z_6}$ derart, dass der andere Factor erster oder zweiter Art wird, je nachdem die zu $\sqrt{}$ gehörige Per.-Ch., verbunden mit $\left(\begin{smallmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$, eine gerade oder ungerade Th.-Ch. liefert.

Bei $p = 5$ erhielte man auf diese Weise in der Weierstrass'schen Zerschneidung für $\sqrt{z_0 z_2 z_4 z_6 z_8 z_{10}}$ die eigentliche Ch. $\left(\begin{smallmatrix}0&0&\ldots&0\\0&0&\ldots&0\end{smallmatrix}\right)$, für $\sqrt{z_0 z_1 z_2 \ldots z_{11}}$ die eigentliche ungerade Ch. $(I_0) = \left(\begin{smallmatrix}1&1&1&1&1\\1&0&1&0&1\end{smallmatrix}\right)$.

Bei $p = 4$ nehme man als $\sqrt{X_0}$ etwa $\sqrt{z_0}$ heraus. Dann hat man den Per.-Chn.

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \text{etc.}$$

die relativen Chn. gegen $\sqrt{z_0}$ von:

$$\sqrt{z_1};\quad \sqrt{z_0 z_1 z_2};\quad \sqrt{z_1 z_2 z_3},\quad \text{etc.}$$

und findet — da hier die eigentlichen Chn. von einem oder fünfen der $\sqrt{z_i}$ gerade, von dreien ungerade werden sollen — $(I_0) = \left(\begin{smallmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\end{smallmatrix}\right)$ für $\sqrt{z_0}$, und $\left(\begin{smallmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{smallmatrix}\right)$ für $\sqrt{z_0 z_2 z_4 z_6 z_8}$.

Klein (60_1) (s. auch Thompson (78)) fasst diese Bestimmung der eigentlichen Chn. der Wurzelformen ungerader Dimension im hyperelliptischen Falle nur zusammen, wenn er sagt: Auf einem Periodenwege, welcher eine Anzahl von $4r$ (bezw. $4r+2$) Verzweigungspunkten einfach umläuft, giebt man der Wurzelform $\sqrt{\varphi} = \sqrt{\chi}$, wo $f_{2p+2} = \varphi \cdot \chi$ und φ

aus $p+1\pm 2k$ einfachen Factoren besteht, das Element $\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$ der eigentlichen Charakteristik, je nachdem eine $\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}$ $\left(\text{bezw. }\begin{matrix}\text{ungerade}\\ \text{gerade}\end{matrix}\right)$ Anzahl der eingeschlossenen Verzweigungspunkte als Factoren von φ auftreten. — Was in (78) weiter als „geometrische Charakteristik" der Zerschneidung bezeichnet wird, ist die Gruppen-Charakteristik von $\sqrt{z_1 z_3 z_5 \ldots z_{2p+1}}$ bei ungeradem p, und von $\sqrt{z_1 z_3 z_5 \ldots z_{2p+1}} \cdot \sqrt{z_0}$ bei geradem p; im letzteren Falle aber ist $\sqrt{z_0}$ an sich nicht in der Zerschneidung ausgezeichnet, sondern nur durch eine bestimmte Anordnung der $2p$ Querschnittswege, während die Auszeichnung von $\sqrt{z_1 z_3 z_5 \ldots z_{2p+1}}$, oder $\left(\begin{smallmatrix}0\,0\ldots 0\\0\,0\ldots 0\end{smallmatrix}\right)$, von dieser Ordnung unabhängig ist.

Die Zweiteilungsgleichung, allgemein von der Ordnung $\Omega_p^{(2)}$ (s. Nr. 5), reducirt sich im hyperelliptischen Fall auf eine Gleichung $(2p+2)$ten Grades mit nur $(2p+2)!$ Substitutionen.

D. Die Charakteristikensysteme.

14. Nachdem wir in Cap. A. und B. über die Zuordnung der zweimal 2^{2p} „Systeme von reinen Berührungscurven" oder von Wurzelformen zu ebensovielen Charakteristiken — nämlich der Wurzelformen ungerader Dimension zu den 2^{2p} Theta- oder eigentlichen Charakteristiken, der gerader Dimension zu den 2^{2p} Perioden- oder Gruppen-Charakteristiken — berichtet haben, bietet sich nun die Aufgabe, über diejenigen Arbeiten zu referiren, welche die Gruppirung der Charakteristiken zu Systemen von solchen behandeln, d. h. die Combinationen, in welchen die Systeme von Wurzelformen sich selbst wieder zusammenschliessen. Da sich an dieser Systembildung überhaupt die Charakteristikentheorie entwickelt hat, so werden wir hier unseren Bericht historisch fassen können. Wir haben in D. zunächst zu verfolgen, wie Weierstrass die Thetafunctionen mit Indices versehen hat, welche algebraischen Ursprungs sind, nämlich von den in Cap. C. angeführten hyperelliptischen Wurzelformen herstammen, und die einen einfachen Calcul zulassen. In der Thatsache, dass sich diese Wurzelformen und Indices aus $2p$, bezw. $2p+1$, derselben ableiten, hat man schon das einfachste System von Gruppen-Charakteristiken vor sich (Nr. 15). Durch Integration zwischen den Verzweigungspunkten der hyperelliptischen Fläche und durch Anwendung Riemann'scher Sätze gelangt Prym im wesentlichen zu denselben Zusammensetzungen, übrigens schon mit dem Uebergang zu den eigentlichen Charakteristiken (Nr. 16).

Uebersicht über D.

Ein Ueberblick über die überhaupt möglichen Systeme von eigentlichen Charakteristiken mit bestimmten Eigenschaften ist zuerst für $p = 3$ von Weber gegeben worden (Nr. 18), war aber schon von geometrisch-algebraischer Seite her durch die Untersuchungen von Hesse über die Gruppirungen der Berührungscurven einer Grundcurve vierter Ordnung, und insbesondere durch die von Aronhold und Clebsch über 7-Systeme von Doppeltangenten völlig vorbereitet (Nr. 17). Aus geometrischer Quelle, nämlich aus Clebsch's allgemeiner Theorie der Berührungscurven, ist auch die Jordan'sche Bestimmung der Ordnung der Teilungsgruppe und ihrer erzeugenden Substitutionen an der Hand der Charakteristikentheorie geflossen (Nr. 19). Auch die Verwertung dieser Betrachtungen für eine Theorie der Systeme von Charakteristiken bei $p = 4$ ist wiederum nicht ohne den Durchgang durch geometrische Untersuchungen erfolgt (Nr. 20).

Die Systembildungen für ein allgemeines p wurden aus den in Nr. 4 und 8 bezeichneten invarianten Eigenschaften — wobei entweder das von Weierstrass und Prym benutzte („Riemann'sche") Gruppensystem oder das System der $2p$ Gruppen-Charakteristiken, das den $2p$ Perioden an den kanonischen Querschnitten entspricht, den Mittelpunkt bildet — ziemlich gleichzeitig von Stahl, Jordan, Noether abgeleitet (Nr. 21); etwas später von Frobenius, der, wie auch Schottky, seinen anfänglich abweichenden Standpunkt seit 1886 mit jenem vertauscht hat (Nr. 22).

Wir werden das Capitel D. mit einem Blick auf die wenigen anknüpfenden späteren Arbeiten und mit einem Verzeichnis von Abhandlungen, welche zur Orientirung in den mannigfach wechselnden Bezeichnungen dienen können, abschliessen.

Die Weierstrass'schen Indices.

15. Mit der expliciten Einführung der 2^{2p} Thetafunctionen beginnen um die Mitte der 30er Jahre*) die Jacobi'schen Vorlesungen über elliptische Functionen, in welchen für $p = 1$ die 4 Functionen mit Indices, 1 für die ungerade, 0, 2, 3 für die geraden Functionen, geschrieben werden, und zwar $\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ bezw. für $\vartheta_{0 \atop 1}, \vartheta_{1 \atop 1}, \vartheta_{1 \atop 0}, \vartheta_{0 \atop 0}$ (von constanten Factoren abgesehen) (Werke I, p. 499; publ. 1881). Zu Anfang der 40er Jahre schreibt Ch. Gudermann (J. f. M. Bde. 18—25) dieselben ohne Indices, unter der Bezeichnung „Hülfsfunctionen Al(u), Bl(u), Gl(u), Hl(u)". Die 16 Thetafunctionen für $p = 2$ erscheinen bei Göpel (2) unter 4 Buchstaben mit Accenten; bei Rosenhain (2) unter doppelter Indicesbezeichnung $\varphi_{ki}(v, w)$. Die letzteren entstehen nämlich aus den elliptischen $\vartheta_k(v)$ Jacobi's durch nochmalige Summirung, sodass sich der

*) Nach Kronecker, J. f. M. 108.

erste Index auf v, der zweite auf w bezieht: sobald einer der Indices $= 1$ ist, wird $\varphi_{ki}(v, w)$ ungerade. Die 2^{2p} Functionen für beliebige p führt Weierstrass im Programm von 1849 (3), offenbar im Anschluss an Gudermann, als „Hülfsfunctionen" ein, aber schon mit einer Indicesbezeichnung, welche mit dem Verhalten eines ausgezeichneten $\vartheta_{2p+1}(u_1, \ldots, u_p)$ gegenüber den halben Perioden zusammenhängt, die also zu einem Indexcalcul führen musste. In der That bezeichnet Weierstrass im J. f. M. 47 (1853) die Thetafunctionen mit $Al(u)_\alpha$ und $Al(u)_{\alpha\beta}$, wo der Index $\alpha\beta$ durch Addition der entsprechenden Charakteristikenelemente der Indices α und β entsteht, also eine „Summe" zweier Indices darstellt.

Die Weierstrass'schen Indices der hyperelliptischen Thetafunctionen sind aus den in C. besprochenen algebraischen Beziehungen, an welche auch wir hier anknüpfen wollen, hergenommen.

Direct treten bei Weierstrass selbst nur die Zuordnungen von Wurzelfunctionen, oder Formen $\sqrt{\ }$ zu Indices, also zu ϑ-Quotienten auf. Den Wurzelformen gerader Dimension $\sqrt{z_j z_{2p+1}}$ $(j = 0, 1, \ldots, 2p)$ erteilt nämlich Weierstrass, an die Gruppen-Indices $[j, 2p+1]$ anschliessend, unter Auszeichnung von z_{2p+1} (dessen Verzweigungspunkt im Unendlichen angenommen wird), den Index j. So z. B. hat, bei der in C. erwähnten Zerschneidung der Fläche für $p = 2$, $\sqrt{z_0} \cdot \sqrt{z_5} = \sqrt{z_0 z_5}$ die Gruppen-Charakteristik $[05] = \left[\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right]$, und $\vartheta_{\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}}$ erhält (indem man die eigentliche Charakteristik $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ addirt denkt) bei Weierstrass die Bezeichnung ϑ_0, während jene Wurzelfunction $\sqrt{z_0 z_5}$ dem Weierstrass'schen Quotienten $\vartheta_0 : \vartheta_5$ zugeordnet ist.

Was die Wurzelformen ungerader Dimension $\sqrt{\ }$ betrifft, so wurde in C., bei bestimmter Zerschneidung der Fläche, einer Wurzelform, etwa $W = \sqrt{z_{\alpha_1} z_{\alpha_2} \ldots z_{\alpha_{p+1+2\nu}}}$, eine eigentliche Charakteristik (k) und damit eine Thetafunction $\vartheta_k(v)$ zugeordnet. An Stelle der Theta-Charakteristik (k) könnte man nun dieser Function den Index der algebraischen Form: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1+2\nu})$ als „eigentlichen Index" zuschreiben, wie es auch seit Weber (34_2) etc. allgemein zu geschehen pflegt. Die Weierstrass'schen Indices aber erhält man, wenn man der $\vartheta_k(v)$ von der Charakteristik (k), welche W entspricht, den relativen Gruppenindex von W gegenüber $\sqrt{z_1 z_3 z_5 \ldots z_{2p+1}}$, nämlich $1, 3, 5, \ldots 2p+1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1+2\nu}$ zuschreibt: dabei ist die Zusammensetzung die, dass diese Indices durch Vertauschung der sie componirenden Zahlen nicht verändert werden, und dass zwei gleiche Zahlen sich aufheben. Weiter aber lässt Weierstrass alsdann

das Zeichen $2p+1$, wo es vorkommt, weg und fügt es dem ϑ ohne Index bei, welch letzteres bei Königsberger (10) ohne Index bleibt.

Für $p=2$ hat man so die folgende Tabelle:

Wurzelformen ungerader Dimension	Eigentliche Indices	Th.-Chn. in Weierstrass'scher Zerschneidg. (Nr. 13)	Relative Indices gegen $\sqrt{z_0z_2z_4}=\sqrt{z_1z_3z_5}$	Weierstrass'sche Indices	Rosenhain'sche Indices
$\sqrt{z_0}$	0	$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	24	24	21
$\sqrt{z_1}$	1	$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	35	3	31
$\sqrt{z_2}$	2	$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$	04	04	01
$\sqrt{z_3}$	3	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)$	15	1	10
$\sqrt{z_4}$	4	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$	02	02	13
$\sqrt{z_5}$	5	$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$	13	13	12
$\sqrt{z_0z_1z_2}=\sqrt{z_3z_4z_5}$	012=345	$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$	14	14	11
$\sqrt{z_0z_1z_3}=\sqrt{z_2z_4z_5}$	013=245	$\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)$	05	0	00
$\sqrt{z_0z_1z_4}=\sqrt{z_2z_3z_5}$	014=235	$\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$	12	12	03
$\sqrt{z_0z_1z_5}=\sqrt{z_2z_3z_4}$	015=234	$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$	03	03	02
$\sqrt{z_0z_2z_3}=\sqrt{z_1z_4z_5}$	023=145	$\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	34	34	30
$\sqrt{z_0z_2z_4}=\sqrt{z_1z_3z_5}$	024=135	$\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$	—	5	33
$\sqrt{z_0z_2z_5}=\sqrt{z_1z_3z_4}$	025=134	$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$	45	4	32
$\sqrt{z_0z_3z_4}=\sqrt{z_1z_2z_5}$	034=125	$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$	23	23	22
$\sqrt{z_0z_3z_5}=\sqrt{z_1z_2z_4}$	035=124	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$	01	01	23
$\sqrt{z_0z_4z_5}=\sqrt{z_1z_2z_3}$	045=123	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	25	2	20

Die Rechnung mit den Weierstrass'schen Indices findet genau so statt, wie mit den eigentlichen Indices: die „Summe" von je $2r+1$ solchen giebt wieder einen Thetaindex. Die Regel kann bei Weierstrass, aber nur scheinbar, in der Weise durchbrochen werden, dass einer der Summanden aus $\left(\begin{smallmatrix}0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\end{smallmatrix}\right)$, also aus dem wegzulassenden Index $2p+1$ besteht. Bei Rosenhain wird einfach jede der zwei Indicesreihen für sich addirt, wobei zu beachten ist, dass die Summe der vier elliptischen Indices verschwindet; daraus folgt auch, dass vier Rosenhain'sche Indices i0, i1, i2, i3, oder 0k, 1k, 2k, 3k, ein „azygetisches", 00, 11, 22, 33 ein „syzygetisches" (oder „Göpel'sches") Quadrupel bilden (s. Schluss von Nr. 8). [Der Uebergang von Weierstrass zu Rosenhain eingehender bei Pringsheim (29), Weber (34_2).]

Aus den genannten $2p+1$ einfachsten Wurzelfunctionen $\sqrt{z_j z_{2p+1}}$ ergeben sich durch Combination alle Wurzelfunctionen; und ebenso werden

bei Weierstrass alle Indices von Thetafunctionen, ausgenommen den ausgezeichneten Index $2p+1$, durch Combination der Indices $0, 1, \ldots, 2p$ in 1ter, 2ter, ..., pter Ordnung erhalten.

So hat Weierstrass nicht nur die Indicesrechnung eingeführt, sondern auch das erste Charakteristikensystem, aus dem sich alle Charakteristiken ableiten lassen: ein System aus $2p+1$ Gruppen-Charakteristiken, deren Summe identisch 0 ist, verbunden mit der ausgezeichneten Th.-Ch. $\binom{0\,0\,\ldots\,0}{0\,0\,\ldots\,0}$ von ϑ_{2p+1}.

Die Unterscheidung des Charakters der Thetafunctionen geschieht durch die zu $\binom{1\,1\,\ldots\,1}{0\,0\,\ldots\,0}$ gehörige Function $\sqrt{z_1 z_3 z_5 \ldots z_{2p-1}}$; und die Regel stimmt mit der von Prym angegebenen, s. unten Nr. 16, überein. Insbesondere verschwinden im hyperelliptischen Falle und bei der Weierstrass'schen Anordnung nur diejenigen $\vartheta_a(0)$ nicht, deren (a) in eine der Formen $(1, 3, 5, \ldots, 2p-1, \alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ oder $(1, 3, 5, \ldots, 2p-1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1})$ gesetzt werden kann, wo die α verschiedene Zahlen aus der Reihe $0, 1, \ldots, 2p$ sind (s. Königsberger (10); Pringsheim (32) besonders für $p=4$).

16. Indem Prym (15) die Riemann'sche Zuordnung von Thetafunctionen zu Formen $\sqrt{\varphi}$ (s. Nr. 6 und 12) auf den hyperelliptischen Fall anwendet und den einfachsten Wurzelfunctionen $\sqrt{z_j z_{2p+1}}$ durch Integration zwischen den Verzweigungspunkten von z_j und z_{2p+1} in jeder Zerschneidung bestimmte Gruppen- oder Perioden-Charakteristiken beilegt, unterscheidet er zum ersten Mal explicit die Perioden- von den Theta-Charakteristiken [er bezeichnet jene als $(\varkappa)$, diese als $[\varkappa]$, also in umgekehrtem Sinne, wie es in diesem Referate (s. Nr. 7, 8) geschieht]. Genau wie Weierstrass bildet er, den Functionen $\sqrt{z_j z_{2p+1}}$ $(j=0, \ldots, 2p)$ entsprechend, ein System von $2p+1$ Gruppen-Charakteristiken $[a]_0, \ldots, [a]_{2p}$, deren Summe identisch 0 ist, mit denselben Rechenregeln; aus ihnen lassen sich durch Combination der Indices alle $2^{2p}-1$ Gruppen-Charakteristiken bilden, da irgend $2p$ jener Basis „linear-unabhängig“ sind (d. h. da nicht irgend eine Summe von verschiedenen der $2p$ identisch 0 ist). Die ausgezeichnete uneigentliche Gruppe erhält als solche keine Charakteristik.

Die Prym'schen Charakteristikensysteme.

Prym knüpft zwar an eine bestimmte Zerschneidung der Riemann'schen Fläche im hyperelliptischen Falle an; aber die Resultate sind hiervon insofern unabhängig, als die Zerschneidung mannigfach modificirbar ist, also verschiedene Systeme von $2p+1$ Charakteristiken erhalten werden können.

Um zu den eigentlichen, den Theta-Charakteristiken zu gelangen, weist Prym aus den Sätzen über das Verschwinden der Thetafunction die ihm von Riemann mitgeteilte Existenz einer eigentlichen Charakteristik (l_0) nach, von der Art, dass $(l_0 + a_{\alpha_1} + a_{\alpha_2} + \cdots + a_{\alpha_j})$ oder $(l_0 + \sum^j a)$

gerade, wenn $j \equiv p$ oder $\equiv$ der Ergänzung von p zur Gesamtzahl $2p+1$, also $p+1$, (mod. 4)
ungerade, wenn $j \equiv p-1$ oder $\equiv p+2$

ist. Die Wurzelform ungerader Dimension, der man dann die eigentliche Charakteristik (l_0) zuzuschreiben hat, ist diejenige, welche man in den unteren Grenzen der Integrale willkürlich bevorzugt hat: also für ein ungerades p etwa $\sqrt{z_0 z_1 z_2 \ldots z_{2p+1}}$, für ein gerades p etwa

$$\sqrt{z_0 z_1 \ldots z_{2p+1}} \cdot \sqrt{z_{2p+1}} \,.$$

Dieser Uebergang ist also genau der in Nr. 11 und 13 bezeichnete.

Ferner wird aus denselben Sätzen nachgewiesen, dass im hyperelliptischen Falle $\vartheta_k(v)$ und die sämtlichen ersten bis $(m-1)$ten Differentialquotienten incl. für $v_1 = \cdots = v_p = 0$ verschwinden, wenn (k) von der Form $(l_0 + \sum^{p-2m-1} a)$ oder $(l_0 + \sum^{p-2m-2} a)$ ist, und dass die zugehörigen $\sqrt{\varphi_k}$ dann eine ∞^m-Schar bilden.

Das Gesetz, nach welchem (l_0) aufzufinden ist, lautet bei Prym so: man teile die $[a_j]$ $(j = 0, \ldots, 2p)$ in gerade, $[a']$, und ungerade Chn., $[a'']$, ein, so ist $(l_0) = \sum[a'] = \sum[a'']$. Bei consequenter Einführung des Unterschieds von Perioden- und Theta-Charakteristiken müsste man die Regel so aussprechen: Seien $[a']$, bezw. $[a'']$, diejenigen der Gruppen $[a_j]$, für welche $[a_j'] + (0)$ gerade, bezw. ungerade, ist, so ist

$$(l_0) = \sum[a'] + (0) = \sum[a''] + (0).$$

Die Auszeichnung der eigentlichen Charakteristik $(0) = \binom{0\,0 \ldots 0}{0\,0 \ldots 0}$ und der aus $\sum[a']$ abzulesenden Wurzelform in der Zerschneidung tritt auf diese Weise klarer zu Tage.

Unter den expliciten Ausdrücken von Wurzelfunctionen durch Thetaquotienten, welche die Zuordnungen deutlich zeigen, sind insbesondere diejenigen hervorzuheben, in welchen die Argumente Summen oder Differenzen von zwei Integralen sind. Bei denjenigen von der Form in Nr. 12, in welchen die eine Variable y in einen Verzweigungspunkt rückt (und von dieser Art sind auch Weierstrass'sche), verwischt sich die Zuordnung etwas durch die Vermehrung der Indices α um eine und dieselbe Gruppencharakteristik. Dass aber bei Weierstrass sowohl wie bei Prym der ausgezeichnete Verzweigungspunkt ins Unend-

liche verlegt wird, macht die Zuordnung nicht specieller, sondern beeinträchtigt nur die Symmetrie der Formeln.

Geometrisch-algebraische Einflüsse. Die Aronhold'schen 7-Systeme von Doppeltangenten der ebenen Curve vierter Ordnung.

17. Wenngleich auch Prym schon eine Reihe von Systemen von je $2p+1$ Gruppen-Charakteristiken als gleichberechtigt zulässt, so hat er doch noch keine Substitutionstheorie im Galois'schen Sinne, also nicht die invarianten Eigenschaften der Systeme bei den Abel'schen Substitutionen im Auge. Zu einer solchen Theorie eignete sich auch der hyperelliptische Fall mit seinen vielen Besonderheiten nicht als Ausgangspunkt, indem an ihm nicht zu erkennen war, was durch den Fall an sich, was durch die Zerschneidung ausgezeichnet ist. Es bedurfte der Untersuchung allgemeiner Fälle, der Wurzelfunctionen bei $p=3$ nach Riemann (6_1), wie sie Roch in (8_1) gab, des Roch'schen Satzes über die Anzahl der Parameter der Wurzelfunctionen, die zu einer Charakteristik gehören (Roch (8)), der Theorie der Berührungscurven (Wurzelformen) von Clebsch (9) — Ergebnisse, über die alle wir bereits eingehend berichtet haben (V, B u. C) —, bis Clebsch-Gordan die Zuordnung der Wurzelformen ungerader Dimension zu Thetafunctionen bei jeder Zerschneidung, also die Bedeutung des (1_0) von Nr. 16, explicit darlegen konnten, was denn freilich ohne Charakteristiken-Theorie geschehen ist. Auf dieser Grundlage konnten dann die geometrischen Resultate über Berührungscurven, die schon vorlagen, wie die Untersuchungen über Berührungscurven an die allgemeine ebene Curve vierter Ordnung von Hesse (4) (worüber früher V. A. c berichtet wurde) und von Aronhold (11) (worüber jetzt zu berichten sein wird), für die Theorie der Systeme von Charakteristiken verwertet werden. In der That: Wenn Hesse die 28 Doppeltangenten der C_4, unter Auszeichnung eines Systems X^3 von Berührungscurven dritter Ordnung erster Art (Ref. V, Nr. 19, IX, Nr. 10), auf die Combinationen (ik) von 8 Zahlen 0, 1, ..., 7 bezieht, und namentlich wenn er von da mittelst Substitutionen der Art {iklm; i'k'l'm'} den Uebergang zu allen übrigen 35 Systemen von berührenden X^3 erster Art macht, so liegen darin alle Elemente, die zu einer Bildung von Systemen von eigentlichen Indices, und damit von Theta-Charakteristiken, und zu einer Substitutionstheorie derselben erforderlich waren. Auch stimmen im hyperelliptischen Falle $p=3$ die eigentlichen Indices der aus den 8 Verzweigungspunkten zu bildenden einfachsten Wurzelformen $\sqrt{z_i z_k}$ genau mit den Indices der 28 Doppeltangenten überein, ihre zugehörigen Charakteristiken waren aber bekannt. Wir verfolgen nun diese Entwicklung, die für $p=3$ und 4 zuerst einen geometrisch-algebraischen Charakter angenommen hat.

Aronhold legt der Erzeugung der allgemeinen ebenen Curve vierter

Ordnung f_4 ($p = 3$) 7 beliebige Gerade der Ebene zu Grunde, welche solche Doppeltangenten einer f_4 sein sollen, dass niemals die Berührungspunkte von dreien unter ihnen auf einem Kegelschnitte liegen [je 3 bilden eine „$X^{(3)}$ erster Art" oder sind „azygetisch", s. Nr. 10 u. Nr. 8 a. E.]. Sieben Gerade bestimmen auf diese Weise eine f_4 und deren weitere Doppeltangenten eindeutig; und zwar lässt sich die Aronhold'sche Construction so formuliren:

Die 7 Linien $a_1, \ldots, a_7$ werden von einer Schar Σ von ∞^2 Curven dritter Klasse, K_3, berührt, die paarweise noch je 2 weitere Tangenten gemein haben; hierdurch ist die Ebene in Linienpaare aufgelöst. Durch jeden Punkt P geht eines der Linienpaare, g_1, g_2, wie Aronhold implicit, Clebsch (25) explicit nachweist [nicht erst Godt (28), wie aus (59) geschlossen werden könnte]. Man hat so eine 1-2-deutige Beziehung zwischen den Linienpaaren der Ebene H und den Punkten derselben Ebene E als Punktebene; den Geraden von E durch P entsprechen in H die K_3, welche g_1, g_2 berühren. Die Jacobi'sche Curve des Netzes der K_3 ist eine Curve sechster Klasse J_6 mit $a_1, \ldots, a_7$ als Doppeltangenten, also mit $p = 3$; und diesem Ort von H entspricht in E eindeutig der Ort der Punkte P^0, von welchem je 2 benachbarte gepaarte Gerade ausgehen: eine Curve vierter Ordnung f_4, $p = 3$. Der Gesamtheit der Punkte Π von H entspricht dabei eine quadratische ∞^2-Schar S_0 von Curven dritter Ordnung C_3, welche f_4 je in 6 Punkten berühren. Man kann die S_0 auffassen als ausgeschieden aus der quadratischen ∞^3-Schar S eines Hesse'schen Systems $X^{(3)}$ erster Art (s. V, Nr. 19) durch die Bedingung, noch je einen [in der Doppelebene E nur scheinbaren] Doppelpunkt zu besitzen. In dieser Schar S sind 8 getrennte solcher ∞^2-Unterscharen S_i enthalten, und eine ist hier als S_0 benutzt (s. Clebsch l. c.). — Während nun im allgemeinen zu einer Geraden von H ein Punkt von E gehört, entsprechen den Geraden $a_1, \ldots, a_7$ je unendlich viele Punkte, nämlich bezw. $a_1, \ldots, a_7$, als Doppeltangenten von f_4; den 21 Schnittpunkten $(a_i a_k)$ in H diejenigen C_3 (aus S_0) in E, welche bezw. in die Linienpaare a_i, a_k und je eine weitere Doppeltangente zerfallen, so dass diese 21 weiteren Doppeltangenten mit a_{ik} bezeichnet werden können. Die Construction einer solchen a_{ik} ergiebt sich dabei auch aus dem folgenden Verhalten: die 5 von a_i und a_k verschiedenen unter den Linien $a_1, \ldots, a_7$ berühren mit a_{ik} einen Kegelschnitt; also geht die Verbindungslinie der Punkte $(a_i a_k)$ und $(a_l a_m)$ auch durch den Punkt $(a_{ik} a_{lm})$.

Diese Clebsch'sche Form der Aronhold'schen Theorie stellt alle

Mittel bereit, um die auf f_4 bezüglichen Relationen zwischen Wurzelformen zu finden. — Denn die Berührungscurven an f_4 gehen in der Ebene E in diejenigen linearen adjungirten Curvensysteme über, welche die J_6, dualistisch als Curve sechster Ordnung $p = 3$ aufgefasst, einfach schneiden. Die Moduln von f_4 sind, von linearen Transformationen abgesehen, die Coordinaten der 7 gegebenen Linien $a_1, \ldots, a_7$. Schon Cayley (20) hatte erkannt, dass dieses 7-System von Doppeltangenten von f_4 von der Art ist, wie es sich auch aus den Hesse'schen Combinationen (ik) von 0, 1, ..., 7, etwa in (01), (02), ..., (07), ergiebt; ferner dass man durch Vertauschung der Zahlen 0, 1, ..., 7 acht verschiedene 7-Systeme S_i erhält, welche alle auf die Auszeichnung derselben Hesse'schen Schar $X^{(3)}$ erster Art führen, und dass es, da 36 Scharen $X^{(3)}$ existiren, 8.36 Aronhold'sche 7-Systeme giebt, welche sich 36-mal zu je 8 zusammenreihen; und Clebsch (25) hat dasselbe durch den Uebergang von der Hesse'schen Construction zur Aronhold'schen erschlossen.

18. Die in Nr. 12 angeführte Gleichung, welche die Zuordnung der Doppeltangenten der ebenen C_4 zu den 28 ungeraden dreireihigen Theta-Charakteristiken bei vorgelegter Zerschneidung giebt, hätte aus den in Nr. 17 angeführten geometrisch-algebraischen Arbeiten unmittelbar die Gruppirung dieser Theta-Charakteristiken in 8.36 azygetische Systeme zu je 7 erkennen lassen; wie auch die früheren Arbeiten von Steiner und Hesse (4) die Zerlegung jeder Gruppencharakteristik in sechs Paare von ungeraden Theta-Charakteristiken erweisen konnten. Indessen löste Weber (30) die umgekehrte Aufgabe: aus den combinatorischen Eigenschaften der dreireihigen Theta-Charakteristiken, unter Annahme der arithmetischen Rechenoperationen und des Begriffes des Geraden und Ungeraden der Charakteristiken, alle Systeme von Charakteristiken aufzubauen, und, durch Zuordnung einer Basis von Charakteristiken zu einer solchen von Wurzelformen $\sqrt{\varphi_i}$, allen 28 Wurzelformen $\sqrt{\varphi}$, ohne eine bestimmte Zerschneidung der Riemann'schen Flächen vorzunehmen, Charakteristiken zuzulegen.

Die Weber'schen 7-Systeme von ungeraden Charakteristiken bei p=3.

Weber definirt sein 7-System von ungeraden Theta-Charakteristiken

$$(\beta_1), \quad (\beta_2), \quad \ldots, \quad (\beta_7)$$

direct dadurch, dass ihre Summe (p) und die Summen von je drei verschiedenen $(\beta_i \beta_k \beta_l)$ gerade sein sollen; oder auch daraus, dass die Summen $(p \beta_i \beta_k)$ ungerade sein sollen. Die übrigen sieben zu (p) gehörigen Systeme werden dann von der Form sein:

$$(\beta_1), \quad (p\beta_1\beta_2), \quad \ldots, \quad (p\beta_1\beta_7);$$

eines von der Summe $(\beta_1 \beta_2 \beta_3)$ von der Form:

$$(p\beta_2\beta_3),\quad (p\beta_3\beta_1),\quad (p\beta_1\beta_2),\quad (\beta_4),\quad \ldots,\quad (\beta_7).$$

Irgend eines dieser 7-Systeme, als Basis genommen, wird nun in beliebiger Reihenfolge einem der Aronhold'schen 7-Systeme $a_1, \ldots, a_7$ von Doppeltangenten zugeordnet, etwa die (β_i) den a_i; und da aus beiden Basen die 21 übrigen Glieder je eindeutig bestimmt sind, so hat man auch eine eindeutige Zuordnung der 21 Charakteristiken $(p\beta_i\beta_k)$ zu den Doppeltangenten a_{ik}. Dies wird bei Weber algebraisch vollständig durchgeführt, unter Entwicklung der linearen Relationen zwischen den Wurzelformen $\sqrt{\varphi_i\varphi_k}$; und zwar alles in mehr symmetrischer Form als bei Riemann (6_1), wo dasselbe Ziel ohne Benutzung der 7-Systeme, also nur unter Lösung einer höheren Gleichung (4ten Grades), verfolgt wird.

Für den Zusammenhang mit den Hesse'schen Indices ist zu bemerken, dass man nur $(\beta_1) = (01), \ldots, (\beta_7) = (07)$, $p = (012\ldots7)$ zu setzen braucht, wo $[012\ldots7] \equiv 0$ gesetzt ist, um $(p\beta_i\beta_k) = (ik)$ zu erhalten.

Ein „Riemann'sches System" von sieben Gruppencharakteristiken von der Summe 0, analog den im hyperelliptischen Falle von Weierstrass und Prym angegebenen (s. Nr. 16 Anfang), erhält man aus dem ersten Weber'schen in

$$[p\beta_1],\quad [p\beta_2],\quad \ldots,\quad [p\beta_7];$$

und das (l_0) dieses Systems (s. Nr. 16) ist $(l_0) = (p)$. Indessen ist der Satz, aus dem diese Eigenschaft des Riemann'schen Systems folgt, erst von Stahl (47) gegeben worden.

Weber stellt so zum ersten Mal eine Theorie der Charakteristiken-Systeme auf. Während er aber wohl darauf hinweist, dass derselbe Zahlencomplex, der „Charakteristik" genannt wird, bald als Theta-Charakteristik, bald als Perioden-Charakteristik auftritt, macht er in (30) auf das verschiedene Verhalten dieser beiden Formen gegenüber linearen Periodentransformationen noch nicht aufmerksam. Auch wird für die Summe zweier Charakteristiken und ihre Zerlegung in sechs Paare ungerader Charakteristiken zwar zusammenfassend das Riemann'sche Wort „Gruppencharakteristik" eingeführt, aber die letztere in der Schreibart nicht von den Theta-Charakteristiken unterschieden, vielmehr ebenfalls mit dem Charakter des Geraden oder Ungeraden belegt. Ueberdies wird die Galois'sche Substitutionstheorie noch nicht herangezogen, vielmehr die Umsetzung der Vertauschungen der Charakteristiken-Systeme in lineare Perioden-Transformationen, und umgekehrt, von ihm für $p = 3$ erst in (37) entwickelt.

Dagegen giebt für den Fall $p=3$ Weber in (30) eine Anwendung der Charakteristiken-Theorie auf die Theorie der „Wurzelfunctionen" zweiten Grades — auch diese Bezeichnung rührt von ihm her —, in eingehenderer Behandlung, als es vorher irgend geschehen war; er giebt ferner Anwendungen auf die Theorie der Wurzelfunctionen vierten Grades $\sqrt[4]{X}$ [3]) und auf das Umkehrproblem für $p=3$.

C. Jordan's Steiner'sche Gruppe und ihre Erzeugenden.

19. Die Begriffe der Galois'schen Theorie hat schon C. Jordan (24) eingeführt. Jordan geht von zwei verschiedenen Gesichtspunkten aus: einmal von dem Hermite'schen, indem er (§ 217 ff.) die Gruppe H der linearen Substitutionen aufstellt, welche, angewandt je auf die $2p$ Zahlen zweier Perioden-Charakteristiken $\left|\begin{matrix} n_1 \dots n_p \\ m_1 \dots m_p \end{matrix}\right|$ und $\left|\begin{matrix} n'_1 \dots n'_p \\ m'_1 \dots m'_p \end{matrix}\right|$, den Ausdruck $K = \Sigma_\nu (m_\nu n'_\nu - n_\nu m'_\nu)$ unverändert lassen (s. Nr. 1 u. 5). Hierbei giebt Jordan eine zweite Definition der in Nr. 4 erwähnten „Abel'schen Gruppe" (§ 230 ff.), welche mit der Auszeichnung von $2p$ kanonischen Perioden-Charakteristiken zusammenhängt, einem System, von dem wir später, in Nr. 21, berichten werden. Wir erwähnen hier nur, dass die Untergruppe $\mathfrak{H}_0$ (§ 262), welche von Jordan als erste hypo-abelsche Gruppe bezeichnet wird, auch als diejenige definirt werden könnte, welche aus H durch Auszeichnung einer geraden eigentlichen Charakteristik entsteht.

Sodann stellt sich Jordan auf den Standpunkt der reinen Zweiteilung, also der Wurzelformen, indem er, gestützt auf Clebsch (9), die Substitutionsgruppe für die reinen Berührungscurven untersucht, der er den Namen der „Steiner'schen Gruppe" [nicht zu verwechseln mit der Steiner'schen „Gruppe" [z], welche in Nr. 1, 2) erwähnt ist] beilegt (§ 318 ff., auch § 454 ff.). Ausgehend nämlich von den $2^{p-1}(2^p-1)$ ungeraden Theta-Charakteristiken $\binom{n}{m}$, bildet Jordan symmetrische Functionen φ_μ von solchen μ derselben, deren Summe $\equiv 0 \pmod{2}$, und stellt die Frage:

1) nach der Gruppe G derjenigen Substitutionen, welche die Functionen $\varphi_4, \varphi_6, \varphi_8, \dots$ alle unverändert lassen;

2) nach der Untergruppe G_1 von G, welche alle Functionen $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \dots$ unverändert lässt.

Offenbar ist G_1 — was Jordan nicht anmerkt — diejenige Untergruppe von G, welche die gerade Theta-Charakteristik $\binom{0 \dots 0}{0 \dots 0}$, also ein Berührungscurvensystem erster Art, nicht ändert.

Wichtig ist hierbei sein neues Verfahren, die ganze reine Zweiteilungs-

gruppe aus einfachen Substitutionen $\left\{{\beta \atop \alpha}\right\} \equiv \left\{{\beta_1 \ldots \beta_p \atop \alpha_1 \ldots \alpha_p}\right\}$ zusammenzusetzen. Eine solche einfache Substitution $\left\{{\beta \atop \alpha}\right\}$ ersetzt eine ungerade Th.-Ch. $\binom{n}{m}$ durch $\binom{n+\beta}{m+\alpha}$, oder lässt $\binom{n}{m}$ unverändert, je nachdem $\binom{n+\beta}{m+\alpha}$ ungerade oder gerade ist: verwandelt also eine Gruppen-Ch. $\left[{n \atop m}\right]$ in $\left[{n+\beta \atop m+\alpha}\right]$ oder $\left[{n \atop m}\right]$, je nachdem $\left[{n \atop m}\right]$ und $\left[{\beta \atop \alpha}\right]$ azygetisch oder syzygetisch [d. h. $K \equiv 1$ oder 0, mod. 2, s. Nr. 4] sind. — Hieraus zieht Jordan schon alle Schlüsse über die Zahl und Art der Zerlegungen von Chn. in mehrere und über den Aufbau der Gruppe G. Er findet, dass G der auf Gruppen-Chn. bezüglichen Abel'schen Gruppe H mit Modul 2 holoëdrisch isomorph ist. Aus der einfachen Art, in welcher die genannten Erzeugenden $\left\{{\beta \atop \alpha}\right\}$ von G die Vertauschungen bewirken, ergiebt sich ein bequemes Mittel, um von irgend welchen Chn.-Systemen zu allen übrigen, welche durch lineare Perioden-Transformation daraus entstehen können, zu gelangen. So ist G für die eigentlichen ungeraden Chn. zweifach transitiv, H für die Gruppen-Chn. einfach transitiv, u. s. w. — Die Gruppe G_1, welcher Jordan eine analoge directe Untersuchung widmet, lässt sich, weil sie isomorph zu $\mathfrak{H}_0$ ist, einfacher aus G durch Auszeichnung von $\binom{00\ldots0}{00\ldots0}$ ableiten.

Auch für die Gesamtheit der geraden eigentlichen Chn. deutet Jordan, § 347, Aehnliches an. Er nimmt alle geraden Chn., ausser $(0) = \binom{00\ldots0}{00\ldots0}$, bildet daraus die symmetrische Function ψ_μ zu je μ von der Summe $= 0$, sucht

1) die Gruppe g der Substitutionen, welche $\psi_4, \psi_6, \ldots$ unverändert lassen,
2) „ „ g_1 „ „ „ $\psi_2, \psi_3, \psi_4, \ldots$ „ „ ;

und erwähnt, dass auch g der Gruppe H, g_1 der Gruppe $\mathfrak{H}_0$ holoëdrisch isomorph sei. Beides ist aber nur richtig, wenn man in die geraden Chn. auch (0) als gleichberechtigt einschliesst.

Für die Verwendung dieser Theorie s. Nr. 21.

Geometrisch-algebraischer Uebergang zu $p=4$.

20. Die Weber'schen Systeme für $p = 3$ sind auf den Fall $p = 4$ von Noether (38) durch einen geometrisch-algebraischen Gedankengang ausgedehnt worden, der an die in Nr. 17 besprochenen Aronhold'schen Constructionen für $p = 3$ anschliesst. Die Untersuchung bezieht sich auf denjenigen speciellen Fall $p = 4$, in welchem ein ∞^1-System von berührenden $\sqrt{\varphi_\alpha}$ existirt, wo also (Nr. 9) ein $\vartheta_\alpha(0)$ mit gerader Ch. (α) verschwindet. Die Note (38) deutet den geometrischen Gang nur soweit an, dass sich die Grundlage für die Gruppirungsverhältnisse und für die Relationen zwischen den Berührungscurven

der speciellen $f_6(p = 4)$ erkennen lässt: die daraus für die Chn.-Theorie fliessenden Resultate sind in (38_1) mitgeteilt. Wir geben eine Uebersicht über den eingeschlagenen Weg, auch weil auf diese Weise eine Einsicht in die Schottky'schen Resultate (63_1) gewonnen wird, welche sich auf denselben speciellen Fall $p = 4$ beziehen und denselben Ausgangspunkt haben.

Zu gegebenen acht Punkten 1, 2, ..., 8 einer Ebene E' wird die ∞^3-Schar S' von Curven $C_6(1^2, 2^2, \ldots, 8^2)$ [d. h. von Curven sechster Ordnung, welche 1, ..., 8 je zu zweifachen Punkten haben] betrachtet:

$$\alpha_0 C'_6 + \alpha_1 C_3^2 + \alpha_2 C_3 C'_3 + \alpha_3 C'^2_3 = 0,$$

wo die C_3, C'_3 durch 1, ..., 8 gehen, und C'_6 aus der Schar S' genommen ist. Da sich irgend zwei Curven aus S', abgesehen von den Punkten 1, 2, ..., 8, noch in je zwei Punktepaaren treffen, so wird die Ebene E' in ∞^2 Punktepaare aufgelöst. Die Jacobi'sche Curve der Schar zerfällt in $C_3 . C'_3$ und eine $J_9(1^3, \ldots, 8^3)$, mit $p = 4$ und von der oben erwähnten speciellen Art, indem die ∞^1-Schar von Wurzelformen $\sqrt{\varphi} = C_3 + \lambda C'_3$ existirt; und J_9 ist durch die Punkte 1, ..., 8 eindeutig bestimmt. Die Ebene E' wird nun mittelst einer ∞^2-Schar von Curven aus S': $C_6(1^2, \ldots, 8^2, b_1, b_2)$, welche noch durch eines der Paare von E', b_1, b_2, gehen, in eine neue, doppelt überdeckte, Ebene E transformirt, wobei den Punktepaaren von E' die Punkte von E entsprechen. Dabei geht J_9 eindeutig in eine Curve $\Omega_6(\pi^3, \pi_1^3)$, sechster Ordnung mit zwei benachbarten dreifachen Punkten, $p = 4$, über; und die gesuchten Berührungscurven von Ω_6 (in je einem Blatte von E laufend) entstehen hier aus denjenigen Curven von E', welche nicht in Punktepaare von E' zerfallen. Da sich aber diese Curven durch ihr Verhalten gegenüber den acht Punkten 1, 2, ..., 8 unterscheiden, so ergiebt sich die Gruppirung der Berührungscurven vermittelst der Indicescombinationen von 1, 2, ..., 8. Es setzen sich die Gleichungen von Ω selbst und allen ihren Berührungscurven-systemen (also auch von J_9) rational aus den Coordinaten der gegebenen acht Punkte zusammen; so die 120 ungeraden $\sqrt{\varphi_\alpha}$, welche den Punkten 1, ..., 8, den Geraden (ik), den C_2(iklmn), und den Curven der Art $C_3(1^2\,2\,3 \ldots 7)$ $C_3(2\,3 \ldots 7\,8^2)$ entsprechen.

Schottky's Gedankengang (63_1) unterscheidet sich von dem skizzirten nicht wesentlich. Er verwendet indessen zur Transformation der Ebene E' die ganze ∞^3-Schar S', wodurch E', statt in eine Doppelebene, in eine doppelt überdeckte Fläche zweiter Ordnung übergeht. Diese wird ein Kegel K_2 $(y_2 y_4 - y_3^2 = 0)$, wenn man $C'_6 : C_3^2 : C_3 C'_3 : C'^2_3$ gleich

$y_1:y_2:y_3:y_4$ nimmt. Der $J_9(1^3.\ldots.8^3)$ entspricht dann auf K_2 eine Raumcurve sechster Ordnung (an Stelle der ebenen Ω_6), die sich als der Schnitt des Kegels mit einer Fläche dritter Ordnung, also als die Weber'sche Normalcurve für $p=4$ (s. VIII. A. Nr. 2 und 4) erweist.

Was aus jener Abbildung auf eine Doppelebene für die Relationen zwischen Wurzelfunctionen folgt, sei noch besonders angeführt. Man hat für $p=4$ überhaupt $2^8-1=255$ gleichberechtigte ∞^2-Scharen von in je sechs Punkten berührenden $X^{(2)}$ (s. Nr. 10), die in dem betrachteten Falle, in welchem eine gerade eigentliche Ch. ausgezeichnet ist $(\vartheta_a(0)=0)$, sich in zwei Klassen von 120 und 135 Scharen einteilen. In jeder Schar giebt es, wie für $p=4$ immer, 28 Paare $\varphi_\alpha\varphi_\beta$; und zwischen je vier Wurzelformen $\sqrt{\varphi_\alpha\varphi_\beta}$, die zu derselben Schar gehören, existirt eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten. In dem betrachteten speciellen Falle aber giebt es in jeder der 135 Scharen acht getrennte ∞^1-Scharen von $X^{(2)}$, in deren jeder noch sieben Paare $\varphi_\alpha\varphi_\beta$ vorkommen, und schon zwischen je drei von solchen sieben Wurzelformen $\sqrt{\varphi_\alpha\varphi_\beta}$ existirt eine lineare homogene Relation. Solcher dreigliedrigen Wurzelrelationen existiren 35. 135. 8. Die Gruppirung der 28 Paare einer Schar ist identisch mit derjenigen der 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung. Die algebraischen Moduln sind die Coordinaten der acht gegebenen Punkte, die sich, nach linearen Transformationen der Ebene E', als acht willkürliche Constanten darstellen.

Die Charakteristiken-systeme für beliebiges p.

21. Von der Auszeichnung einer geraden Theta-Charakteristik, welche dem in Nr. 20 erwähnten speciellen Fall (und auch der (38_1) voraufgehenden Note) anhängt, sieht Noether in (38_1) ab, wo er eine Theorie der Systeme allgemeiner Theta-Charakteristiken für $p=4$ giebt, die er in (46) und (48) auf beliebiges p erweitert. Diese allgemeinere Auffassung wurde ermöglicht durch Ausgestaltung der Jordan'schen Theorie der „Steiner'schen Gruppe G" (s. Nr. 19) unter Betonung der invarianten Eigenschaften der verschiedenen Arten von Charakteristiken. Das Princip der Untersuchung besteht darin, die von niedrigeren Zahlenwerten p her bekannten Resultate durch Zufügen einer Reihe $\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{0}$ und durch Anwenden der Jordan'schen Charakteristiken-Substitutionen auf ein höheres p zu übertragen. Während in (38_1) noch Abzählungen an Indicescombinationen vorkommen, dient als Grundlage weiterhin der Gedanke: dass die in zweien azygetischen Gruppen [r], [s] (s. Nr. 8) gemeinsam enthaltenen 28 ungeraden (α) und 36 geraden eigentlichen Charakteristiken

(a), und die 63 zu [r] und [s] syzygetischen Gruppen-Charakteristiken $[\rho]$ genau dasselbe Verhalten zu einander haben, wie die eigentlichen und Gruppen-Charakteristiken (α), (a), $[\rho]$ für $p = 3$. [(k) heisst dabei „in [r] enthalten", wenn (k) und (rk) beide ungerade oder beide gerade sind].

(38_1) enthält schon für $p = 4$ alle vollständigen azygetischen 8-Systeme ungerader Charakteristiken, sowie die vollständigen azygetischen 10-Systeme gerader Charakteristiken mit Summe 0; und zwar unter Angabe ihres Bildungsgesetzes an der Hand der Indicesbezeichnung, welche die Aufstellung von Zerlegungstafeln, wie sie Weber für $p = 3$ giebt, erspart. In (48) wird zunächst dasjenige einfache System von p Paaren von Perioden-Charakteristiken zu Grunde gelegt, welches sich auf eine kanonische Querschnittszerlegung bezieht. Auf ihnen beruht sowohl die Jordan'sche zweite Definition der Abel'schen Gruppe (s. Nr. 19), als auch seine Abhandlung (44); auch Schottky (40) geht im Falle $p = 3$ von ihnen aus. Es sind die Charakteristikenpaare:

$$[\rho_i], \quad [\sigma_i] \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

wo in $[\rho_i]$, bezw. $[\sigma_i]$, alle Elemente $\equiv 0 \pmod{2}$ sind bis auf $n_i - 1$, bezw. $m_i - 1$. Die invariante Eigenschaft nun, welche Jordan und Noether zur Aufstellung aller solcher Systeme von p Gruppenpaaren $[r_i]$, $[s_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ benutzen, ist die, dass $[r_i]$ und $[s_i]$ für jedes i gegen einander azygetisch, die übrigen Combinationen zu einander syzygetisch angenommen werden. Jordan (44) stellt hiernach eine Reihe von Aufgaben auf. So fragt er nach den azygetischen Systemen von $3, 5, \ldots, 2p+1$ Gruppen-Charakteristiken, und giebt auch schon das einfache Bildungsgesetz für dieselben:

$$\begin{matrix} [r_1], & [t_1 r_2], & [t_1 t_2 r_3], & \ldots, & [t_1 \ldots t_{i-1} r_i], \\ [s_1], & [t_1 s_2], & [t_1 t_2 s_3], & \ldots, & [t_1 \ldots t_{i-1} s_i], \end{matrix} \quad [t_1 t_2 \ldots t_i], \quad (\text{wo } [t_i] = [r_i s_i]).$$

Hiermit war der Uebergang zum Riemann'schen System (Nr. 16, 18) gemacht, aber ohne einen entsprechenden Hinweis; die Definition auch des letzteren, als eines azygetischen Systems von Gruppen-Charakteristiken, findet sich erst bei Stahl (47) (s. auch Noether (48)).

Die übrigen Aufgaben, die Jordan in (44) stellt, sprechen teilweise vom Charakter des Geraden und Ungeraden der Gruppen-Charakteristiken, zeichnen also die eigentliche Charakteristik (0) aus. Dagegen dienen in (48) die Systeme $[r_i]$, $[s_i]$ von 2p Gruppen-Charakteristiken zur Ableitung aller möglichen Systeme, nicht nur von Gruppen-Charakteristiken, sondern auch von eigentlichen Charakteristiken. Hinsichtlich der letzteren kommt

die Eigenschaft in Betracht, dass die in $[r_1], [s_1]; \ldots; [r_k], [s_k]$ enthaltenen eigentlichen Charakteristiken sich genau so verhalten, wie die eigentlichen Charakteristiken von p—k Reihen, dass also insbesondere in allen $[r_i]$, $[s_i]$ $(i = 1, \ldots, p)$ nur eine eigentliche Charakteristik und zwar eine gerade (g) enthalten ist. So ist durch die $[\rho_i]$, $[\sigma_i]$ die gerade Charakteristik $\binom{0\,0\ldots 0}{0\,0\ldots 0}$ ausgezeichnet. Das zu dem oben hingeschriebenen System $(i = p)$ gehörige (l_0), das nach Nr. 11 den Uebergang zu eigentlichen Charakteristiken bewirkt, ist $(l_0) = (gt_2 t_4 \ldots t_p)$, bezw. $(gt_1 t_3 \ldots t_p)$, je nachdem p gerade oder ungerade ist. Von solchen Resultaten von (48), welche zur Theorie der Relationen zwischen Wurzelformen in Beziehung stehen, ist noch zu erwähnen: der Nachweis von Untergruppen der Zweiteilungsgleichung, welche Zweiteilungsgruppen bei niedrigerem p entsprechen; z. B. die Gruppirung der in einer Gruppen-Charakteristik enthaltenen Paare gerader oder ungerader Charakteristiken, welche genau dieselbe ist, wie die der $(p-1)$-reihigen eigentlichen Charakteristiken. Derselbe Satz, aber wesentlich vervollständigt, ist von Frobenius (s. Nr. 22) ausgesprochen worden.

Dann aber wird durch die Systembetrachtungen auch die früher (Nr. 11 u. Nr. 13) besprochene Aufgabe: aus der Zuordnung der Wurzelfunctionen zu den Perioden-Charakteristiken bei gegebener Zerschneidung arithmetisch auf die Zuordnung der Wurzelformen ungerader Dimension zu den Theta-Charakteristiken zu schliessen, vereinfacht. Statt die Zerlegungen aller Perioden-Charakteristiken in Paare von Theta-Charakteristiken zu untersuchen, und entsprechend die der Wurzelfunctionen in Quotienten je zweier Wurzelformen, genügt es, die Zerlegungen der 2p zu Grunde gelegten Perioden-Charakteristiken $[r_i]$, $[s_i]$, z. B. der $[\rho_i]$, $[\sigma_i]$ zu betrachten, um unmittelbar die zu (g) bezw. (0) zugeordnete ausgezeichnete Wurzelform zu erhalten.

Sieht man von der Zerschneidung ab, so kann man ein System von 2p kanonischen Perioden-Charakteristiken irgend einem System von 2p in analoger Weise azygetischen, bezw. syzygetischen Wurzelformen gerader Dimension zuordnen; oder irgend einem Riemann'schen System ein System von $2p+1$ azygetischen Wurzelformen gerader Dimension, von denen eines rational aus den übrigen hervorgeht; und analog für die Systeme von Theta-Charakteristiken und von Wurzelformen ungerader Dimension.

Die einfachste Indicesbezeichnung, der Hesse'schen analog gebildet, entnimmt man durchaus der Bezeichnung der Wurzelformen im hyperelliptischen Fall. Man bildet also aus $2p+2$ Zahlen $0, 1, \ldots, 2p+1$

zweierlei Combinationen: eigentliche (k. l. m. ...) und Gruppen-Combinationen [k. l. m. ...]. Dabei wird festgesetzt, dass die Anordnung gleichgültig ist, dass zwei gleiche Zahlen sich gegenseitig aufheben sollen, und dass die Gruppen-Combination [0. 1. ..., 2p+1] (der uneigentlichen Gruppe entsprechend) als identisch = 0, d. h., dass zwei Combinationen einer Art, welche sich zu 0. 1. ..., 2p+1 ergänzen, als nicht von einander verschieden betrachtet werden sollen. Für $p = 4\pi$ ordnet man den eigentlichen Combinationen der $2p+2$ Zahlen zu 1, 5, 9, ... die geraden Theta-Charakteristiken, denen zu 3, 7, 11, ... die ungeraden Theta-Charakteristiken (also beiden die Wurzelformen ungerader Dimension) zu; und umgekehrt für $p = 4\pi+2$. Für $p = 4\pi+1$ ordnet man den eigentlichen Combinationen der $2p+2$ Zahlen zu 2, 6, 10, ... die geraden, denen zu 4, 8, 12, ... die ungeraden Theta-Charakteristiken zu; und umgekehrt für $p = 4\pi+3$. In diesen Fällen eines ungeraden p tritt daher auch die Combination (0. 1. ..., 2p+1) als eigentliche auf, welche aber nicht identisch = null zu setzen ist. Die Gruppen-Combinationen der $2p+2$ Zahlen sind immer aus einer geraden Anzahl derselben zu bilden; und jede solche ist in allen Fällen einer Perioden-Charakteristik, d. h. einer Wurzelform gerader Dimension zugeordnet.

22. Frobenius (51), (56) hat sich von 1880 an mit der Theorie der Gruppirungen der Charakteristiken beschäftigt, aber zunächst weniger im Hinblick auf die Wurzelfunctionen, als auf die Additionstheoreme der Thetafunctionen. In Folge dessen stellt er sich nicht auf den in Cap. A und B skizzirten Standpunkt der linearen Periodentransformation, sondern betrachtet als wesentliche Eigenschaften der Halben-Charakteristiken diejenigen, von denen die zwischen den Thetafunctionen mit variabeln Argumenten bestehenden Relationen abhängen, d. h. diejenigen, welche a) bei den linearen Periodentransformationen und b) bei Vermehrung der Argumente um halbe Perioden invariant bleiben. Hierbei ist also der „Charakter" des Geraden oder Ungeraden einer Theta-Charakteristik keine invariante Eigenschaft, obwohl derselbe in den Relationen zwischen Thetas der Nullargumente sich ausdrückt. Für den Uebergang einer Charakteristiken-Reihe $A, A_1, \ldots$ in eine zweite $B, B_1, \ldots$ vermöge a) allein ist es nach Frobenius notwendig und hinreichend, dass — wenn $|K| = 0$ oder 1 den eben definirten „Charakter" von K bezeichnet —

Charakteristikentheorie von Frobenius.

$$1)\quad |A_\alpha| = |B_\alpha| \quad (\alpha = 0, 1, \ldots);$$

$$2)\quad |AA_\alpha A_\beta| = |BB_\alpha B_\beta| \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots);$$

3) dass, wenn die Summe einer geraden Anzahl der A identisch null wird.

dann auch die der entsprechenden B null wird. Dagegen liefert das Hinzutreten von b) die Bedingungen, dass ausser 3) noch $|A, A_\alpha, A_\beta| = |B, B_\alpha, B_\beta|$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots)$ sei, wobei $|A, A_\alpha, A_\beta| \equiv |AA_\alpha| + |AA_\beta| + |A_\alpha A_\beta|$ (mod. 2) ist. Mit anderen Worten: aus den in Nr. 21 bezeichneten Systemen entstehen die von Frobenius, wenn man ein und dieselbe Charakteristik (C) zu allen Charakteristiken jener Systeme addirt. Es ist dies nicht der Standpunkt der sogenannten „speciellen“ oder „reinen“, sondern der der „allgemeinen“ Zweiteilung (s. (17)), ein Standpunkt, auf welchen (im zweiten seiner Probleme) auch Jordan (44) [der übrigens für die bezüglichen Systeme ein directes Bildungsgesetz angiebt] und im wesentlichen auch Stahl (45) steht.

Frobenius unterscheidet „beliebige“ und „wesentliche“ Combinationen. Die letzteren sind Summen von irgend einer ungeraden Anzahl von Charakteristiken. Dies ist ein Ersatz für die früheren Unterscheidungen der zwei Arten von Charakteristiken (s. Nr. 7), indem die ersteren Combinationen bei Gruppen-(Perioden-)Charakteristiken, die letzteren bei eigentlichen (Theta-)Charakteristiken in der nur die Forderung a) verwendenden Theorie auftreten. In der That gestaltet sich der Uebergang zwischen beiden Betrachtungen am einfachsten, wenn man von den in Nrn. 15—16, 21 besprochenen Systemen von Gruppen-Charakteristiken ausgeht und das zu solchen [B] hinzuaddirte (C) als eigentliche Charakteristik, die $(CB_\alpha) = (A_\alpha)$ also ebenfalls als eigentliche Charakteristiken auffasst. So werden aus den früheren $[B_1], [B_2], \ldots$, wo z. B. je zwei der Gruppen syzygetisch zu einander sind, also $K_{B_\alpha, B_\beta} = 0$, oder in Frobenius'scher Schreibart $|B_\alpha, B_\beta| \equiv 0$ (mod. 2) ist, jetzt Charakteristiken $(A_1), (A_2), (A_3), \ldots$ entstehen, für die $|A_\alpha, A_\beta, A_\gamma| = 0$, die also Systeme von syzygetischen eigentlichen Charakteristiken im früheren Sinne sind. Und da bei $|A_\alpha, A_\beta, A_\gamma|$ auch der Charakter der Charakteristiken untersucht wird, so beschränkt sich der Unterschied gegen die frühere Theorie von Weber, Noether etc. wesentlich darauf, dass nun in den Systemen von Theta-Charakteristiken nicht bloss solche von gleichem Charakter betrachtet werden. Uebrigens hat sich später Schottky (63), wie Frobenius in (65_1), ebenfalls auf den früher besprochenen Standpunkt gestellt, wonach man die Charakteristiken der Thetafunctionen von denen der Perioden [also die „eigentlichen“ von den „Gruppen-Charakteristiken“] unterscheidet, um nicht von den ersteren eine willkürlich zu bevorzugen: Schottky, indem er für die ersteren die Zeichen k, l, ..., für die letzteren die Zeichen K, L, ... wählt; Frobenius, indem er die ersteren als „einfache“, die letzteren als „Gruppen“-Charakteristiken (schon in (65), § 4 durch Klammern [ ]) bezeichnet.

Das Mittel, welches Frobenius für die Abzählungen benutzt, besteht wie bei Hermite (5) in Sätzen über die Lösung linearer Congruenzen. Aus seinen Resultaten über Bildung der Charakteristiken-Systeme sei besonders ein einfacher Process zur Erzeugung derjenigen Systeme („Fundamentalsysteme“) von $2p+2$ eigentlichen Charakteristiken, deren Summe $\equiv 0$ ist, und von welchen je drei zu einander azygetisch sind (die aber teilweise gerade, teilweise ungerade sein dürfen), hervorgehoben. Sind A, B, C, D vier Charakteristiken eines solchen Systems, so besteht das Verfahren, welches alle Systeme successiv aus einem abzuleiten erlaubt, in dem Ersatze dieser vier Charakteristiken bezw. durch BCD, ACD, ABD, ABC. Es ist derselbe Process, durch welchen Weber von (p): $(\beta_1), \ldots, (\beta_7)$ zu dem in Nr. 18 genannten System von $(\beta_1\beta_2\beta_3)$ geführt wird, nahe verwandt mit den Jordan'schen Substitutionen $\{ABCD\}$ (Nr. 19).

Auf ein wichtiges Resultat ist schon in Nr. 21 hingewiesen worden. Es knüpft sich an die Untersuchung über das gegenseitige Verhalten der 2^ϱ Perioden-Charakteristiken eines „Systems ρter Stufe“ (nach dem Ausdruck von Schottky (63), bei Frobenius als „Gruppe“ bezeichnet), welches nämlich aus allen Combinationen von ρ Perioden-Charakteristiken, als „Basis“, entsteht. Insbesondere entsteht ein syzygetisches System aus ρ paarweise syzygetischen Charakteristiken; es kann auch als das derjenigen halben Perioden $\frac{1}{2}\omega$ betrachtet werden, welche zugleich die ganzen Perioden einer Thetafunction zweiten Grades sind, d. h. einer solchen Function, die sich bei Vermehrung um die ω wie $\vartheta^2(u)$ verhält. Einem solchen syzygetischen System ρter Stufe (auch „Göpel'sches System“ genannt),

$$B_0, B_1, \ldots, B_{s-1} \quad (s = 2^\varrho, \; B_0 = 0),$$

das aus ρ Gruppen-Charakteristiken combinirt ist, wird ein System von $\sigma = 2^{\varrho(p-\varrho)}$ eigentlichen Charakteristiken $(a_1), (a_2), \ldots, (a_\sigma)$ gegenübergestellt, für welche die $(a_1 B_j)$ für $j = 0, 1, \ldots, s-1$ sämtlich gerade oder sämtlich ungerade, und, wenn Σ_i eine symmetrische Function der letzteren s eigentlichen Charakteristiken vorstellt, die $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_\sigma$ von einander verschieden sind. Der Satz von (56) ist nun der, dass diese σ Verbindungen Σ_i dieselbe gegenseitige Anordnung haben, wie die σ $(p-\rho)$-reihigen eigentlichen Charakteristiken (a_i'); oder, genauer gesagt, dass jeder Relation zwischen Thetafunctionen zweiten Grades $\vartheta_{a_i'}(u)\vartheta_{a_i'}(v)$ von $p-\rho$ Argumenten eine solche zwischen den Thetafunctionen $\varphi_{a_i}(u, v)$ von p Argumenten entspricht, wo $\varphi_{a_i}(u, v)$ eine gewisse lineare symmetrische Function der s Ausdrücke $\vartheta_{a_i B_j}(u)\vartheta_{a_i B_j}(v)$ $(j = 0, 1, \ldots, s-1)$ ist.

Die Producte $\Pi_{a_i}(u) = \vartheta_{a_i B}(u)\vartheta_{a_i B_1}(u) \ldots \vartheta_{a_i B_{s-1}}(u)$ sind Schottky's „Functionen ρter Stufe", die $\Pi_{a_i}(0)$ (für (a_i) gerade) dessen „Constanten ρter Stufe" (63).

Weitere Arbeiten.

23. Wir sind hiermit im wesentlichen bei dem heutigen Stande der Theorie der Charakteristikensysteme angelangt; nur vereinzelte Untersuchungen sind noch kurz zu erwähnen.

Wie in Nr. 18 gesagt worden ist, hat Weber (37) für $p = 3$ die linearen Perioden-Transformationen bestimmt, welche ein gegebenes Aronhold'sches 7-System eigentlicher Charakteristiken in irgend ein anderes solches überführen. Für beliebige p schliesst Noether (62) hieran an, um, was einfacher, ein System von $2p$ kanonischen Gruppen-Charakteristiken in irgend ein anderes solches zu verwandeln. Er zeigt, dass die von Jordan als „Steiner'sche Gruppe G" bezeichnete Gruppe von Charakteristiken-Substitutionen (Nr. 19) mit dessen „Abel'scher Gruppe H" mod. 2 sich deckt. Die Transformation, welche ein erstes System von p Paaren kanonischer Gruppen-Charakteristiken in irgend ein zweites überführt, lässt sich unmittelbar ablesen; und umgekehrt ergiebt die bekannte Erzeugung aller Transformationen von H aus elementaren eine neue Regel für die Zusammensetzung aller Substitutionen von G und somit für die Bildung aller Systeme von p Paaren kanonischer Gruppen-Charakteristiken.

Die Gleichung für die reinen Berührungscurven (Wurzelformen) bei gegebenem Rationalitätsbereich der zu Grunde gelegten Gleichung $f = 0$ hat eine Galois'sche Gruppe G', die mit G identisch oder eine Untergruppe von G ist. Schon Jordan (24) bemerkt, dass für $p = 3$, bei unbestimmt gelassenen Coefficienten der ebenen f_4, $G' = G$ ist; und Weber (57) benutzt zum Beweise dessen die Thatsache, dass für das 7-System von Doppeltangenten die 14 Constanten beliebig gewählt werden können, dass also der Uebergang zu jedem anderen 7-System auch mittels G' möglich sein müsse.

In speciellen Fällen ist G' eine Untergruppe von G; so im hyperelliptischen (Nr. 13) und in dem Nr. 20 besprochenen Falle $p = 4$. Von anderen Specialisirungen, welche mit Hülfe der Charakteristikentheorie verfolgt worden sind, ist nur noch der von Thomae (31_1) behandelte Fall: $s^3 = f_4(z)$, $p = 3$, und der von Osgood (73) behandelte: $s^3 = f_6(z)$, $p = 4$, zu erwähnen. Die eindeutige Transformation in sich vom Cyklus 3, welche das Gebilde hierbei zulässt, bewirkt die Auszeichnung einer ungeraden, bezw. geraden, eigentlichen Charakteristik und die cyklische Anordnung der übrigen eigentlichen Charakteristiken zu je dreien, und bringt in Folge dessen die Gruppe G auf eine solche G' zurück, die im ersten Falle der

Gruppe der allgemeinen Dreiteilung für p = 1 (Hesse'schen Gleichung), im zweiten Falle der Gruppe der speciellen Dreiteilung für p = 2 (s. (23)) oder auch derjenigen, welche aus der Zweiteilungsgruppe für p = 3 durch Auszeichnung einer ungeraden Charakteristik entsteht, isomorph ist. Weitere gruppentheoretische Untersuchungen in dieser Richtung liegen nicht vor.

Die ausführlichen Arbeiten von Staude (58), (58$_1$) über den Fall p = 2 geben zwar eine Uebersicht über die Formelbeziehungen zwischen Theta- und Wurzelfunctionen, führen aber weder die Galois'schen Begriffe ein, noch erörtern sie die Frage, ob und wie die dortigen Zuordnungen von der Art der Zerschneidung der Riemann'schen Fläche abhängen, noch endlich enthalten sie den Hinweis darauf, dass überall eine gerade Charakteristik ausgezeichnet wird. Der letztere Umstand erklärt Staude's zweierlei Arten von Zuordnungen von Theta-Charakteristiken zu algebraischen (Wurzelform)-Charakteristiken. Von dieser willkürlichen Auszeichnung hängt auch die Einteilung der 15 Gruppen-Charakteristiken (p = 2) in zwei Klassen von 9 und 6 bei Krazer (53$_1$) und Anderen ab. Die teilweise combinatorischen Sätze von Pascal (76) über Charakteristiken beziehen sich ebenso auf das in der Bezeichnung willkürlich bevorzugte System von 2p + 2 Charakteristiken mit Summe 0, während dessen nachfolgende Noten in der Rend. Acc. Linc. wirkliche Gruppenbeziehungen betreffen.

Von Tabellen für die Bezeichnungen und Uebergänge bezüglich Indices und Thetafunctionen bei den verschiedenen Autoren führen wir an:

Königsberger (10), J. f. M. (Weierstrass'sche Bezeichnung f. bel. p).
Henoch (19) (dasselbe für zwei und drei Variable).
Pringsheim (29) (Weierstrass-Rosenhain), (32) (Weierstrass, p = 4).
Weber (30) (allgemeiner Fall p = 3).
Thomae (31) (p = 2).
Borchardt (34) (p = 2, Göpel-Weierstrass).
Weber (34$_2$) (p = 2, allgem. Indices und Rosenhain'sche Bezeichnung).
Schottky (40) (Darstellung der Weierstrass'schen Bezeichnung, p = 3).
Cayley (41$_1$) (Hesse'sche Bezeichnung p = 3).
Borchardt (41$_2$) (Weierstrass-Schottky's, Weber's und Hesse's Indices, p = 3).
Noether (42) (Ausbildung des Hesse'schen Calculs für p = 3).
Cayley (43$_1$) (p = 2: Bezeichnungen von Cayley, Göpel, Rosenhain, Weierstrass, Kummer).
Forsyth (43$_2$) (p = 2: auch Bezeichnung von Hermite).
Staude (58), (58$_1$) (p = 2).

Dazu ein geometrisches Bild, das für $p=2$ von Rohn (34_3), für $p=3$ und 4 von Pascal (34_{10}) und (76) gegeben wird.

Obwohl die Aufstellung aller zu einem algebraischen Gebilde gehörigen Wurzelformen und ihre Anordnung eine rein-algebraische Aufgabe wäre, hat doch diese Auffassung, die sich von der transcendenten Theorie ganz unabhängig zu machen hätte, bisher nur in äusserst beschränktem Umfange Platz gegriffen, wie in unserem Referate an verschiedenen Stellen angedeutet ist. Von allgemeinen Ergebnissen ist nämlich nur das in einem Teil von Nr. 10 Mitgeteilte bekannt; von speciellen Fällen aber ist nur der leicht zu erledigende Fall der hyperelliptischen Curven (Nr. 13), der Fall $p=3$ nach Hesse und Aronhold (Nr. 17) und der specielle Fall aus $p=4$ von Nr. 20 untersucht. Die Berechnung der Zahl 120 der Systeme $X^{(1)}$ für $p=4$ hat C. Küpper („Geometrische Betrachtungen etc.", Sitzber. der Böhm. Ges. d. Wiss., 1892) mittelst Correspondenztheorie ausgeführt. Eine eingehendere Untersuchung des Falles $p=3$ findet sich, an die in Nr. 17 besprochene Auffassung anknüpfend, bei De Paolis (39) und Noether (67); über die von Seiten der Geometer unternommenen Untersuchungen, deren algebraische Auffassung und ihre Beziehung zu der transcendenten siehe unten Nr. 28, 29.

E. Die Theta- und Wurzelformen-Relationen.

Reduction der Wurzelfunctionen.

24. Die Charakteristikentheorie dient ausser zur Gruppirung der Wurzelformen dazu, einen Einblick in die Relationen zwischen den Thetafunctionen, oder zwischen den Wurzelformen, zu verschaffen. Ueber die Leistungen in diesem Gebiete geben wir einen kurzen Ueberblick, indem wir zunächst nochmals an die Beziehungen zwischen Wurzel- und Thetafunctionen erinnern. Die einfachste Verallgemeinerung der Riemann'schen Beziehung zwischen Thetafunctionen und Wurzelformen (Nr. 12) erfolgt mit Hülfe der Berührungsformen dritter Dimension: $\sqrt{X_a^{(3)}}$. Diese Wurzelformen bilden (Roch (8)) bei gegebener eigentlicher Charakteristik (a) eine ∞^{2p-3}-Schar, sind also in der Form

$$\sqrt{X_a^{(3)}(x)} = \sum_{i=0}^{2p-3} \lambda_i \sqrt{X_{a.i}^{(3)}(x)},$$

mit variabeln Parametern λ_i, darstellbar. Man bildet nun Wurzelformen aus den $\sqrt{X_{a.i}^{(3)}(x_j)}$ $(i, j = 0, 1, \ldots, 2p-3)$, die sich, in $2p-2$ Variabeln geschrieben, in Gestalt einer Determinante $D_a(x_0, x_1, \ldots, x_{2p-3})$ anordnen. Die Formel, welche die Zuordnung der eigentlichen Charakte-

ristiken unmittelbar zeigt, ist dann:

$$D_a(x_0, x_1, \ldots, x_{2p-3}) = \Omega . C_a . \vartheta_a \left(\sum_{i=0}^{2p-3} \int_{l_i}^{x_i} du \right),$$

wo die C_a von den x, Ω von (a) unabhängig, die l_i die Nullpunkte irgend einer φ-Form sind; eine Formel, welche die meisten der von Rosenhain, Prym, Weber, u. s. w. angewandten umfasst.

Was die weiteren Wurzelfunctionen betrifft, so führt man sie entweder (nach Nr. 10) auf Quotienten $D_a : D_b . R$, wo R eine rationale Function der Variabeln ist, und damit auf Thetaquotienten zurück; oder man stellt auch für $\mu > 3$, analog der Darstellung für $\mu = 3$, die $\sqrt[\mu]{X_a^\mu(x)}$ und die Determinantenquotienten durch Thetafunctionen, bezw. Thetaquotienten dar, wobei nur die Argumente Summen von $(\mu-1)(p-1)$ Integralen werden (so Klein (70)). Die auftretenden Constanten C_a lassen sich dabei immer durch die Theta- oder die algebraischen Klassenmoduln ausdrücken. Das obige $D_a(x_0, \ldots, x_{2p-3})$ selbst lässt sich ebenfalls noch etwa auf einen Ausdruck $\sqrt{X_a^\mu(x_0) \ldots X_a^\mu(x_{2p-3})} . R$, wo R rational ist, reduciren, die $\sqrt{X_a^\mu(x_i)}$ aber lassen sich durch einen Ausdruck $\sqrt{\varphi_\alpha(x_i)\varphi_\beta(x_i)\ldots\varphi_\gamma(x_i)}$ ersetzen, so dass man alles auf die einfachsten Wurzelformen $\sqrt{\varphi_\alpha(x)}$ und auf rationale Functionen der Variabeln zurückführen könnte. Dies geschieht z. B. bei Weierstrass-Königsberger (10), welche Functionen $\sqrt{\varphi_\alpha(x)}$ mit einfachem Index α zu Grunde legen.

25. Was die Thetarelationen angeht, so können wir hier im wesentlichen nur auf die Litteratur hinweisen. Für den hyperelliptischen Fall auf die Arbeiten von Göpel, Rosenhain (2), Weierstrass-Königsberger (10); für den allgemeinen Fall $p = 3$ auf Weber (30), Schottky (40); für $p = 4$ auf Noether (38_1), Schottky (63); für beliebiges p auf Stahl (45), Noether (48), Frobenius (51), Prym (53). Die systematischsten Ableitungen findet man in (51) und (53); Beziehungen zwischen den Relationen in (48) und (63).

Thetarelationen.

Die Thetarelationen lassen einerseits besondere, auch algebraische, andererseits allgemeine Auflösungen zu. So hat für $p = 2$ Cayley (33_1) aus den $\vartheta(0)$ Ausdrücke $\sqrt{a_i - a_k}$ zusammengesetzt, die sich (nach Hesse, J. f. M. 63) wie die Coefficienten einer ternären orthogonalen Substitution verhalten. Als ebensolche Coefficienten werden von Weber (37_1) gewisse 9 Thetaquotienten mit variabeln Argumenten erkannt; und Caspary (37_2) hat die Coefficienten einer quaternären orthogonalen Substitution als Producte $\vartheta_a(u)\vartheta_a(v)$ ausgedrückt. Allgemeine Untersuchungen in dieser Richtung hat Prym (53) angestellt.

Für $p = 2$ ist eine allgemeine Auflösung der Thetarelationen — d. h. eine Darstellung aller Thetaquotienten $\vartheta_a(u), \vartheta_b(u)$ durch p unabhängige Parameter — schon in den Arbeiten (2) geleistet. So setzt Rosenhain (vgl. III. Nr. 28) zwei Thetaquotienten bezw. gleich $\sqrt{xx'}$ und $\sqrt{(1-x)(1-x')}$, also gleich den einfachsten Wurzelfunctionen von zwei Punkten. Eine analoge Umkehrung giebt für den hyperelliptischen Fall $p = 4$ Pringsheim (32), für hyperelliptische bei $p = 3$ Schottky (Nachtrag zu (40)), für den allgemeinen Fall $p = 3$ derselbe (40). Der allgemeinen Auflösung für $p = 2$ ist von Borchardt (34) eine andere Form gegeben worden. Er deutet die Göpel'sche biquadratische Relation (vgl. III. Nr. 27) zwischen einem syzygetischen Quadrupel $\vartheta_a(u, v)$, $\vartheta_{aK}(u, v)$, $\vartheta_{aK'}(u, v)$, $\vartheta_{aKK'}(u, v)$ (s. Nr. 22), indem er diese vier Functionen homogenen Raumcoordinaten proportional setzt, als Gleichung einer Kummer'schen Fläche: die Quadrate der übrigen Thetafunctionen werden dann, nach den Rosenhain'schen Relationen, lineare Functionen der Quadrate der Functionen des Quadrupels. Da wir die algebraischen Functionen von Punktgruppen einer Curve in diesem Referat nicht eingehend besprechen wollen, beschränken wir uns darauf, auf die unter (34)—(34_{14}) citirte Litteratur zu verweisen.

Die in der Theorie der Wurzelfunctionen wichtigen Thetarelationen sind die linearen homogenen zwischen einer Anzahl 1) von Producten $\vartheta_{k_i}(u)\vartheta_{k_i}(v)$; 2) von Producten $\vartheta_{k_i}(u)\vartheta_{k_i'}(u)$, bei gegebener Gruppen-Charakteristik $[k_i k_i'] = [K]$; 3) von Quadraten $\vartheta^2_{k_i}(u)$.

Relationen zwischen Wurzelformen.

26. Wenn man in die in Nr. 25 angeführten Thetarelationen die in Nr. 24 besprochenen Ausdrücke der Thetafunctionen durch Wurzelfunctionen einsetzt, welche sich auf eine vorgelegte algebraische Curve beziehen, so erhält man Lösungen jener Relationen, freilich für $p > 3$ immer nur particuläre, insofern die Zahl der Moduln des algebraischen Gebildes dann kleiner ist, als die Zahl der unabhängigen Thetamoduln. Unter „Lösungen" sind hierbei, wie oben, algebraische Ausdrücke von einer oder mehreren Variabeln verstanden, welche, für die einzelnen Thetas eingesetzt, sämtliche Relationen befriedigen (s. Schottky, J. f. M. 108, S. 147). Man findet auf diese Weise ebenso viele Relationen zwischen den Wurzelformen, und zwar zwischen solchen mit beliebig vielen Variabelnsystemen, z. B. mit zweien vermöge der Ausdrücke von Nr. 12 aus den Formeln mit nur ungeraden Thetas, oder mit $2p-2$ (bezw. p derselben, deren gegenseitige Unabhängigkeit schon zu der der $u_1, \ldots, u_p$ genügt) nach Nr. 24.

Von den Aufgaben, welche sich hierbei darbieten, sind aber bisher erst einige behandelt, wenige gelöst worden:

Für $p = 2$ hat die einfachsten Relationen Cayley (33_1) (vgl. Nr. 25) aufgestellt.

Für $p = 3$ haben Riemann (6_1) (s. auch Cayley (54)) und Weber (30) die Relationen zwischen den 28 Formen $\sqrt{\varphi}$ an der Hand der Charakteristikentheorie discutirt, und besonders Weber aus den Thetaformeln die algebraischen Klassenmoduln durch die transcendenten Moduln ausgedrückt.

Für $p = 3$ und $p = 4$ sind neuere Arbeiten von Schottky und Frobenius zu erwähnen, welche wir in Nr. 27—29 eingehender besprechen werden.

In Bezug auf die in Nr. 24 erwähnte lineare Zusammensetzung der Scharen $\sqrt{X_k^{\mu}(x)}$ aus „speciellen Abel'schen Functionen" hat Weber (30) für $p = 3$ noch besondere Angaben. Die $X_k^{(2)}$ kann man je aus zwei Producten $\sqrt{\varphi_\alpha \varphi_{k\alpha}}$, $\sqrt{\varphi_\beta \varphi_{k\beta}}$ (wo (α), $(k\alpha)$ etc. ungerade sind) zusammensetzen, wie nach Hesse bekannt ist; ferner die $X_k^{(3)}$ je aus vier Producten der Art $\sqrt{\varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_{k\alpha\beta}}$ auf mannigfaltige Weise, wobei noch für ungerades (k) in mehreren der Producte zwei der Factoren unter sich gleich angenommen werden können (s. auch Schottky (40), § 22). Die $X_k^{(2\mu)}$ sind in der Form $f_1 \sqrt{\varphi_\alpha \varphi_{k\alpha}} + f_2 \sqrt{\varphi_\beta \varphi_{k\beta}}$, die $X_k^{(2\mu+1)}$ für gerade (k) in der Form von vier Producten der Art $f_1 \sqrt{\varphi_{\alpha_1} \varphi_{\beta_1} \varphi_{k\alpha_1\beta_1}}$, für ungerade (k) in der Form $f_0 \sqrt{\varphi_k} + f_1 \sqrt{\varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_{k\alpha\beta}}$, wo alle f rational sind, übrigens mit noch überflüssigen Parametern, darstellbar.

Für beliebiges p und $\mu \geqq 3$ hat Noether (62) angegeben, dass man $\sqrt{X_k^{(\mu)}}$ in die Form setzen kann

$$\sqrt{\varphi'_\alpha} \sqrt{X_{k\alpha}^{(\mu-1)}} + \sqrt{X_l'^{(\mu-2)}} \sqrt{X_{kl}^{(2)}},$$

wo bei gegebenem k und μ die beiden Formen $\sqrt{\varphi'_\alpha}$ und $\sqrt{X_l'^{(\mu-2)}}$ fest gewählt werden können, sodass in dem Ausdruck nur genau so viele Parameter vorkommen, als die allgemeinsten $\sqrt{X_k^{(\mu)}}$ enthalten, nämlich $(\mu-1)(p-1)$. Es folgt hieraus, dass man $\sqrt{X_k^{(\mu)}}$ durch $(\mu-1)(p-1)$ Producte von je μ Abel'schen Functionen der Art $\sqrt{\varphi_\alpha}$ darstellen kann, vorausgesetzt dass dies für alle $\sqrt{X_k^{(2)}}$ $(k \neq 0)$ möglich ist. Für diese letztere Möglichkeit, von welcher der hyperelliptische Fall überzeugt, wäre auch ein directer Beweis wünschenswert, also ein Beweis dafür, dass $p-1$ Curven $\Phi^{(2)}$, welche durch die Berührungspunkte einer $X^{(2)}$, von der Gruppen-Charakteristik $[k]$, gehen und je die Berührungspunkte

von gewissen p—1 zerfallenden $X^{(2)}$ der Schar [k] ausschneiden, von einander linear-unabhängig sind.

Allgemeinere Sätze über die Zusammensetzung der Formen aus einer gegebenen Anzahl specieller, so bei den Wurzelformen D_α (Nr. 23) mit mehreren Variabeln, sind bis jetzt nicht bekannt; insbesondere nichts über die lineare Abhängigkeit der Relationen. Für $p = 2$ finden sich bezüglich der rationalen Zusammensetzung einige Bemerkungen und Schlüsse bei Burkhardt (69).

Schottky's Arbeit für p=3.

27. Die Theorie des Zusammenhangs der 28 Wurzelformen $\sqrt{\varphi_\alpha}$ für $p = 3$, also der 28 Doppeltangenten der ebenen Curve vierter Ordnung, ist vermöge der Thetarelationen über die schon besprochenen Arbeiten hinaus von Schottky (40) gefördert worden. Diese Arbeit hat das Verdienst, auch für die allgemeine Klasse $p = 3$ von den Thetafunctionen aus einen (freilich von Sprüngen nicht freien*)) Weg zum algebraischen Gebilde eingeschlagen zu haben. Dabei ist hervorzuheben, dass Schottky, wie Weber, von den sieben ungeraden Functionen eines Aronhold'schen 7-Systems ausgeht; nur dass er dieselben in symmetrischer Weise einführt. Sodann ist hinzuweisen auf die wirkliche Bildung vieler Wurzelformen zweiten Grades von der ersten, zweiten, dritten, und auch von höherer Ordnung, ausgedrückt durch die sieben gegebenen $\sqrt{\varphi_\alpha}$; auf die symmetrische Darstellung aller einfachen Thetaquotienten und aller Moduln je durch eine begrenzte Zahl solcher, u. A.

Schottky's Aufsatz stellt sich die Aufgabe, den Uebergang zum algebraischen Gebilde durch eine solche Specialisirung der Argumente der Thetafunctionen zu erhalten, dass die ungeraden derselben in Producte je zweier von je einem Parameter abhängigen Ausdrücke zerfallen, einem Parameter, der dann die Punkte eines Gebildes $p = 3$ durchläuft. Diese Auffassung, welche aber erst durch spätere Arbeiten von Schottky und Frobenius völlig klar gestellt worden ist, beruht auf der in Nr. 12 mitgeteilten Gleichung. Die linearen Glieder der sieben gegebenen ungeraden Thetafunctionen sind als die Ausdrücke für sieben Gerade der Ebene gedacht; das eingeführte algebraische Gebilde ist die Jacobi'sche Curve der Curven dritter Klasse, welche diese sieben Geraden a_i berühren, also eine $J_6(a_1^3, \ldots, a_7^3)$; und alle Entwicklungen lassen sich daher als symmetrische Ausführung der Aronhold'schen Theorie (Nr. 17) deuten.

*) Vgl. Noether's Recension in Ztsch. f. Math. u. Phys., Bd. 26, 1881.

28. Als eine rein-algebraische Theorie des Zusammenhangs zwischen den Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung f_4, welche im wesentlichen die algebraischen Formeln Schottky's (40) dadurch wiedergiebt, dass sie die explicit-rationalen Ausdrücke der Doppeltangenten aus denen eines 7-Systems direct ableitet, charakterisirt sich die Arbeit von Frobenius (59). Sein Ausgangspunkt ist eine analytische Formulirung derjenigen geometrischen Auffassung des Hesse'schen Ganges, welche Sturm (21) (ohne auf Hesse Bezug zu nehmen) entwickelt hat, nur übertragen in die dualistische Form: Diejenigen Flächen eines Gewebes (linearen ∞^2-Systems) $F^{(2)}$ von Flächen zweiter Klasse, mit 8 associirten gemeinsamen Ebenen $A_0, A_1, \ldots, A_7$, welche in einen Kegelschnitt degeneriren, berühren eine dieser acht Ebenen, etwa A_0, in den Punkten einer ebenen f_4. Dabei wird die Aronhold'sche Figur der Durchschnitt von A_0 mit der zur Hesse-Sturm'schen Raumfigur dualistischen. Frobenius verdichtet diese geometrischen Bemerkungen — wie es aber in dualistischer Form schon ebenso bei Clebsch (25) geschehen war — zur folgenden Grundlage: die sieben Ebenen $A_1, \ldots, A_7$ und irgend ein Punkt P von A bestimmen eine der $F^{(2)}$ und zugleich die zwei durch P gehenden in A_0 liegenden Erzeugenden dieser $F^{(2)}$; eine Bemerkung, die wieder das in Nr. 17 besprochene 1-2-deutige Entsprechen zwischen Linienpaaren und Punkten der Ebene A_0 liefert.

Der Zusammenhang der Formelsysteme von Frobenius mit denen von Schottky lässt sich noch näher dahin präcisiren, dass die Ausdrücke von Frobenius Entwicklungsglieder der bei Schottky vorkommenden ungeraden Θ-Ausdrücke verschiedener Ordnungen sind. Wir bemerken von diesen Formeln besonders die folgenden sonst nicht benutzten Identitäten:

$$\sum_{\lambda=0}^{7} g_\lambda x_{\alpha\lambda} y_{\beta\lambda} = 0,$$

sechsgliedrige $[x_{\alpha\alpha} \equiv 0]$ Formeln zwischen den Doppeltangenten

$$\varphi_{\varkappa\lambda}(x) \equiv x_{\varkappa\lambda} \quad \text{und} \quad \varphi_{\varkappa\lambda}(y) \equiv y_{\varkappa\lambda}.$$

Diese Identitäten, die aus der Hesse'schen Raumbeziehung nach der Methode von P. Serret (Géom. de direction) erhalten werden, und die nach geeigneter Constantenbestimmung noch einfacher in der Form:

$$\sum_{\lambda=0}^{7} x_{\alpha\lambda} y_{\beta\lambda} = 0$$

erscheinen, dienen Frobenius nun in (65) geradezu als Grundlage der ganzen Theorie der Doppeltangenten: die $x_{\alpha\lambda}$ sollen ein solches

symmetrisches System bilden, welches den Identitäten genügt und vom Range 3 ist (d. h. die Determinanten vierten Grades aus denselben verschwinden). In dieser Theorie, welche der der quaternären orthogonalen Substitutionen ähnlich ist, tritt also die Auszeichnung eines 7-Systems zurück. Frobenius gelangt zu den linearen und quadratischen Identitäten zwischen den $x_{\alpha\beta}$, und giebt, wie schon Hesse, in den Relationen zwischen den Wurzelformen die Gruppe der Indicesvertauschungen, und weiter auch diejenigen Factoren, welche die aus der Vertauschung hervorgehenden neuen $x'_{\alpha\beta}$ annehmen, damit sie denselben Identitäten genügen, wie die alten $x_{\alpha\beta}$. Die $\sqrt{x_{\alpha\beta}}$ selbst bilden bei Frobenius ein alternirendes ($\sqrt{x_{\beta\alpha}} = -\sqrt{x_{\alpha\beta}}$) System vom Range 2.

Der eigentliche Zweck des Aufsatzes (65) deckt sich aber mit dem, den Steiner in (4) im Auge hatte, nämlich mit der Untersuchung der covarianten Curven der 63 Kegelschnittnetze, denen je die 63 Scharen $X_k^{(2)}$ angehören. Frobenius giebt Ausdrücke für die zu Grunde gelegte f_4 in der Form $\sum\limits_{\lambda} x_{\alpha\lambda} G_{\beta\gamma\delta\lambda}$, wo G die Jacobi'sche Form eines Netzes ist, und Beziehungen dieser G etc. zu den Wurzelformen; so z. B. Ausdrücke der G durch Producte von je sechs $\sqrt{x_{\alpha\beta}}$, denjenigen sechs Doppeltangenten entsprechend, durch deren Berührungspunkte G geht, u. s. w. In dieser Beziehung begegnet sich die Arbeit mit dem Bestreben der Geometer, auf dem Steiner'schen Wege die Theorie der Berührungseigenschaften einer f_4 zu ermitteln, eine Aufgabe, mit der sich Geiser (22), Ameseder (55), Bobek (64), Kohn (71) beschäftigt haben.

Weitere transcendente Untersuchungen über Wurzelformen.

29. In einer weiteren Abhandlung (65_1) klärt Frobenius von der Theorie der Thetafunctionen her (oder vielmehr, wie bei Schottky, der σ-Functionen) den Ansatz der Schottky'schen Arbeit (40) auf. Während hier noch eine Thetarelation neunten Grades benutzt wird, um die Argumente als je ein Integral zwischen den Grenzen x und y darstellen zu können, giebt Frobenius als genügende Bedingung an, dass eine gewisse Thetafunction zweiten Grades $\varphi(u)$ verschwinden muss, die Factor jener Relation ist — eine Function, deren Bedeutung auch daraus hervorgeht, dass sie im hyperelliptischen Falle zu $\vartheta_\alpha^2(u)$ wird, wenn $\vartheta_\alpha(u)$ die gerade für $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ verschwindende Thetafunction ist. Die Function $\varphi(u)$ ergiebt sich aus der Formel von Nr. 12, also aus

$$K\vartheta_\alpha^2\left(\int_y^x du\right) = \left(\sum_{i=1}^3 a_\alpha^i x_i\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^3 a_\alpha^k y_k\right),$$

indem man $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_7$ setzt und K sowie die $x_i y_k + x_k y_i$ elimi-

nirt, in der Form

$$\varphi(u) = \vartheta_\alpha^2(u) \cdot a_\alpha'^2 \cdot a_\alpha' a_\alpha'' \ldots a_\alpha'''^2 \ldots = 0 \text{ für } u = \int_y^x du;$$

sie entsteht daher auch, wenn man der Function

$$\varphi(u) = \sum_{\lambda=0}^{7} g_\lambda \vartheta_{\alpha_\lambda}^2(u), \quad \text{wo } \vartheta_{\alpha_0}(u) = \vartheta(u),$$

vorschreibt, in der Potenzentwicklung mit Gliedern vierter Dimension in u_1, u_2, u_3 anzufangen.

Mit der Einführung dieser Function hat Frobenius für den Uebergang von den Thetarelationen zu dem algebraischen Gebilde und dessen Wurzelformen einen neuen Gesichtspunkt eröffnet. Denn da sich die Coefficienten g_λ aus den Thetamoduln unmittelbar herstellen lassen, also auch die Function $\varphi(u)$ selbst sich bilden lässt, so erhält man aus deren Gliedern vierter Dimension bei kleinen Werten der u (oder $du_1 : du_2 : du_3 = x_1 : x_2 : x_3$) die Gleichung $f_4(x_1, x_2, x_3) = 0$ des algebraischen Gebildes. Und umgekehrt erhält man aus $f_4(x) = 0$ das Glied vierter Dimension φ_4 einer Function $\varphi(u)$, sowie die Perioden und diese Function selbst, und daraus die allgemeinste den Bedingungen für die $\varphi(u)$ genügende Function, in der Form $\Phi(u) = k^{-4} e^{q(u)} \varphi(ku)$, wo k constant, $q(u)$ ein quadratischer Ausdruck ist. Indem Frobenius diese Grössen so bestimmt, dass das Glied sechster Dimension Φ_6 die Hesse'sche des Glieds vierter Dimension Φ_4 wird, gehen alle Glieder von Φ in rationale Covarianten von f_4 über — man hat also eine invariante Darstellung der zu f_4 gehörigen Jacobi'schen Functionen. Die letztere Auffassung ist derjenigen von Klein (Ref. VIII. C) ähnlich, welcher seine Untersuchungen (70) ebenfalls auf $p = 3$ und die Darstellung der Wurzelfunctionen in den beiden Fällen der Auszeichnung einer ungeraden oder einer geraden Charakteristik gerichtet hat.

Nicht nur der Grundgedanke der Schottky'schen Arbeit (40) wird durch die Function $\varphi(u)$ durchsichtiger, sondern auch die Bildung einer Reihe von Wurzelform-Ausdrücken wird einfacher und klarer, wobei indessen die von dem Verfasser seit 1886 adoptirte Charakteristiken-Auffassung mitwirkt. Frobenius giebt eine neue Ableitung vieler σ-Relationen, welche sich alle unmittelbar in Relationen zwischen Wurzelformen umsetzen lassen, Relationen, die eine Erweiterung der einem orthogonalen symmetrischen System zugehörigen sind, und von denen aus auch der Uebergang zu dem Formelsystem der Abhandlung (65) geleistet wird. Wir erwähnen noch die Einführung der ungeraden Thetafunctionen zweiten

Grades $\varphi_k(u)$, welche je einer der 63 Gruppencharakteristiken [k] zugeordnet sind, und deren Entwicklungen mit Gliedern dritter Dimension anfangen — sie entsprechen in ihrer Darstellung durch drei Producte $\sigma_{\alpha\lambda}\sigma_{\beta\gamma\delta\lambda}$ den einfachsten Wurzelformrelationen —, ferner die Darstellung von $\varphi(u)$ als Summe von drei Producten oder von drei Quadraten, die in den Entwicklungsgliedern vierter Dimension der kanonischen Darstellung von f_4 in der Form $C^2—AB$ entspricht.

Ein analoger Gang steht auch für $p = 4$ offen, nachdem Schottky (63) — wiederum durch die Annahme, dass die ungeraden Thetafunctionen specieller Argumente in zwei Factoren zerfallen, die nur von je einer Variabeln abhängen — die Relation zwischen den $\vartheta_a(0)$ entwickelt hat, welche die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass die Thetafunctionen zu einem algebraischen Gebilde $p = 4$ gehören. Sie stellt sich als eine lineare homogene Relation zwischen den Quadratwurzeln aus den drei Thetaconstanten dritter Stufe dar (s. Nr. 22). Indessen hat man diesen Weg, abgesehen von der Aufstellung einzelner Relationen, wie (63) deren einige enthält, noch nicht betreten. Nur bemerkt Frobenius (65_1), dass zu jeder der für $p = 4$ vorhandenen 255 Gruppen-Charakteristiken eine gerade Thetafunction zweiten Grades existirt, die für $u = \int_y^x du$ identisch verschwindet, und dass man, da die Glieder zweiter Dimension dieser Functionen von der Gruppen-Charakteristik unabhängig werden, aus diesen eine Relation zweiten Grades zwischen den vier Formen φ, also eine der zwei invarianten Gleichungen des algebraischen Gebildes $p = 4$ erhält.

Für den speciellen Fall von $p = 4$, dass eine gerade $\vartheta_a(u)$ für $u = 0$ verschwindet, hat, wie in Nr. 20 bemerkt, Schottky (63_1) das System der Wurzelrelationen untersucht.

Ferner hat Schottky (68) eine Discussion desjenigen algebraischen Gebildes von gewissen ∞^2 Punktetripeln einer $f_4 (p = 3)$ gegeben, welches durch Nullsetzen einer $\vartheta(u)$ entsteht, und dieses Gebilde durch eine Fläche sechster Ordnung mit sieben dreifachen Punkten dargestellt. Noch speciellere Bildungen enthalten dessen Arbeiten (74), (74_1): Ausdrücke von einfachsten Wurzelfunctionen, die zu speciellen algebraischen Curven gehören (welche einer elliptischen Curve 1-2-deutig entsprechen), in Quadratwurzeln aus elliptischen Thetafunctionen (während dagegen die Lösung der Thetarelationen für $p = 4$ in (74_1) sich auf nicht-algebraische Thetas bezieht). Auch die Arbeiten (34)—(34_{14}), besonders (34_{12}), über Punktepaare bei $p = 2$ gehören hierher. Insbesondere giebt Wirtinger

(34_{11}) eine Discussion der ∞^3 Punktetripel bei $p = 3$, indem er dieselben auf ein drei-dimensionales Gebilde von der 24sten Ordnung im Raume von sieben Dimensionen bezieht, und das Verhalten der corresidualen Gruppen von Punktquadrupeln etc. discutirt; da aber diese Untersuchung den Zweck hat, die Wurzelformen beim Umkehrproblem zu vermeiden, indem dafür Functionen jener Punktquadrupel benutzt werden, so können wir hier nicht darauf eingehen. Sie führt, von Klein's Standpunkt aus, auf eine Verallgemeinerung der Frobenius'schen Function $\varphi(u)$.

29*. Die nicht-adjungirten Berührungscurven, $m = 2$, ebenso wie die nicht-adjungirten Wurzelformen lassen sich zwar auch direct mittelst des erweiterten Umkehrproblems behandeln, wie Clebsch (9), Brill (14), Clebsch-Gordan (17) gezeigt haben (s. V, C und D); sie können aber als eine Specialisirung der adjungirten Gebilde angesehen werden. In diesem Sinne wird die Theorie von Roch (8_1) und von Humbert (61) aufgefasst, bei Weiss (72) finden sich algebraische Ausführungen. Die Relationen zwischen den nicht-adjungirten Wurzelformen sind für $p > 2$ noch nicht in Betracht gezogen worden. Zusatz.

Was die Wurzelfunctionen mten Grades für $m > 2$ angeht, so ist hinsichtlich des Falles $p = 1$, $m = 3$ auf Krazer (53_2), Schleicher (53_3), Sievert (53_4); wegen $p = 2$, $m = 3$ auf Clebsch (23), Jordan (24); wegen $p = 2$ und eines beliebigen m auf Burkhardt (69); wegen $p = 3$, $m = 4$ auf Weber (30); wegen $m = 3$ und eines beliebigen p auf v. Braunmühl (66)—(66_2); wegen eines beliebigen p und beliebigen m auf Clebsch-Gordan (17), Stahl (50) und (77), v. Braunmühl (66_3) zu verweisen.

In (27_1) hat Thomae die Wurzelfunctionen für $m = 3$ und eine hyperelliptische Riemann'sche Fläche dazu verwendet, um die dreiwertigen algebraischen Functionen s von z zu construiren, deren Verzweigungspunkte in der Z-Ebene gegebene Lagen haben.

X. Abschnitt.

Algebraische Correspondenzen und ausgezeichnete Gruppen.

Litteratur. A. Cayley.

(1) Note sur la correspondance de deux points sur une courbe. C. R. t. 62. 1866 (Collected Mathem. Papers. vol. V, No. 377).

(2) On the correspondence of two points on a curve. Proceedings of the London Mathem. Society, vol. I. 1866 (Math. Papers, VI, No. 385).

(3) Second Memoir on the curves which satisfy given conditions: the principle of correspondence. 1867, Philos. Transact., vol. 158, 1868 (Math. Papers VI, No. 407).

H. G. Zeuthen.

(4) Nouvelle démonstration de théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes. Math. Ann. III, S. 150—156: 1870.

(5) Nouvelle démonstration du principe de correspondance de Cayley et Brill, et méthode à la détermination des coïncidences de correspondances algébriques sur une courbe d'un genre quelconque. Ibd. Bd. 40, S. 99—124: 1891.

A. Brill.

(6) Ueber zwei Eliminationsprobleme aus der Theorie der Curven, welche gegebenen Bedingungen genügen. Gött. Nachr. 7. Dec. 1870.

(7) Ueber Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve. Ibd. 4. Oct. 1871.

(8) Zur Theorie der Elimination und der algebraischen Curven. Math. Ann. IV, S. 510—526, 1871.

(9) Ueber zwei Berührungsprobleme. Ibd. IV. S. 527—549, 1871.

(10) Ueber Elimination aus einem gewissen System von Gleichungen. Ibd. V, S. 378—396, 1871.

(11) Ueber Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve. Ibd. VI, S. 33—65, 1872.

A. Brill und M. Noether,

(12) Ueber die algebraischen Functionen u. s. w. Ibd. VII, S. 269—310, 1873.

A. Brill.

(13) Ueber die Correspondenzformel. Ibd. VII, S. 607—622.

(14) Ueber algebraische Correspondenzen (I. Abh.) Ibd. Bd. 31, S. 374—409.

(15) Ueber algebraische Correspondenzen. Zweite Abhandlung: Specialgruppen von Punkten einer algebraischen Curve. Ibd. Bd. 36, S. 321—360.

A. Clebsch,
(16) Vorlesungen über Geometrie, bearbeitet von F. Lindemann, I. Bd. Leipzig 1876, 1050 SS.
F. Lindemann,
(17) Extrait d'une seconde lettre, concernant l'application des intégrales abéliennes à la géométrie des courbes planes, adr. à M. Hermite. Journ. f. Math. Bd. 84, S. 300—304.
H. Schubert,
(18) Kalkül der abzählenden Geometrie. Leipzig 1879, 352 SS.
A. Hurwitz,
(19) Abhandlungen von 1886, 87 (s. unten C).
K. Bobek,
(20) Ueber das verallgemeinerte Correspondenzprincip. Sitzber. d. Wiener Akad. 1886, S. 899—911.
G. Castelnuovo,
(21) Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche. Rend. Circolo Mat. Palermo, t. III, dic. 1888.
(22) Numero degli spazi che segano più rette in un spazio ad n dimensioni. Rend. Acc. d. Lincei, agosto 1889.
(23) Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere. Ibd. Sett. 1889.

A. Das Correspondenzprincip in geometrisch-algebraischer Auffassung.

Das einfache (Chasles'sche) Correspondenzprincip.

1. Als die Anwendungen des Abel'schen Theorems auf algebraische Curven dazu geführt hatten, auf einer Curve Punktgruppen zu individualisiren und in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit zu studiren, waren es besonders die Geometer der abzählenden Richtung, die dieser Fragestellung Verständnis entgegenbrachten. Schon früher waren in dem Bemühen, die Anzahl der Curven einer einfach unendlichen Mannigfaltigkeit zu bestimmen, welche eine gegebene Curve berühren, Chasles und Jonquières darauf gekommen, jene Fälle, wo die letztere eine unicursale (rationale) Curve [vom Geschlecht null] ist, mit Hülfe eines Princips zu behandeln, das als einfaches oder rationales (Chasles'sches) Correspondenzprincip auch heute noch bei geometrischen Abzählungen eine hervorragende Rolle spielt. Entsprechen nämlich einem Punkte P einer solchen Curve vermöge einer algebraischen Beziehung α Punkte P′ derselben, umgekehrt jedem P′ β Punkte P, so schliesst man auf das Bestehen einer algebraischen Gleichung zwischen x (dem zu P gehörigen Parameter) und x′ (zu P′), die in x bis zum Grade β, in x′ bis zu α ansteigt und für $x = x'$ $\alpha + \beta$ Lösungen ergiebt, welche den „Coincidenzstellen" entsprechen.

Auf die Form der Beziehung zwischen P und P′ geht man dabei

nicht weiter ein; unter Umständen sind aber uneigentliche Lösungen, d. h. solche, welche wohl der Gleichung genügen, nicht aber dem gestellten Problem entsprechen, auszuscheiden. In der vollständigen Angabe dieser abzuzählenden Wurzeln liegt meist die eigentliche Schwierigkeit. Da eine geschichtliche Darstellung der ersten Bemühungen um dieses Princip und seine Formulirung von sachkundiger Hand existirt*), so begnügen wir uns, namentlich auch wegen des Anteils, den bezüglich der Priorität der Verwendung neben Chasles auch Jonquières beanspruchen kann, auf diese zu verweisen.

Correspondenzen auf Curven von höherem Geschlecht: Cayley.

2. Auf Curven von höherem „Geschlecht" („Deficiency", Abschn. V, Nr. 38), wo die Punkte sich nicht mehr durch einen Parameter algebraisch eindeutig charakterisiren lassen, ist die Formel für einfache Correspondenzen nicht anwendbar. Aber jene Berührungsprobleme drängten auf ein Ausfüllen dieser Lücke hin, und so stellte Cayley 1866 (1) — „tiré d'une induction, qui paraît suffisante" — für die Anzahl der Coincidenzen einer (α, β)-Correspondenz auf einer Curve f vom Geschlecht p die folgende Formel auf:

$$\alpha + \beta + 2p\gamma,$$

wo α die Anzahl der Punkte P' ist, die vermöge einer Curve, welche in P selbst γ Schnittpunkte mit f besitzt, dem Punkte P entsprechen, während dem P' β Punkte P entsprechen. Cayley beweist das Theorem in (2) für den Fall einer Curve $f(xyz) = 0$**) (die homogen machenden Variabeln z, z' werden in der Folge meistens gleich 1 angenommen) ohne Doppelpunkte, indem er die Correspondenzgleichung

$$C(xyz;\ x'y'z') = 0$$

zwischen den Coordinaten der Punkte P und P' in der Form einer homogenen Function γten Grades der Differenzen $yz' - zy'$, $zx' - xz'$, $xy' - yx'$ annimmt, und für den Uebergang zur Coincidenz den Umstand benutzt, dass, wenn

$$x : y : z = x' : y' : z'$$

(oder, wie wir auch kurz sagen werden, wenn $P = P'$) wird, jene Differenzen sich wie die ersten partiellen Differentialquotienten von f(xyz) nach x, y, z verhalten. So wird das identische Verschwinden von C umgangen. Aber in den zahlreichen Anwendungen, die Cayley anschliesst, hat die Correspondenzgleichung $C = 0$ gerade die eben angeführte Form nicht. Dieselben führen vielmehr fast alle auf „Berührungscorre-

*) C. Segre, Intorno alla storia del principio di correspondenza e dei sistemi di curve. Bibl. math. her. von Eneström, 1892.

**) Wegen der Anschreibweise s. Fussnote zu S. 405 d. Ref.

spondenzen", d. h. auf solche, für die das γ-fache Verschwinden von $C = 0$ für $P = P'$ nicht durch einen γ-fachen Punkt, wie oben angenommen, sondern nur mit Hülfe der Gleichung $f = 0$ (ein- oder mehrmal differentiirt) erfolgt, wo die „Wertigkeit" γ also von einer Berührung jener Curven ganz oder teilweise herrührt. Eben diesen Fall aber hatte Cayley als „more difficult" nicht behandelt, wie er denn auch auf Curven mit Doppelpunkten u. s. w. und auf die Annahme fester „Ausnahmepunkte", durch welche alle jene Curven gehen, nicht eingegangen ist. — Auch von anderer Seite her machte sich der Wunsch bemerklich, die offene Frage erledigt zu sehen.

Bertini und Zeuthen hatten auf Grund des einfachen Correspondenzsatzes einen Beweis der Erhaltung des Geschlechts einer Curve bei eindeutiger Transformation geliefert, den Zeuthen in (4) auf den Fall, dass sich zwei Curven vom Geschlecht p_1 und p_2 nicht 1-1-deutig, sondern mehrdeutig (x_1-x_2-deutig) entsprechen, ausdehnt. Wir haben früher (Abschn. V, Nr. 49, VI, Nr. 19) von dieser Erweiterung ausführlicher gesprochen und verweisen wegen der betreffenden Formel auf jene Stellen. Zeuthen bemerkt, dass sich seine Formel als unmittelbare Consequenz des verallgemeinerten Correspondenzprincips ableiten liesse, wenn dieses allgemein bewiesen wäre. Allerdings ginge dann ein Vorzug seines Beweises, der von einem Ausschneiden der sich entsprechenden Punkte durch Curven nicht Gebrauch macht (weil das einfache Princip dies nicht thut), verloren; dafür würden aber die zwei Formeln, die das verallgemeinerte Princip an Stelle der einen Zeuthen'schen ergäbe, mehr aussagen. Die Lücke, für welche die damaligen Mittel der abzählenden Geometrie nicht auszureichen schienen, wurde auf andere Weise ausgefüllt.

Die algebraische Formulirung der Correspondenzen auf Curven von höherem Geschlecht.

3. Seit 1870 hatte sich Brill in einer Reihe von Abhandlungen die Aufgabe gestellt, die Theorie der Berührungscurven und die der Riemann'schen Specialscharen auf eine gemeinsame algebraische Grundlage: auf genau beschriebene Eliminationsprocesse zurückzuführen. Der einfachste Fall (Curven einer ∞^2-Schar, die eine feste Curve osculiren) liess sich noch in wirklicher Darstellung mittelst Invarianten behandeln (Math. Ann. III, S. 459). Für höhere Fälle aber musste er sich mit der Aufstellung des Systems derjenigen Gleichungen, aus denen die Elimination stattzufinden hat, und der Discussion der Form der Resultante begnügen: dies reichte indessen für die Berechnung der Zahl der Lösungen hin.

Auch bei dieser Beschränkung waren zunächst zwei Vorfragen zu erledigen: Erstens war die bekannte Theorie der Elimination aus einer „Matrix", einem System von simultanen Gleichungen, welche durch das

Verschwinden der Determinanten eines Rechtecks von Elementen — mit eventuell noch nebenher zu erfüllenden Bedingungsgleichungen — gebildet werden, umzugestalten, weil für den angegebenen Zweck diejenigen Methoden nicht ausreichten, die Salmon (Higher Algebra, 4. ed. less. XIX) und Roberts (Journ. f. Math. Bd. 67) unter der Annahme entwickelt hatten, dass die Elemente der Matrix sämtlich durch homogene Functionen derselben Variabeln gebildet werden. Dies geschieht in (10): die Ausführung der dort nur angedeuteten Beweise findet man in (15). Zweitens handelte es sich um die Bildung der „reducirten Resultante“ aus einem System von algebraischen Gleichungen, die durch gewisse Lösungssysteme identisch befriedigt werden, d. h. um die Bildung eines Ausdrucks, dessen Verschwinden die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass ausser jenen Lösungen noch eine weitere gemeinsame existirt (Abh. d. Bayer. Ak. d. W. XVII, 1889). Hierbei konnte etwa die bloss systematische Formulirung eines Verfahrens zur Lösung des Problems, wie sie später Kronecker in § 10 seiner Jubiläumsschrift (Journ. f. Math. Bd. 92, S. 27) aufstellte, nicht genügen, weil die anschliessenden Abzählungen eine genaue Kenntnis des Grades sowohl der Resultante, wie der auszuscheidenden Factoren hinsichtlich der eingehenden Coordinaten verlangten.

Correspondenzcurven. Ausnahmepunkte. Wertigkeit einer Correspondenz. Zwei simultane Correspondenzen.

4. Die in 3. bezeichneten geometrischen Anwendungen führen auf die Grundaufgabe (8) (s. auch (6)), die Anzahl der Punktepaare zu finden, welche zugleich zweien Gleichungen zwischen den Coordinatenpaaren genügen, während diese eine und dieselbe Curvengleichung $f(xy) = 0$ befriedigen, also auf die Frage der Elimination aus zwei Correspondenzgleichungen zwischen zwei Punkten P und P′ einer algebraischen Curve f, „Berührungscorrespondenzen“ (s. oben) mit einbegriffen. Es ist dabei der allgemeine Fall zu berücksichtigen, dass die „Correspondenzcurven“, welche den Punkten P und P′ entsprechen (deren Gleichung $C(xy; x'y') = 0$ ist, wo dann einmal die Coordinaten x, y von P, das anderemal die x′, y′ von P′ als fest angenommen werden) noch durch feste „Ausnahmepunkte“ der Curve f gehen, die in einfachen oder auch singulären Stellen der Curve auftreten können, deren Anzahl aber in den Zahlen α, β nicht einbegriffen ist. Der Umstand, dass die Vielfachheit des Schnittpunktes, den je die Correspondenzcurve in P, bezw. in P′ besitzt, denselben Wert hat, begründet den Begriff der „Wertigkeit“, ausgedrückt durch jene Zahl γ, für alle Fälle. Eine Correspondenz ist somit im allgemeinen durch die Zahlen α, β, γ charakterisirt. Durch Betrachtungen, die wir hier übergehen, führt Brill die Berechnung der simultanen Lösungen beider Correspondenzen zurück auf diejenige der

Coincidenzstellen von einer der beiden. Vergleicht man ((7). (11)) die zwei verschiedenen Ausdrücke, die man für jene Lösungen erhält, so ergiebt sich von selbst die Anzahl dieser Coincidenzen und damit ungesucht jene Formel, die, formal ebenso lautend, bereits Cayley aufgestellt hatte. Mit ihrer Hülfe wiederum erhält man die gewünschte Anzahl der Punktepaare, die auf einer Curve vom Geschlecht p den Correspondenzen $(\alpha\beta)_\gamma$, $(\alpha'\beta')_{\gamma'}$ zugleich genügen, ausgedrückt durch:

$$\alpha\beta'+\beta\alpha'-2p\gamma\gamma'.$$

5. Es muss hier auf den wesentlichen Unterschied in der Bedeutung hingewiesen werden, den dieselbe Formel:

Projective Auffassung der Correspondenzen und Standpunkt der rationalen Transformation.

$$C=\alpha+\beta+2p\gamma$$

bei Cayley und bei Brill besitzt. Ebenso wie die Ausgangsprobleme, durch welche beide Autoren auf die Formel geführt werden, eine innere Verschiedenheit darin zeigen, dass Cayley nur projectiv invariante Berührungs-Aufgaben, Brill aber auch Probleme im Auge hat, die, wie das der Specialgruppen einer Curve, gegenüber eindeutiger Transformation invariant sind, so sind auch die Zahlen α, β, γ, p bei Cayley invariant in dem einen, bei Brill in dem anderen Sinne. Die von Brill eingeführten Ausnahmepunkte ändern sich zwar in Lage und Zahl bei eindeutiger Transformation. Aber eben deshalb ist ihr Auftreten unvermeidlich, wenn man (statt an die transcendente) an die algebraische Darstellung der Correspondenzen (durch Gleichungen zwischen zwei Variabelnpaaren) anknüpft; ähnlich wie etwa Spitzen und Doppelpunkte durch die dualistische (reciproke) Transformation einer Curve hereingebracht werden. Die eindeutigen Transformationen führen also die Ausnahmepunkte zwar ein, sie zeigen aber auch, wie man sie bezüglich der Coincidenzen aufzufassen hat. Demnach hat die Berücksichtigung dieser Punkte, ebenso wie die Annahme in Bezug auf die Wertigkeit γ und die in Bezug auf die Geschlechtszahl p, nicht etwa die Bedeutung, dass die Cayley'sche Formel auf etwas allgemeinere Fälle ausgedehnt wird, sondern diese Annahmen machen die Formel erst zu dem, was sie sein musste, wenn sie auf jene Aufgaben anwendbar sein sollte (was aber Cayley aus ihr zu machen gar nicht beabsichtigt hat): zu einer rational-invarianten Formel, die dann freilich damit von selbst auch linear-invariant ist. Dasselbe gilt von jener anderen auf zwei Correspondenzen bezüglichen Formel, die oben angegeben ist.

Diese letztere reicht bereits hin, um das Problem der Berührungscurven zu einer gegebenen ganz allgemein zu lösen ((11). S. 46 ff.). Das Problem der ausgezeichneten Punktgruppen jedoch verlangt auch die

Ermittlung der Punktetripel, die zugleich dreien Correspondenzen, der Quadrupel, die vieren genügen, u. s. w. Man findet das Gleichungssystem, auf das diese Aufgabe führt, die Discussion der Resultante und die Formeln, welche die Anzahlbestimmung leisten, in der zweiten Abteilung von (11), und weiterhin angewandt auf die Berechnung der Zahl der Specialscharen $g^{(1)}_{\frac{1}{2}p+1}$ und $g^{(1)}_{\frac{1}{2}(p+3)}$ in den Fällen von kleinem p.

Zusammengesetzte Correspondenzen, negative Wertigkeit.

6. Ist der in Nr. 4 besprochene Beweis rein algebraisch, so wird in dem Aufsatz „Ueber die Correspondenzformel" (13) der Grundgedanke von (11) in geometrischer Form vorgetragen und zugleich dem Beweise einer anderen Formel zu Grunde gelegt, die bereits Cayley in (2), (3) ausgesprochen und durch zahlreiche Anwendungen fruchtbar gemacht hatte. Offenbar durch das Beispiel der berührenden Curven war Cayley auf die Existenz von „zusammengesetzten" Correspondenzen aufmerksam geworden, vermöge deren einem Punkt einer Curve f andere solche von verschiedenem Charakter entsprechen. So correspondiren vermöge des Büschels von Tangenten, die von einem beliebigen Punkte P von f ausgehen, diesem P 1) die Berührungspunkte P′, 2) die anderen Schnittpunkte P″ der Tangenten. Fasst man hier nur die Coincidenzen (PP″) der P″ mit P ins Auge, so erhält man deren Anzahl, indem man von der aller Coincidenzen (P, P′+P″), die überhaupt stattfinden, diejenige der (PP′) abzieht. Auf die letzten beiden Correspondenzen ist aber einzeln die bekannte Formel anwendbar, formal also auch noch auf die (PP″); nur liegt auf der Hand, dass hier die „Wertigkeit" γ unter Umständen negativ ausfällt. Diese „zusammengesetzten" Correspondenzen sind, wie jenes Beispiel zeigt und Lindemann ((16) S. 747) allgemein hervorhebt, als Quotienten von gewöhnlichen solchen (mit positiver Wertigkeit) darstellbar (wo dann allerdings der Quotient nicht ausführbar ist), und man kann von ihnen als von Correspondenzen „mit negativer Wertigkeit" sprechen, ein Ausdruck, den später Hurwitz explicit eingeführt hat, der aber begrifflich bereits Cayley und Brill bekannt war. — Namentlich wird in (13) mit Hülfe solcher zusammengesetzten Correspondenzen mit mehrwertigen Punkten die Formel $\alpha\beta'+\beta\alpha'-2p\gamma\gamma'$ für zwei simultane Correspondenzen noch einmal bewiesen. Brill untersucht dort auch die Gleichung der „Coincidenzcurve", d. h. derjenigen Curve, die f in den Coincidenzstellen trifft, und ihr Verhalten in den singulären Punkten und den festen Ausnahmepunkten der Correspondenzcurven (s. oben) auf f.

6. Das Werk (16) von Clebsch-Lindemann über Geometrie, das hinsichtlich der hier einschlägigen Partien von dem Herausgeber allein verfasst ist, schliesst zwar im wesentlichen an die Darstellung von Brill an,

enthält jedoch im einzelnen bemerkenswerte Modificationen. In der vierten Abteilung (S. 471 ff.) findet sich eine Gleichungsform derjenigen Correspondenz, welche zwischen dem Berührungspunkte P γter Ordnung (einer in $\gamma+1$ consecutiven Punkten treffenden Curve) und den übrigen Schnittpunkten P′ einer Curve besteht, die aus einer adjungirten $\infty^{\gamma+1}$-Schar durch die Bedingung ausgeschieden wird, mit der gegebenen Curve in P eine Berührung γter Ordnung einzugehen. Die linke Seite der Correspondenzgleichung lässt sich in diesem Falle als bilineare Form von Functionen der Coordinaten je bloss von P und P′ darstellen, eine Darstellungsform, die später Hurwitz auf alle positiv-wertigen Correspondenzen ausgedehnt hat.

Lindemann's transcendente Formulirung der Correspondenzgleichung.

7. Der Umstand, dass der in Nr. 4 erwähnte Beweis des erweiterten Correspondenzprincips seiner Natur und Entstehung nach ein indirecter war, machte einen anderen wünschenswert, der jene zweite für den vorliegenden Zweck unwesentliche Correspondenz nicht benutzte.

Lindemann wählte in dieser Absicht (17) zum Ausgangspunkte Riemann's Darstellung der algebraischen Functionen durch Summen von Abel'schen Integralen zweiter Gattung, indem er der Correspondenz die Form gab:

$$C(xy;\, x'y') \equiv \Phi_0(xy)\Psi_0(x'y') + \Phi_1(xy)\Psi_1(x'y') + \cdots$$
$$+ \Phi_q(xy)\Psi_q(x'y') = 0,$$

wo die $\Phi(xy)$ Integrale zweiter Gattung sind, die $\Psi(x'y')$ sich aus eben solchen vermöge der Forderung, dass γ die Wertigkeit sei, zusammensetzen. Das Ergebnis bestätigt zwar die Correspondenzformel, liefert sie jedoch nicht in ihrer allgemeinen Gestalt, da sich β als abhängig von α und γ erweist. In der That ist die erhaltene Formel nur diejenige für eine von Lindemann selbst in (16) aufgestellte Berührungscorrespondenz, auf welche er durch zu specielle Annahmen über die Ψ (die teilweise noch willkürlich sind) gekommen war.

Die transcendente Formulirung, die Lindemann dem Problem der Correspondenzen gegeben hatte, war ein Schritt in einer Richtung, die weiteren Erfolg verhiess. Denn wenn man eine Correspondenz in transcendenter Darstellung definirt, so kommen jene accessorischen Eigenschaften, welche der algebraischen und einer strengen geometrischen Behandlung, die an eine vorgelegte Curve anschliessen, Schwierigkeiten bereiten, wie das Verhalten an der Stelle $(xy) = (x'y')$ — ob Berührung oder vielfacher Punkt —, ferner das in den Ausnahme- und singulären Punkten der zu Grunde gelegten Gleichung nicht in Betracht, weil die transcendente Auffassung mit den Null- und Unendlichkeitspunkten als solchen operirt, während die geometrisch-algebraische nur vollständige

Schnittpunktsysteme abzählen kann, zu denen sich die gesuchten Gruppen mit festen Punkten vereinigen, ohne die sie nicht darstellbar sind.

Indessen hat man das Verfahren von Lindemann nicht weiter ausgebildet, nicht einmal seinen Beweis auf den allgemeinen Fall übertragen. Die transcendenten Methoden ermangeln überhaupt noch jener Geschmeidigkeit, welche die geometrisch-algebraischen besonders für Abzählungen besitzen. — Eine ganz andere transcendente Behandlung der Correspondenz auf der Riemann'schen Fläche, ebenfalls mit Hülfsmitteln, die Riemann für die Darstellung der algebraischen Functionen flüssig gemacht hat, hat Hurwitz erfolgreich aufgegriffen. Von diesen Untersuchungen hätten wir nunmehr der zeitlichen Folge nach zu berichten.

Wir verschieben dies jedoch auf den Schluss dieses Abschnitts, um zunächst von einigen Arbeiten zu reden, die auf algebraischem bezw. geometrischem Wege zu befriedigenden directen Beweisen der Correspondenzformel gelangt sind, welche jene erschwerenden Verhältnisse erfolgreich bewältigen.

Geometrische Beweise der Correspondenzformel.

8. Zuvor gedenken wir noch eines rein geometrischen Beweises, den Schubert (18) § 18 S. 86 auf Grund des Princips von der Erhaltung der Anzahl, insbesondere der bekannten Charakteristikenformel giebt. Schubert beschränkt sich aber, wie schon Cayley, auf den einfachen Fall, dass die Wertigkeit durch einen vielfachen Punkt der Correspondenzcurven hergestellt wird, und nimmt an, dass die letzteren durch feste Punkte der Grundcurve nicht hindurch gehen.

Diese Voraussetzungen lässt Bobek in (20) (1886) fallen. Er stützt sich allerdings zunächst auf den von ihm mit algebraischen Hülfsmitteln begründeten Sonderfall, dass die Wertigkeit null ist, indem er die Klasse der von den Verbindungslinien entsprechender Punkte P, P′ eingehüllten Curve bestimmt. Diese Curve besitzt die Grundcurve als mehrfachen Bestandteil. Verbindet man andererseits die Punkte P, P′ mit einem festen Punkte der Ebene, so gehören zu den Coincidenzstrahlen dieser (gewöhnlichen) Correspondenz die Tangenten an jene Enveloppe und die Geraden nach den Coincidenzpunkten: man erhält somit eine Beziehung, aus der sich die Anzahl der letzteren bestimmt, und die auch die Berührungscorrespondenzen mit umfasst. — Den Einfluss von Rückkehrpunkten auf die Grundcurve bestimmt Bobek, wie üblich, durch Anwendung quadratischer Transformationen, die den Rückkehrpunkt auflösen.

Directer algebraischer Beweis.

9. Wiederum mit algebraischen Hülfsmitteln operirt der Beweis, den Brill in (14) auf Grund einer Normirung der Correspondenzgleichung $C(xyz; x'y'z') = 0$ liefert. Schliesst man zunächst Berührungs-

correspondenzen aus, nimmt also, wenn γ die Wertigkeit ist, an, dass C nebst allen partiellen Differentialquotienten nach x, y, z bis zu den $(\gamma-1)$ten inclusive identisch verschwindet, wenn $x:y:z = x':y':z'$ wird, so lässt sich zeigen, dass C in die Gestalt einer homogenen Function γter Dimension der Grössen:

$$u = yz' - zy', \quad v = zx' - xz', \quad w = xy' - yx'$$

gebracht werden kann, deren Coefficienten Functionen von x, y, z; x', y', z' bezw. bloss noch von den Graden $b-\gamma$, $b'-\gamma$ sind, wenn C von den Graden b, b' in diesen Variabeln ist. Von dieser übrigens keineswegs selbstverständlichen Darstellung geht auch Cayley in (2) aus (s. oben Nr. 2); weil er aber auf das Verhalten der Coincidenzcurve (der Curve, welche die Grundcurve f in den Coincidenzpunkten trifft) in den „Ausnahmepunkten" von f nicht eingeht, macht er nicht von dem Umstande Gebrauch, dass die äussere Form jener Darstellung noch auf mannigfache Weise durch Addition der Identitäten $ux + vy + wz = 0$ und $ux' + vy' + wz' = 0$ abgeändert werden kann. Namentlich kann dies in der Weise geschehen, dass aus dem Verhalten der normirten Form C hinsichtlich einer einzelnen Variabeln z, bezw. z', das Verhalten der Coincidenzcurve (die man erhält, wenn man in jener Form $u:v:w = f'(x):f'(y):f'(z)$ setzt und zugleich x, y, z mit x', y', z' zusammenfallen lässt) in einem in den Punkt $x = y = 0$ fallenden „Ausnahmepunkt" discutirt werden kann.

Dies wird zunächst für das hier nicht weiter in Betracht kommende Problem gezeigt, dass zwei Correspondenzen zwischen Punktepaaren der Ebene bestehen, und man die Coincidenzcurve sucht; dann aber auf die Bildung der Coincidenzcurve für eine einzelne Correspondenz zwischen zwei Punkten einer Curve f angewendet, wo sich dann die eigentliche Schwierigkeit beim Beweise der Correspondenzformel, die Discussion des Verhaltens der Ausnahmepunkte, mit Hülfe der Normirung bequem erledigt. Die Berücksichtigung dieser Punkte ist für den gegenüber eindeutiger Transformation invarianten Charakter der Correspondenzformel von Bedeutung, worüber schon (Nr. 4) berichtet worden ist. Es mag hier noch hervorgehoben werden, dass jenes Problem der Ebene einen wesentlich anderen Charakter besitzt, wie die auf eine Grundcurve bezogenen Correspondenzen: die Formeln der ersteren sind invariant gegenüber 1-1-deutigen Transformationen der Ebene, letztere nur gegenüber solchen der Grundcurve allein. Deshalb ist der Begriff der Wertigkeit γ im letzteren Falle unabhängig davon, ob γ durch Berührung oder durch Vielfachheit des Punktes $(xy) = (x'y')$ der Correspondenzcurven definirt wird, und man kann durch Adjunction der Gleichung

der Grundcurve das eine von diesen Vorkommnissen auf das andere zurückführen, indem man zu den vorhandenen nötigenfalls noch weitere feste Ausnahmepunkte der Correspondenzcurven hinzufügt. Hierauf beruht die Ausdehnung der Correspondenzformel auf den Fall der Berührungscorrespondenzen. Brill führt sie in § 12 (14) auf den früher behandelten zurück, indem er mit Hülfe von f die mit einem Factor multiplicirte Correspondenzgleichung in eine andere umformt, deren Correspondenzcurven f nicht mehr berühren. — Die Correspondenzen mit negativer Wertigkeit erledigen sich im Sinne der früher besprochenen Auffassung (Nr. 6).

Zeuthen's Beweise.

10. Zeuthen schlägt in der Abhandlung (5), die auf rein geometrischer Grundlage beruht, zwei verschiedene Wege ein, um zu einer Formulirung des Correspondenzbegriffes für eine Curve von allgemeinem Geschlecht und zu Abzählungen zu gelangen. Nur der erste Weg, der von dem einfachen (Chasles'schen) Correspondenzprincip ausgeht, liefert einen alle Fälle umfassenden Beweis der Formel. Der zweite, auf das Princip der Erhaltung der Anzahl gegründet, führt zwar nicht in allen Fällen zu einem befriedigenden Beweise, entwickelt dafür aber tiefer gelegene Hülfsmittel und hat den Vorzug, durch Umkehrung der Fragestellung auch solche Correspondenzen, für welche die Wertigkeit nicht bekannt oder negativ ist, der Abzählung zugänglich zu machen.

Zeuthen bestimmt zunächst (§ II) den Ort der Schnittpunkte, welche die Tangente in einem Punkte P von f mit der dem Punkte P entsprechenden Correspondenzcurve (die vorerst f nicht berühren soll) besitzt. Zwischen P und diesen Schnittpunkten besteht eine Correspondenz, die sich durch Projection von einem Punkte der Ebene aus auf eine gewöhnliche zurückführen lässt. Unter den Coincidenzstrahlen befinden sich diejenigen nach den gesuchten Coincidenzpunkten, und ihre Abzählung liefert somit nach Abzug gewisser uneigentlicher Lösungen die allgemeine Formel. Der Einfluss singulärer Punkte wird durch die Bemerkung, dass in der Nähe eines solchen die Curve sich wie eine unicursale verhält, auf die Untersuchung dieser Curven zurückgeführt (§ I). Im Falle einer Berührungscorrespondenz fügt Zeuthen (§ II) zu den beweglichen Schnittpunkten der Correspondenzcurven die einer festen Curve mit f hinzu und setzt, algebraisch ausgedrückt, statt des Products eine lineare Combination desselben mit f, welche, als Curve aufgefasst, in $P = P'$ mit f keine Berührung mehr eingeht. Dass hierbei feste Ausnahmepunkte der Correspondenzcurven hereinkommen, stört nicht, nachdem dieselben bei der Untersuchung an unicursalen Curven sich als irrelevant erwiesen haben.

Der zweite Beweis, den Zeuthen giebt (§ III), beruht auf einem Process, der auch als ein charakteristisches Beispiel zu dem Princip der Erhaltung der Anzahl Beachtung verdient. Zeuthen denkt sich die gegebene Curve vom Geschlecht p als Glied einer Familie von Curven mit genügender Anzahl von willkürlichen Parametern, welche sämtlich Träger derselben Correspondenz („sans abandonner les conditions imposées à la correspondance") sind, so dass die Zahlen α, β, γ sich von Curve zu Curve nicht ändern, wenn sich die Zahl und Art der singulären Punkte nicht ändert. Unter diesen Curven befinde sich nun auch eine unicursale Curve, also eine solche, die p Doppelpunkte mehr als f hat. Zeuthen untersucht den Einfluss, den das Auftreten der weiteren p Doppelpunkte auf die Zahlen α, β, γ oder vielmehr auf α, β und die Zahl C der Coincidenzen ausübt, indem er γ durch die Gleichung:

$$C = \alpha + \beta + 2p\gamma$$

als „Wertigkeit" definirt. Man sieht, dass hierdurch die Correspondenzen mit negativer Wertigkeit, bei welchen die einem Punkt entsprechenden Punkte nicht durch Curven ausgeschnitten werden, einbegriffen werden. Weil für die unicursale Curve $\gamma = 0$ ist, so berechnet sich allgemein der Wert von γ aus den Zuwächsen der Zahlen α, β, C, die das Auftreten von p neuen Doppelpunkten, durch welche die Correspondenzcurven nicht hindurchgehen, mit sich bringt.

Diese Methode wendet Zeuthen auf einige Sonderfälle an, so namentlich auf den Fall einer „zusammengesetzten" (s. Nr. 6) Correspondenz (mit verschiedenwertigen Punkten), wo nämlich einem Punkte P eine Anzahl von Punkten P′ und jedem P′ wiederum Punkte P″ entsprechen. Er findet so, dass die Wertigkeit der Correspondenz (P P″) gleich der negativen Wertigkeit der beliebigen Correspondenz (P P′) ist, wenn die Correspondenz (P′P″) eine Schnittpunktcorrespondenz ist. Ueberhaupt lässt sich die Correspondenzformel für den Fall der letzteren auf diesem Wege beweisen; nur Berührungscorrespondenzen mit höherer Berührung bleiben ausgeschlossen, weil in diesem Falle die Berechnung des Verlustes an Coincidenzen beim Auftreten eines neuen Doppelpunktes Schwierigkeiten bereitet.

11. Für das hier besprochene verallgemeinerte Correspondenzprincip und die Coincidenzformeln für zwei und mehrere Correspondenzen fanden die Geometer bei ihren Untersuchungen zunächst wenig Verwendung. Als aber unerwarteter Weise in einem fernab liegenden Gebiet, der Theorie der Modulfunctionen, diese Correspondenzen eine Rolle zu spielen begannen, veranlasste das steigende Interesse an der Sache die Concurrenz

Rückblick auf die geometrischen und algebraischen Beweise der Correspondenzformel.

Concurrenz verschiedener Wissenszweige zu dem Zweck, einen durchaus befriedigenden Beweis der Correspondenzformel zu liefern.

Wir werden unten von der Darstellung algebraischer Correspondenzen und ihrer Coincidenzen durch Θ-Quotienten zu berichten und gewisse Vorzüge anzuerkennen haben, welche diese Beweisführung besitzt gegenüber der algebraischen und geometrischen, denen beiden, auch in der zuletzt besprochenen Gruppe von Arbeiten, eine gewisse Umständlichkeit, die von der sorgfältigen Berücksichtigung aller möglichen Sonderfälle herrührt, nicht abzusprechen ist. Es liegt dies eben in der Natur dieser Auffassung, die im wesentlichen auf Eliminationsprocessen beruht. Die Resultante aus einem System von algebraischen Gleichungen ergiebt alle Lösungen zugleich, auch die nicht gewünschten, und erheischt die nachmalige, oft mühsame Ausscheidung der letzteren.

Die grössere Beweglichkeit und Vielseitigkeit jedoch, die den erwähnten Fragen gegenüber, wenigstens zur Zeit noch, Geometrie und Algebra vor der Functionentheorie voraus haben, sichert ihnen zunächst manches Resultat, dessen Bestätigung auf dem anderen Wege einstweilen aussteht. Dazu gehören vor allem jene Coincidenzformeln für mehr als zwei Correspondenzen, sodann ihre Anwendung auf die Theorie der Specialgruppen. Da man die ausgezeichneten Gruppen wesentlich mit den algebraischen Hülfsmitteln der Correspondenztheorie ermittelt, so schliessen wir ihre Besprechung gleich an.

B. Problem der ausgezeichneten Gruppen und Specialgruppen.

Bezeichnungen.

12. Die Frage (V. Nr. 51, 61) nach den Specialscharen

$$G_Q^{(q)}, \text{ wo } Q-q = p-1-r \ (r \geqq 0) \text{ ist,}$$

einer Curve f mit allgemeinen Moduln haben Brill-Noether auf die Aufgabe zurückgeführt, für die Schar der φ-Curven Q Basispunkte auf der Curve f so zu bestimmen, dass jede φ-Curve, die durch $Q-q$ derselben geht, von selbst auch die q übrigen Basispunkte enthält. Sind

$$Q-q(r+1) = q+\tau$$

dieser Basispunkte gegeben, so sind die übrigen $Q-(q+\tau)$, wenn $r \geqq 0$ ist, endlich vieldeutig auf algebraische Weise durch jene bestimmt; sie bilden eine irrationale discrete Mannigfaltigkeit von Gruppen $\Gamma^{(\tau)}_{Q-q-\tau}$, deren Vieldeutigkeit aufzusuchen das „Problem der Specialgruppen“ ausmacht.

Vermöge der Reciprocität zwischen Specialgruppen (V. Nr. 58), die nach dem Riemann-Roch'schen Satze besteht, entspricht jeder Lösung des Problems der Specialgruppen $G_Q^{(q)}$ (genauer: der Specialscharen $g_Q^{(q)}$) eine solche des Problems $G_R^{(r)}$, wo $Q+R=2p-2$, $Q-R=2(q-r)$ ist (wie von Brill-Noether Math.-Ann. VII, § 9 gezeigt wird). Diese Bemerkung bildet ein wichtiges Hülfsmittel, um schwierigere Probleme dieser Art auf leichtere zurückzuführen (vergl. (15), S. 325), so insbesondere die Aufsuchung der Gruppen

$G_R^{(r)}$ (für $R=\frac{1}{2}(3p-6)$, bezw. $\frac{1}{2}(3p-7)$, $r=\frac{1}{2}p-1$, bezw. $\frac{1}{2}(p-3)$) auf die der Gruppen G_Q^{1} (für $Q=\frac{1}{2}p+1$ bezw. $\frac{1}{2}(p+3)$).

Man kann diese Probleme dahin erweitern: Man soll aus einer Voll-, bezw. einer Teilschar von φ-Curven (einer linearen Schar, welche durch irgend welche von der Grundcurve selbst ihr auferlegte oder durch fremde Bedingungen (wie die, durch feste Punkte der Ebene zu gehen, die nicht auf der Grundcurve liegen) aus einer Vollschar von φ-Curven ausgeschieden ist) oder allgemeiner: man soll aus irgend einer linearen Voll-, bezw. Teilschar von Curven beliebiger Ordnung durch Annahme von Basispunkten auf der Curve f eine (kleinere) Teilschar aussondern, derart dass von diesen Basispunkten ein Teil durch die übrigen mitbestimmt ist. Gruppen Γ_A von dieser Art von Basispunkten, welche also einer gegebenen Linearschar von Curven weniger Bestimmungsstücke entziehen, als die Anzahl A ihrer Punkte beträgt, haben wir schon früher (V. Nr. 51, Nr. 61) in Betracht gezogen; wir haben sie dort ausgezeichnete Gruppen genannt, weil sie durch die erwähnte Bedingung gegenüber den von der gegebenen Teil- oder Vollcurvenschar überhaupt ausgeschnittenen Punktgruppen $G_M^{(m)}$ ausgezeichnet sind. Daher wird der Grad der algebraischen Gleichung, von deren Lösung sie abhängen, ausser der A noch die Zahlen M und m enthalten.

Die Aufsuchung dieser Gleichung und ihre Discussion nennen wir das „Problem der ausgezeichneten (eigentlich relativ ausgezeichneten) Gruppen". Es geht in das Problem der Specialgruppen über, wenn die Gruppenschar $g_M^{(m)}$, in Bezug auf welche die Auszeichnung stattfindet, durch φ-Curven ausgeschnitten werden kann.

Zu den ausgezeichneten Gruppen der allgemeineren Art gehören die in den vielfachen Punkten einer ebenen Curve vereinigten Punkte (welche ausgezeichnet sind in Bezug auf jede Schar von Schnittpunktgruppen, die irgend eine nicht-adjungirte Curvenschar ausschneidet);

ebenso die Punktepaare, in welchen eine Raumcurve von denjenigen Sehnen getroffen wird, die durch einen gegebenen Raumpunkt gehen, sie sind ausgezeichnet in Bezug auf die Schnittpunktgruppen der durch diesen Raumpunkt gehenden Ebenen; ferner ihre vierfach schneidenden Sehnen, ausgezeichnet in Bezug auf die Schnittpunktgruppen aller Ebenen, u. s. w.

Auch die Curven der gegebenen Teil- oder Vollschar, welche durch eine der ausgezeichneten Gruppen $\Gamma_A^{(0)}$ hindurchgehen, sind ausgezeichnet vor der Gesamtheit der Curven der Teilschar. Ebenso sind es auch die Gruppenscharen, welche sie auf der Grundcurve ausschneiden, gegenüber der Gesamtheit der Teil- oder Vollscharen, die wir oben mit $g_M^{(m)}$ bezeichnet haben: wir wollen sie („relativ" gegenüber einer ausgezeichneten Gruppe $\Gamma_A^{(0)}$) ausgezeichnete Scharen der Teilschar $g_M^{(m)}$ auf der gegebenen Curve nennen.

Solche relativ ausgezeichnete Scharen sind also z. B. die Geraden, die durch einen Doppelpunkt einer ebenen Curve gehen, bezw. ihre Schnittpunkte; die Punkte, welche das Ebenenbüschel ausschneidet, das durch die Sehne einer Raumcurve geht u. s. w.

Abzählung an der ebenen Curve auf geometrischer Grundlage.

13. Mit diesen Bezeichnungen wenden wir uns nun zum Referat über die Specialgruppen selbst. Indem wir mit dem zweiten Teil der früher besprochenen Zeuthen'schen Arbeit beginnen, verlassen wir wiederum die zeitliche Reihenfolge, um die Continuität der bei den Beweisen benutzten Hülfsmittel nicht zu unterbrechen, welche Zeuthen von seinen Correspondenzuntersuchungen auf die hier zu besprechenden Abzählungen direct überträgt. Zeuthen bestimmt in (5) § 4 die (endliche) Anzahl der ausgezeichneten Gruppen von $i+1$ Punkten auf einer Curve vom Geschlecht p, welche die Eigenschaft haben, dass alle Curven einer adjungirten linearen Schar (mit 2i willkürlichen Parametern und $m+i+1$ beweglichen Schnittpunkten), welche durch i Punkte der Gruppe gehen, hiermit von selbst auch den $(i+1)$ten enthalten. Diese Aufgabe, deren algebraische Behandlung, wie wir sehen werden, einen ziemlichen Aufwand von Hülfsmitteln erfordert, behandelt Zeuthen, allerdings gestützt auf das Princip von der Erhaltung der Anzahl, mit rein geometrischen Mitteln auf engem Raume. Sei $\xi(p, m, i)$ die gesuchte Zahl. Der Fall $\xi(p, m, 1)$ lässt sich leicht direct erledigen vermöge einer Correspondenz mit negativer Wertigkeit [oder durch eine eindeutige Transformation, Brill-Noether, Math. Ann. VII, welche die Doppelpunkte der transformirten Curve auflöst]. Auf ihn gestützt, leitet Zeuthen die allgemeine Formel ab mit Hülfe einer Recursionsformel, welche er erhält,

indem er auf einer unicursalen Curve f_0, die aus der gegebenen f durch Zufügen von p weiteren Doppelpunkten (s. oben Nr. 10) hervorgeht, eine gewisse Correspondenz betrachtet, und von ihren Coincidenzen denjenigen Teil berechnet, welcher nicht von dem Auftreten dieser neuen Doppelpunkte herrührt. Nimmt man nämlich die $\xi(p, m-1, i-1)$ Lösungen des nächst niederen Falles für f auch für f_0 als bekannt an, so lässt sich mittelst irgend einer ausgezeichneten Gruppe (dieses Falles) von Punkten $Z_1, Z_2, \ldots, Z_i$, die zu einem beweglichen Punkte X und irgend einem festen Punkte A von f_0 gefunden werden kann, aus der ∞^{2i}-Schar von Curven ster Ordnung C_s eine ∞^{i-1}-Schar ausscheiden. Lässt man andererseits durch dieselben $Z_1, \ldots, Z_i$ und i feste Punkte $B_1, \ldots, B_i$ eine C_s gehen, die noch in $\sigma = m-i+1$ Punkten Y schneidet, so entsprechen dem vorher angenommenen X (bei festem A) $\sigma \cdot \xi(p, m-1, i-1)$ dieser Punkte. Fällt nun einmal ein solcher Punkt Y in X, so wird dieser Punkt — von gewissen Ausnahmelagen abgesehen — zusammen mit $Z_1, \ldots, Z_i$ eine Gruppe von $i+1$ Punkten der gesuchten Art bilden, durch die noch eine ∞^i-Schar von C_s geht, weil von den Restpunkten die $i+1$ Punkte $A, B_1, \ldots, B_i$ noch beliebig angenommen sind. Man braucht indessen nicht einmal die Anzahl der einem Y entsprechenden Punkte X zu bestimmen, weil dieselbe sich heraushebt, wenn man jene Ausnahmestellen abzählt. Berücksichtigt man noch den Einfluss der zugetretenen p Doppelpunkte, so ist das Ergebnis eine Reductionsformel, vermittelst deren $\xi(p, m, i)$ auf die Zahlen $\xi(p, m-1, i-1)$ und $\xi(p-1, m-2, i-1)$ zurückgeführt wird.

Diese Lösung von Zeuthen beruht also wiederum auf dem Gedanken, das Problem auf eine unicursale Curve zu übertragen und diejenigen Lösungen zu bestimmen, die bei dem Uebergange zu der Curve mit weniger Doppelpunkten verloren gehen.

Abzählung an Curven in höheren Räumen.

14. Von dieser Darstellung gänzlich verschieden in der Form, aber innerlich ihr nahe verwandt ist diejenige von Castelnuovo in (23), der, indem er direct Specialgruppen sucht, ein in einer Hinsicht allgemeineres, in der anderen specielleres Problem wie Zeuthen (und Brill) behandelt.

Die Besprechung knüpfen wir an die früher (V. Nr. 51) erwähnte Interpretation von Curvenscharen und ihrem Verhalten zur Grundcurve f in höheren Räumen an. Es wurde dort ausgeführt, dass die Mannigfaltigkeit einer linearen ∞^r-Schar von Curven $\psi(xy) = 0$, die zu f adjungirt sind, zu einer Curve von gleichem Geschlecht p in einem r-fach unendlichen Raume [r] Veranlassung giebt, wenn man die homogenen Coor-

dinaten desselben $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{r+1}$ den Functionen ψ proportional setzt*):

$$\xi_1 : \xi_2 : \cdots : \xi_{r+1} = \psi_1(xy) : \psi_2(xy) : \cdots : \psi_{r+1}(xy),$$

während daneben die Gleichung $f(xy) = 0$ besteht. Der ebenen Curve f entspricht alsdann die Raumcurve, deren Coordinaten die ξ sind, im allgemeinen eindeutig Punkt für Punkt. Bei einer solchen Transformation gehen nun die in Bezug auf die Schar der ψ ausgezeichneten Gruppen der ebenen Curve in die Schnittpunkte ebener Räume (Geraden, Ebenen, ..., [r—2]) über, welche die Raumcurve in mehr Punkten treffen, als zu ihrer eindeutigen Bestimmung nötig sind. — Ein hierher gehöriges Beispiel wurde schon früher besprochen (V, Nr. 49). Es handelte sich um die Interpretation der Specialscharen $g_6^{(2)}$ einer ebenen Curve vom Geschlecht 6, oder vielmehr gewisser Gruppen $G_4^{(0)}$, die durch Annahme von zwei festen Punkten aus ihnen ausgesondert werden, und in welchen eine Raumcurve achter Ordnung, die jener ebenen Curve entspricht, von ihren vierfach schneidenden Sehnen getroffen wird, während die zugehörige Schar $g_4^{(1)}$ in die beweglichen Schnittpunkte des Ebenenbüschels, das eine solche Gerade zur Axe hat, übergeht. Diese Auffassung ist es, die Castelnuovo in principieller Weise für die Abzählung von Specialscharen verwertet. Er stellt sich in der Arbeit (23) die Aufgabe, alle auf einer Curve existirenden Specialscharen $g_Q^{(q)}$ (vgl. Nr. 12) abzuzählen, während man bis dahin nur die Anzahl der Scharen $g_Q^{(1)}$ und der ihnen nach dem Riemann-Roch'schen Satz ent-

*) Man schreibt die früheste Verwendung der ebenen Scharen für die Erzeugung von Curven in höheren Räumen mit Unrecht Clifford's Abhandlung „On classification of loci" (Phil. Tr. 1878 und Proc. Lond. Math. Soc. Nr. 187, Papers S. 305) zu. Der erste, der die Coefficienten der Gleichung einer Curve als Coordinaten in einem höheren Raume gedeutet hat, war Cayley (On the curves which satisfy given conditions, § 1, Phil. Tr. 158, 1867 und A memoir on abstract geometry, ibd. 160, 1869). Aber die Fragen, die Cayley anschliessend beantwortet, sind von den obigen durchaus verschieden. Eine ebene Curve mit Hülfe linearer Scharen in eine Curve im höheren Raume überzuführen unternahm zuerst Brill (in (6), I § 3, 1870: vgl. auch Math. Ann. II, S. 473, III S. 459, IV S. 541, 548), der ebenda auf Grund gewisser Determinantensätze auch die Erzeugung derselben Curve in einem [r] durch [r—1], also ihre dualistische Darstellung, vornimmt. Mit diesen Hülfsmitteln ergeben sich an der Hand bekannter (durch Brill-Noether streng bewiesener) Abzählungsformeln die von Clifford a. a. O. aufgestellten Sätze fast ohne weiteres, so namentlich der Schlusssatz, Papers S. 331, dass eine Curve von der Ordnung n, dem Geschlecht p, wenn $p < \frac{1}{2}n$ ist, in höchstens einem Raume [n — p] liegen kann.

sprechenden kannte. Andererseits beschränkt sich Castelnuovo in (23) gegenüber Brill und Zeuthen:

a. auf die Abzählung bloss der eigentlichen Specialscharen, während diese die ausgezeichneten Scharen bestimmen, die sie als besonderen Fall enthalten.

b. Ferner sind die Restgruppen zu den Specialscharen auf dem räumlichen Gebilde, das Castelnuovo betrachtet, nicht wiederum Specialgruppen, sondern gewisse andere ausgezeichnete Gruppen G_p, die mit diesen nichts gemeinsam haben, auf die also namentlich der Riemann-Roch'sche Reciprocitätssatz nicht anwendbar ist.

c. Castelnuovo bestimmt von den Specialscharen g_Q^q nur die Anzahl derjenigen, für welche die Mannigfaltigkeit, die Brill-Noether mit τ bezeichnet haben, den Wert null hat, so dass für sie:

$$\tau = Q(q+1) - q(p+q+1) = 0$$

ist.

Aus der Annahme c. folgt sogleich, dass die Zahl p, die das Geschlecht der Grundcurve angiebt, die specielle Form haben muss:

$$p = (r+1)(q+1),$$

wenn $G_Q^{(q)}$, $G_R^{(r)}$ Specialgruppen sind, die sich nach dem Riemann-Roch'schen Satze entsprechen. Wegen dieser Einschränkung (die übrigens durch die Methode an und für sich nicht geboten ist) lässt sich Castelnuovo's Formel*) auf viele Fälle nicht anwenden; z. B. überhaupt nicht auf Primzahlwerte von p.

Das Verfahren von Castelnuovo besteht nun in folgendem: Die Zahl N der auf einer Curve vom Geschlecht p existirenden Specialscharen $g_Q^{(q)}$ hängt von drei Elementen p, Q, q ab, zwischen denen die Gleichung besteht:

$$1) \qquad Q(q+1) - q(q+p+1) = 0.$$

Es handelt sich darum, bei einer Curve $R_{Q+p}^{(p)}$ vom Geschlecht p und der Ordnung $Q+p$ in einem ebenen Raume [Q] von Q Dimensionen diejenigen Räume $[Q-q-1]$ abzuzählen, welche die $R_{Q+p}^{(p)}$ noch in p Punkten treffen. Den Restschnitt eines $[Q-1]$ bildet dann noch eine ∞^q-Mannigfaltigkeit von je Q Punkten auf R, die gesuchte Schar g_Q^q.

*) In einem Schreiben vom 11. Juli 1890 an den einen der Referenten gab G. Castelnuovo eine allgemeinere Formel für die Anzahl der Specialgruppen an, welche die Annahme $\tau = 0$ fallen lässt.

Um die Zahl N zu bestimmen, macht der Verfasser von dem Princip der Erhaltung der Anzahl Gebrauch in der Form, dass er annimmt, N ändere sich nicht, wenn man die Raumcurve $R_{Q+p}^{(p)}$ ersetzt durch den Inbegriff einer unicursalen $R_Q^{(0)}$ und von irgend p ihrer Sehnen. Er stützt diesen Uebergang auf einen Satz von Noether (Ueber die reductibeln algebraischen Curven, Acta Math. VIII, S. 173), wonach die Anzahl der linear unabhängigen Formen φ für beide Gebilde dieselbe, $= p$ ist. Für die zerfallende Curve setzt sich aber der Inbegriff der gesuchten Räume $[Q-q-1)$ zusammen aus denjenigen, I. welche die $R_Q^{(0)}$ in p Punkten treffen, II. welche die $R_Q^{(0)}$ in $p-1$ Punkten und eine Sehne in einem Punkte, III. welche die $R_Q^{(0)}$ in $p-2$ Punkten und zwei Sehnen treffen, u. s. w. Weil aber, wie man leicht einsieht, die Zahl der ad II, III u. s. w. gehörigen Lösungen gleich null ist, wenn jene Gleichung 1) zwischen Q, q, p erfüllt ist, so genügt es, die gestellte Frage bloss für die $R_Q^{(0)}$ zu beantworten.

Diese Aufgabe ist aber (22) wiederum mit Hülfe des Princips von der Erhaltung der Anzahl auf die einfachere zurückführbar, dass die $R_Q^{(0)}$ in p Gerade des Raumes [Q] zerfällt, ein Fall, für welchen H. Schubert jene Zahl bestimmt hat („die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes“, Math. Ann. Bd. 26, und „Anzahlbestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimension“, Acta Math. VIII). Ueberträgt man dieses Ergebnis auf den vorliegenden Fall, so erhält man die gesuchte Zahl:

$$N = \frac{1!\,2!\ldots q!\,1!\,2!\ldots (p-1-Q+q)!\,p!}{1!\,2!\ldots (2q+p-Q)!}.$$

Diese Formel geht für $q = 1$, $Q = \frac{1}{2}p + 1$ in die dem Fall gerader p entsprechende Formel [B] § 11 von Brill-Noether, Math. Ann. VII, S. 296 über, wie Brill (Math. Ann. Bd. 36, S. 358) nachgewiesen hat. In (21) leitet auf derselben Grundlage Castelnuovo die Formel von Brill und Zeuthen ab, die sich auf ausgezeichnete Gruppen bezieht, sowie andere mit den Berührungscurven und ähnlichen Fragen zusammenhängende Abzählungsresultate.

Vergleichung der beiden geometrischen Auffassungen.

15. Untersucht man auf Grund des in Nr. 14 dargelegten Entsprechens von ebenen Curven und solchen in höheren Räumen die Methode von Castelnuovo, so erscheint sie im Grunde nicht verschieden von einer früher schon von Jonquières (J. f. M. Bd. 66, S. 309 ff.) und der von Zeuthen in (5) angewandten. In der That ist die Operation des Zerfällens einer

$R_n^{(p)}$ in eine $R_{n-1}^{(p-1)}$ und eine ihrer Sehnen identisch mit der Annahme, dass die ebene Grundcurve f, der sie entspricht, einen neuen Doppelpunkt gewinnt, während zugleich ein gemeinsamer Basispunkt, den die Transformationscurven in einem einfachen Punkte von f besitzen, in einen Doppelpunkt von f hereinrückt; ferner entspricht die Verwandlung einer $R_n^{(p)}$ in eine $R_{n-1}^{(p)}$ und eine sie einfach treffende Gerade dem Aufrücken eines Basispunktes, den jene Curven ausserhalb f in der Ebene gemeinsam haben, auf f selbst, u. s. w.

Diese Andeutungen, die auszuführen hier nicht der Platz ist, lassen erkennen, dass die Verwendung höherer Räume für die hier besprochenen Fragestellungen keineswegs wesentlich neue Hülfsmittel flüssig macht, da alle Raumoperationen ihr genaues Gegenbild in dem Verhalten der transformirenden Curvenschar gegenüber der ebenen Curve besitzen, während die Beweise wegen der Sicherheit der Schlüsse besser an der ebenen Curve, wo sie Zeuthen mit so grosser Sorgfalt ausführt, als an den zur Zeit noch unbekannten Raumgebilden geführt werden. — Andererseits ist nicht zu verkennen, dass die räumliche Behandlung wegen ihrer Analogie zu dem Raume von drei Dimensionen neue Fragestellungen und den Weg zu ihrer Lösung nahelegt, auch die Darstellung erleichtert.

Algebraische Behandlung des Problems.

16. Gänzlich verschieden von den bisher besprochenen Abzählungen, die doch alle auf das Postulat von der Erhaltung der Anzahl bei gewissen Variationen der Constanten sich stützen, ist die Behandlung, die Brill der Frage der ausgezeichneten und Specialgruppen zu Teil werden lässt. Er untersucht in (15) diejenigen ausgezeichneten Gruppen (Basispunkte eines linearen Curvensystems) auf der gegebenen Curve, für welche ein Punkt durch die übrigen mitbestimmt ist, indem er an das folgende algebraische Problem anknüpft ((11) S. 61, Brill-Noether in (12) § 9): Die Coordinatenpaare $x_1 y_1, \ldots x_k y_k$ zu finden, welche alle k-reihigen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \psi_1(x_1 y_1) & \psi_2(x_1 y_1) & \ldots & \psi_{k-i}(x_1 y_1) \\ \psi_1(x_2 y_2) & \psi_2(x_2 y_2) & \ldots & \psi_{k-i}(x_2 y_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_1(x_k y_k) & \psi_2(x_k y_k) & \ldots & \psi_{k-i}(x_k y_k) \end{vmatrix}$$

zum Verschwinden bringen und zugleich die Gleichungen befriedigen:

$$f(x_1 y_1) = 0, \quad f(x_2 y_2) = 0, \quad \ldots, \quad f(x_k y_k) = 0.$$

Hier ist $f(xy) = 0$ die Gleichung der Grundcurve vom Geschlecht p mit allgemeinen Moduln; die $\psi(xy)$ sind ganze Functionen von gleicher Di-

mension, die sich zu f adjungirt verhalten, im übrigen für gewisse Wertepaare (die auch $f=0$ befriedigen dürfen) alle zugleich verschwinden können.

In § II der Abhandlung (15) wird die Forderung, dass alle Determinanten der Matrix zugleich verschwinden sollen, auf eine gewisse endliche Anzahl von simultanen Gleichungssystemen zurückgeführt, deren Erfüllung jener Forderung äquivalent ist. Von den Lösungen des ersten dieser Systeme sind zu subtrahiren diejenigen des zweiten, zur Differenz zu addiren die des dritten, zu subtrahiren die des vierten u. s. f.

Jedes dieser Gleichungssysteme lässt sich nun als ein System von k Correspondenzen zwischen k Punkten der Grundcurve f auffassen, und es ist die Aufgabe zu lösen: die Anzahl der Punktgruppen zu finden, welche ein solches System von Correspondenzen zugleich befriedigen. Es handelt sich also um die Ausdehnung derjenigen Formeln, welche in (11) für Punktepaare, Punktetripel, -Quadrupel, entwickelt worden sind, auf den Fall von beliebig vielen Correspondenzen. Hierbei genügt es, sich auf solche zu beschränken, bei welchen die Wertigkeit durch vielfache Punkte der Correspondenzcurven definirt wird.

Für eine Correspondenz $\varphi=0$ zwischen $k+2$ Variabelnpaaren $x_i y_i$ ($i=1, 2, 3, \ldots, k, r, s$), für die je die Gleichung besteht $f(x_i y_i)=0$, kommen folgende Zahlen in Betracht: 1. die Anzahl φ_i der beweglichen Schnittpunkte der Correspondenzcurve $\varphi(i)=0$ (d. h. φ als Function von $x_i y_i$ angesehen) mit der Grundcurve f; 2. die Wertigkeit φ_{ij} dieser Curve in dem Punkte j ($j=1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k, r, s$); 3. die Anzahl $\varphi_i^{(\alpha)}$ der in den Ausnahmepunkt α (einen α-fachen Punkt von f) fallenden festen Schnittpunkte der Curve mit f; 4. der Grad $[\varphi_i]$ dieser Correspondenzcurve.

Liegen $k+1$ Correspondenzen $\varphi, \psi, \ldots, \vartheta$ vor, sämtlich in jenen $k+2$ Variabelnpaaren geschrieben, so hat man sich mit Hülfe der Gleichungen $f(i)=0$ die Variabelnpaare $1, 2, \ldots, k$ eliminirt zu denken. Man kommt zu einer Schlussgleichung: $R(r; s)=0$. Es handelt sich nun darum, a. die Anzahl P_r der beweglichen Schnittpunkte der Correspondenzcurve $R=0$ (als Function von (r) betrachtet) mit f; b. die Wertigkeit derselben in (s): P_{rs} (von den Zahlen $P_i^{(\alpha)}$, $[P_i]$ sehen wir hier ab) durch jene vier Zahlengruppen φ_i, u. s. w., für jede Correspondenz gebildet, darzustellen.

Zum Ausgangspunkte für die Lösung dieser Aufgabe dienen zwei Formeln, welche eben diese für den Sonderfall $k=1$ darstellen, wo also zwei Correspondenzgleichungen je in den Coordinaten von drei

Punkten geschrieben vorliegen. Aus einer früheren Arbeit ((11) SS. 42. 46. vgl. (16). S. 734) werden hierfür die folgenden Formeln entnommen:

$$P_r = \varphi_r \psi_1 + \psi_r \varphi_1 - 2p\, \varphi_{1r} \psi_{1r};$$

$$P_{rs} = \varphi_{rs} \psi_1 + \psi_{rs} \varphi_1 - \varphi_{1r} \psi_{1s} - \varphi_{1s} \psi_{1r}.$$

Die entsprechenden Zahlen für höhere Werte von k lassen sich aus diesen mittelst zweier Recursionsformeln von grosser Einfachheit ableiten ((15). § III, S. 341). Es genügt nun aber weiter, sich auf denjenigen Fall zu beschränken, dass von den Correspondenzen $\varphi, \psi, \ldots\, \vartheta$ jede hinsichtlich der in ihr enthaltenen $k+2$ Variabeln symmetrisch gebaut ist: man kann also $\varphi_1 = \varphi_2 = \cdots = \varphi_s = \varphi$; $\psi_1 = \psi_2 = \cdots = \psi$ etc., $\varphi_{12} = \cdots = \varphi_{rs} = \varphi'$; etc. annehmen. Dann lauten jene zwei Recursionsformeln:

$$(k+1)(\varphi\psi\chi\ldots\vartheta) = \Sigma\varphi.(\psi\chi\ldots\vartheta) - p\Sigma\varphi'.(\psi\chi\ldots\vartheta)';$$

$$(\varphi\psi\chi\ldots\vartheta)' = \Sigma\varphi'.(\psi\chi\ldots\vartheta) - \Sigma\varphi'.(\psi\chi\ldots\vartheta)'.$$

wo $(\varphi\psi\chi\ldots\vartheta) = P_r/(k+1)!$ ist, $(\varphi\psi\chi\ldots\vartheta)' = P_{rs}\, k!$, und $(\psi\chi\ldots\vartheta)$, $(\psi\chi\ldots\vartheta)'$ die gleichen Zahlen, gebildet für das simultane System der k Correspondenzen $\psi, \chi, \ldots\, \vartheta$, darstellen, Σ ein Summationsbuchstabe ist, p das Geschlecht von f. An Stelle dieser zwei Formeln lassen sich zwei noch erheblich einfachere setzen, die wir hier übergehen ((15). § V. Formeln 3)).

Diese Formeln werden in § VII auf das oben angegebene algebraische Problem angewandt. Der Uebergang von diesem zu denjenigen Scharen von Punktgruppen, die fremden Bedingungen nicht mehr genügen, wird in VIII ausgeführt, womit dann auch nachträglich die bereits bei Brill-Noether ((12) § 11) angeführte Formel für die Anzahl der auf einer Curve vom Geschlecht p vorhandenen Specialscharen g_Q^1 in allen Teilen streng bewiesen ist.

16*. Von diesem Excurs auf das Gebiet der Specialgruppen kehren wir noch einmal zur Theorie der Correspondenzen zwischen zwei Punkten einer Curve zurück, um von einer Gruppe von Arbeiten zu berichten, die wegen der neuen Gesichtspunkte, welche sie in die Fragestellung hineinträgt, und wegen ihrer Ergebnisse eine ausführlichere Darstellung verlangt, als ihr im Context mit den anderen Arbeiten, die sie teilweise zeitlich unterbricht, zu widmen möglich gewesen wäre.

Uebergang zu C.

Um indessen diese Hurwitz'sche Formulirung des Correspondenzprincips zum Verständnis zu bringen, ist es nötig, weiter auszuholen und

den Gedankengang darzulegen, in dessen Zusammenhang sie entstanden ist. Wir gehen deshalb in einer kurzen Skizze auf den Begriff der elliptischen Modulfunctionen ein.

C. Elliptische Modulfunctionen und ihre Beziehung zu algebraischen Correspondenzen.

Litteratur*):

L. Kronecker, Ueber die Anzahl der verschiedenen Klassen quadratischer Formen von negativer Determinante. Journ. f. M. Bd. 57, S. 248, 1859.

R. Dedekind, Schreiben an Hrn. Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Journ. f. M. Bd. 83, S. 265, 1877.

F. Klein,

(1) Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Sitzber. d. Münch. Ak. 1879, und Math. Ann. XVII, S. 62—70.

(2) Ueber unendlich viele Normalformen des elliptischen Integrals erster Gattung. Sitzber. Münch. Ak. 1880, und Math. Ann. XVII, S. 133—138.

(3) Neue Untersuchungen über elliptische Modulfunctionen der niedersten Stufen. Leipz. Ber. 1885, S. 70—91.

E. W. Fiedler, Ueber eine besondere Klasse irrationaler Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Diss. Leipz. 1885, 101 SS.

G. Friedrich, Die Modulargleichungen der Galois'schen Moduln der zweiten bis fünften Stufe. Diss. Leipz. 1886, 71 SS.

J. Gierster, Ueber Relationen zwischen Klassenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante, Math. Annalen 17 (zwei Noten), 1880.

F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen. Ausgearb. und vervollst. von R. Fricke, 2 Bde., Leipz. 1890 u. 92.

A. Hurwitz,

(1) Zur Theorie der Modulargleichungen. Gött. Nachr. 1883, S. 350—363.

(2) Ueber Relationen zwischen Klassenanzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante. Math. Ann. XXV, S. 157—196, 1884.

(3) Ueber die Klassenzahlrelationen und Modularcorrespondenzen primzahliger Stufe. Leipz. Ber. 1885, S. 222—240.

(4) Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip. Ibd. 1886, und Math. Ann. Bd. 28, S. 561—585.

(5) Ueber diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen. Gött. Nachr. 1887, S. 85—107 und Math. Ann. Bd. 32, S. 290—308.

---

*) Da wir ein Referat über die Theorie der Modulfunctionen selbst zu geben nicht beabsichtigen, wegen deren wir, ebenso wie wegen der Urheberschaft der einzelnen Sätze, auf Klein-Fricke's Werk (s. oben) verweisen, so beschränken wir uns auf die Angabe derjenigen Litteratur, die auf die Theorie der algebraischen Correspondenzen Bezug hat.

17. In der Theorie der elliptischen Functionen treten Grössen auf, die unverändert bleiben, wenn man das Verhältnis $\omega = iK'/K$ der Perioden des Normalintegrals durch gewisse lineare Functionen ω' desselben ersetzt:

Begriff der elliptischen Modulfunction, Einteilung nach der Stufenzahl.

$$1) \qquad \omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta},$$

wo die ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Gleichung genügen:

$$1') \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Zu diesen Grössen, die Dedekind „elliptische Modulfunctionen" genannt hat (J. f. Math. Bd. 83), gehört die absolute Invariante J [$= g_2^3/(g_2^3 - 27 g_3^2)$] des Radicanden vierten Grades unter dem Integralzeichen, die bei allen der Gleichung 1') genügenden Substitutionen ungeändert bleibt.

Eine andere Function dieser Art ist der Modul k^2 des elliptischen Integrals, d. h. eines der Doppelverhältnisse der vier Wurzeln des Radicanden, welches mit J durch die Gleichung verknüpft ist:

$$\frac{J}{J-1} = \frac{4(1-k^2+k^4)^3}{(1+k^2)^2(2-k^2)^2(1-2k^2)^2}.$$

Diese Modulfunction bleibt jedoch nicht mehr bei allen Substitutionen, die aus 1') hervorgehen, ungeändert, sondern nur bei solchen, für welche $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ausserdem noch der Congruenz genügen:

$$\alpha : \beta : \gamma : \delta = 1 : 0 : 0 : 1 \quad (\text{mod. } 2).$$

Aehnlich bleibt die Modulfunction $k' - ik$ (wo $k' = \sqrt{1-k^2}$ ist) ungeändert bei Substitutionen, die „der Identität" mod. 4 congruent sind; die Grösse a, die „Tetraeder-Irrationalität", die mit der Invariante J durch die Gleichung verbunden ist:

$$J = \frac{(a^4 + 8a)^3}{64(a^3-1)^3},$$

bleibt invariant nur dann, wenn jene Congruenz modulo 3 stattfindet, u. s. w. (Klein (3)).

Modulfunctionen, deren Substitutionen durch Congruenzen der Art: $\alpha : \beta : \gamma : \delta = 1 : 0 : 0 : 1$ (mod. q) aus der Gesamtheit aller der 1') genügenden (als ausgezeichnete Untergruppe) herausgehoben werden, nennt Klein „Congruenzmoduln" und teilt sie nach der Zahl q in „Stufen" ein. J gehört also (ebenso wie alle rationalen Functionen von J) zur ersten, k^2 zur zweiten, a zur dritten Stufe, $k' - ik$ zur vierten u. s. w.

Wir werden in der Folge bloss von solchen Congruenzmoduln handeln. Alle Moduln einer Stufe hängen zu je zweien algebraisch von einander ab und bilden im Riemann'schen Sinn eine Klasse von algebraischen Functionen, deren jede durch zwei von ihnen, von denen mindestens eine nicht zu speciell gewählt ist, rational ausdrückbar ist.

Dieser Klasse kommt ein bestimmtes Geschlecht (p) zu. Für die niedersten Stufen ist $p = 0$, und demnach wird die Gesamtheit aller Congruenzmoduln einer solchen Stufe von den rationalen Functionen eines passend gewählten Repräsentanten, der dann ein Hauptmodul beisst, gebildet (Klein (3)).

Sobald aber das Geschlecht $p > 0$ wird — und dies tritt schon für die $q = 6$te Stufe ein, wo $p = 1$ ist — sind zwei geeignet gewählte Vertreter (von denen einer J sein kann) zur Bildung des vollständigen Modulsystems erforderlich, zwischen denen eine irreductible Gleichung vom Geschlecht p besteht: z. B. k^2 und a für $q = 6$, oder statt dessen zwei Grössen x und y, für die:

$$k^2 = \frac{(3-y)^3(1+y)}{16y^3}, \quad a = \frac{x^3+4}{3x^2}$$

ist, mit der Beziehung $y^2 = x^3+1$, der Gleichung einer ebenen Curve vom Geschlecht 1. Man legt für $p > 1$ den Functionen der Stufe ein algebraisches Gebilde von einer Dimension zu Grunde, das noch auf verschiedene Weisen gewählt werden, z. B. durch r Gleichungen zwischen $r+1$ Variabeln darstellbar sein kann; diese Darstellung hat den Vorteil, dass man zu einem einfacheren Ausdrucke der Modulfunctionen und der Gleichungen gelangt, als wenn man eine Gleichung zwischen zweien zu Grunde legt. Klein kommt so zu dem Begriff eines „vollständigen Modulsystems" von $r+1$ Functionen, durch die sich alle übrigen der Stufe rational ausdrücken. Für $q = 8$ ($p = 5$) ist ein solches System das der drei Grössen $\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$, $\sqrt{k'-ik}$, mit zwei Gleichungen zwischen ihnen (Raumcurve achter Ordnung). Für $q = 8$ bilden aber auch (wenn man statt der „Hauptcongruenzgruppe" die sie umfassende Gruppe derjenigen Substitutionen 1), 1') betrachtet, für welche $\alpha:\beta:\gamma:\delta$ entweder $\equiv 1:0:0:1$ oder $\equiv 5:0:0:5$ (mod. 8) ist, (Klein-Fricke I. SS. 398, 678)) schon die beiden Grössen $x = 1/\sqrt{k}$, $y = \sqrt{k'/k}$ mit der einen Gleichung ($p = 3$) $x^4 - y^4 = 1$ ein Modulsystem, u. s. w.

Modulfunctionen von transcendentem Charakter.

18. Die Auswahl dieses Modulsystems wird zweckmässig so getroffen, dass jede Function des vollständigen Systems sich durch solche Substitutionen der ganzen Gruppe 1'), welche die einzelne Function nicht ungeändert lassen, doch nur wieder in eine lineare Function des Systems transformirt; denn hierdurch werden die Begriffe und Bildungen der Invariantentheorie der linearen Transformation für die Theorie flüssig. Ein solches System bilden nun aber die bekannten Formen φ des algebraischen Gebildes der Stufe q, weshalb die Normalcurve $(2p-2)$ter Ordnung in einem Raume von $p-1$ Dimensionen als Gebilde bevorzugt wird.

Ein solches System bilden weiter (von einer Integrationsconstanten abgesehen) die längs einer Curve der Stufe q hinerstreckten überall endlichen p Integrale, welche ebenso wie die zugehörigen Thetafunctionen, durch die sich die algebraischen Functionen ausdrücken, als eindeutige Functionen des Argumentes ω eine besonders zweckmässige Grundlage für die Darstellung aller Functionen der Stufe bilden. Die principielle Verwertung des Gedankens, diese transcendenten Functionen für die Theorie der elliptischen Modulfunctionen und namentlich der „Modularcorrespondenzen" heranzuziehen, geht auf Hurwitz zurück, der ähnlich, wie früher Roch (V. Nr. 24) die Riemann'schen Sätze über das Verschwinden der Thetafunction zu Abzählungen für die Theorie der Berührungscurven verwertet hatte, diese Sätze zur Darstellung von Correspondenzgleichungen benutzt. Zunächst besteht zwischen dem Geschlecht p der Curve und der Stufenzahl q der (aus den Eigenschaften der linearen Transformation abgeleitete) Zusammenhang (Hurwitz, (2) S. 168) $p = \lambda(q-6)/12q+1$, wo λ eine hier nicht näher zu erläuternde ganze Zahl ist, die z. B. für eine Primzahl q den Wert hat $\lambda = \frac{1}{2}q(q^2-1)$, sodass in diesem Falle

$$p = \tfrac{1}{24}(q+2)(q-3)(q-5)$$

wird.

Jene längs der Curve hinerstreckten p Abel'schen Integrale erster Gattung besitzen nach dem Gesagten die Eigenschaft, solche eindeutige Functionen des Arguments ω zu sein, welche bei denselben Substitutionen wie die rationalen Functionen des Modulsystems (von einer additiven Constanten abgesehen) ungeändert bleiben. Bezeichnet man mit $J_r(\omega)$ einen Repräsentanten dieser p Integrale, und ist $T(\omega)$ eine Substitution der Stufe q, ist also:

$$T(\omega) = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta} \quad \text{für} \quad \alpha:\beta:\gamma:\delta = 1:0:0:1 \quad (\text{mod. } q)$$

und

$$\alpha\delta-\beta\gamma = 1,$$

so haben demnach die Abel'schen Integrale $J_r(\omega)$ die Eigenschaft:

1. überall endliche Functionen von ω zu sein;
2. dass:

$$J_r(T(\omega)) = J_r(\omega)+P_r,$$

wo P_r ein Periodensystem des Integrals J_r ist. Es entspricht also den verschiedenen Werten von ω je ein bestimmter Punkt der Curve; umgekehrt aber gehören zu jedem solchen unendlich viele Werte von ω, nämlich alle diejenigen (ihm „äquivalenten"), welche durch die Transformation $T(\omega)$ aus ω hervorgehen.

Ferner ist, wenn $S(\omega)$ eine allgemeine Substitution der ersten Stufe ist:

$$J_r(S(\omega)) = \sum_{i=1}^{i=p} c_i^{(r)} J_i(\omega) + c^{(r)},$$

wo die c von ω unabhängige Constanten sind. — Wir merken noch an, dass die Entwicklung des überall endlichen Integrals J nach Potenzen von $h = e^{2i\pi\omega}$ die Form hat (Hurwitz (3) S. 225):

$$\sum_{m \equiv a} \pm \frac{\psi(m)}{m} h^{\frac{m}{q}},$$

wo der Summationsbuchstabe m alle positiven Zahlen durchläuft, die zu einer ganzen für das Integral charakteristischen Zahl a ($< q$) mod. q congruent sind, $\psi(m)$ eine hier nicht näher zu definirende (bekannte) zahlentheoretische Function von m ist, die übrigens ganzzahlige Werte hat.

Klassenanzahlen und Modularcorrespondenzen.

19. Wir wenden uns nun zu den „Modularcorrespondenzen“. Es sind algebraische Correspondenzen auf jenen Curven vom Geschlecht p, die Beziehungen ausdrücken zwischen den Moduln einer Stufe q und denjenigen, die aus ihnen durch eine Transformation nter Ordnung des elliptischen Integrals hervorgehen, vermöge deren ω in $n\omega$ übergeht: also eine Verallgemeinerung der Jacobi'schen Modulargleichungen.

Nur beiläufig sei erwähnt, dass das Interesse an diesen Correspondenzen von einer Untersuchung von Kronecker (Litteratur) herrührt, der aus den Modulargleichungen, die zur Transformation nter Ordnung gehören, lineare Relationen zwischen gewissen zahlentheoretischen Functionen ableitete, welche die Anzahl der verschiedenen (nicht-äquivalenten) Klassen von binären quadratischen Formen darstellen, die zu einer gegebenen negativen Determinante ($-n$) gehören. Er verwendete diese Relationen zur Berechnung jener Anzahl. Man erhält die Relationen und noch weitere derselben Art, wenn man (s. Gierster l. c.) die Coincidenzstellen jener Modularcorrespondenzen in doppelter Weise abzählt: einmal arithmetisch, was keine Schwierigkeiten hat und zu einer linearen Function von jenen Klassenanzahlen führt, dann algebraisch, was eine lineare Combination der oben erwähnten (bekannten) zahlentheoretischen Functionen $\psi(n)$ und von $\Phi(n)$, der Summe der Divisoren der ganzen Zahl n, liefert, die dann jener gleichzusetzen ist. Diese algebraische Bestimmung der Coincidenzzahl ist die Aufgabe, der zunächst die Bemühungen von Hurwitz gegolten haben.

Wenn man auf das System der elliptischen Moduln der Stufe q (in dem erwähnten Sinne) eine Transformation nter Ordnung (n relativ prim

zu q) anwendet, so ordnen sich auf der algebraischen Curve, deren Punkte Träger jener Moduln sind (s. oben Nr. 17), dem Punkte P, der zu dem Modul ω gehört, ausser dem Punkte $n\omega$ noch andere Punkte zu, weil zu P auch noch alle Parameterwerte $T(\omega)$ (s. oben Nr. 18) gehören: nämlich alle diejenigen $\Phi(n)$ Punkte P', welche die Parameterwerte $(A\omega+qB)/D$ besitzen (wo A, B, D ganze positive Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind, $AD=n$, $B<D$). Und umgekehrt entsprechen jedem Punkte P' $\Phi(n)$ Punkte P. Man hat somit auf jener Curve vom Geschlecht p, die zur Stufe q gehört, eine $\Phi(n)$-$\Phi(n)$-Correspondenz*).

Für die algebraische Darstellung dieser „Modular-Correspondenz" könnte man den folgenden Weg einschlagen. Man sucht die simultanen linearen Substitutionen, die, angewendet auf die passend gewählten ursprünglichen und die transformirten Moduln, die Correspondenzgleichungen ungeändert lassen, bildet dann ein System von ganzen Functionen dieser Moduln, welche ausser bei diesen Substitutionen auch bei Vertauschung des ursprünglichen mit dem transformirten Modulsystem ungeändert bleiben, und aus denen sich alle anderen ganzen Functionen derselben Art in ganzer Form zusammensetzen lassen; setzt endlich aus diesem vollständigen System von ternären Simultaninvarianten die linke Seite der Correspondenzgleichung, zunächst mit unbestimmten Coefficienten, zusammen und zwar derart, dass ein vorgeschriebener Grad in den Variabeln erreicht wird, und bestimmt dann jene Coefficienten etwa durch Reihenentwicklung der Modulfunctionen.

Diesen Weg haben auf Veranlassung von Klein für einige niedere Fälle Friedrich und Fiedler eingeschlagen (s. Litt.). Für höhere Fälle muss man sich damit begnügen, die Structur der Gleichung oder des Gleichungssystems, das die Correspondenz definirt, zu studiren. Hier bietet sich nun als gangbarer Weg der dar, die Correspondenzgleichung durch Nullsetzen eines Thetaproducts zu definiren, dessen Argumente sich aus den Integralen erster Gattung zusammensetzen, die der betreffenden Stufe q entsprechen.

Transcendente Formulirung der Modularcorrespondenzen für die Stufenzahl 8.

20. Wir betrachten den Fall $q=8$, $p=3$ (s. Nr. 17 a. E.), an dem Hurwitz (1) die allgemeine Theorie im wesentlichen entwickelt zu haben scheint.

Zwischen den beiden Modulfunctionen:

---

*) Wir greifen hier aus den verschiedenen Correspondenzen, die durch Transformation erster Ordnung aus einer derselben hervorgehen, eine heraus (Hurwitz (1)).

$$x = \frac{1}{\sqrt{k(\omega)}}, \quad y = \sqrt{\frac{k'(\omega)}{k(\omega)}}$$

besteht die Gleichung:

$$x^4 - y^4 = 1,$$

die eine ebene Curve vierter Ordnung vom Geschlecht 3 darstellt. Die drei überall endlichen Integrale:

$$J_1(\omega) = -\tfrac{1}{4}\int \frac{dy}{x^2}, \quad J_2(\omega) = -\tfrac{1}{4}\int \frac{dy}{x^3}, \quad J_3(\omega) = -\tfrac{1}{4}\int \frac{y\,dy}{x^3}$$

genügen Gleichungen, wie:

$$J_1(\omega+1) = e^{\frac{2i\pi}{q}} J_3(\omega), \quad J_1\left(-\frac{1}{\omega}\right) = -J_1(\omega) + p_1,$$

u.s.w., wo p_1 ein Periodenvielfaches ist, q die Stufe ($= 8$) bedeutet. Entspricht nun vermöge einer Transformation $n$ter Ordnung dem Punkte $\omega(xy)$ mit den Coordinaten x, y ein Punkt $\omega'(x'y')$, so besteht zwischen ω und ω' eine Correspondenz $(\Phi(n), \Phi(n))$, die sich z. B. für $n = 3$, wo $\Phi(n) = 4$ ist, in der bekannten Legendre'schen Form algebraisch so darstellt:

$$xx' - yy' = 1.$$

Aber schon für $n = 5$ ist die Correspondenz nicht mehr durch eine einzelne algebraische Gleichung ausdrückbar. Indessen ist auch für diesen und höhere Fälle eine algebraische Form möglich.

Um zu einer Orientirung zu gelangen, sucht Hurwitz einen transcendenten Ersatz auf folgendem Wege.

Wenn man an Stelle des Argumentes ω in einem der drei Integrale $J_\alpha(\omega)$ ($\alpha = 1, 2, 3$) dasjenige eines der $\Phi(n)$ Punkte ω_i' einsetzt, das dem Punkte ω vermöge der Transformation

$$\omega_i' = \frac{A_i\omega + 8B_i}{D_i} \quad (A_i D_i = 8,\ B_i < D_i)$$

entspricht, so lässt sich, wie eine einfache Betrachtung zeigt, die Summe der $\Phi(n)$ Integrale $J_\alpha(\omega_i')$ als lineare Function der drei Integrale $J_\alpha(\omega)$ ausdrücken. Führt man noch statt der $J_\alpha(\omega)$ ihre linearen Combinationen zu Riemann'schen Normalintegralen erster Gattung $j_\alpha(\omega)$ ($\alpha = 1, 2, 3$) ein, wie sie in der Thetafunction auftreten, und bildet den Quotienten (ein Argument ersetzt bei Θ die drei):

$$F(\omega;\omega') = \frac{\prod_i \Theta(j_\alpha(\omega') - j_\alpha(\omega_i') - c_\alpha)}{\Theta(j_\alpha(\omega') - c_\alpha)^{\Phi(n)} \prod_i \Theta(j_\alpha(\omega_i') + c_\alpha)},$$

wo die Producte Π sich über $i = 1, 2, \ldots, \Phi(n)$ erstrecken, so beweist

man mit Hülfe jener linearen Relationen und der bekannten Eigenschaften der Thetafunction, dass $F(\omega;\omega')$ eine rationale ganze oder gebrochene Function der Coordinaten einerseits des Punktes ω, andererseits von ω' ist.

Und zwar ist F in dem Falle, dass die Zahl n von der Ordnung $4k+3$ ist, eine ganze Function dieser Coordinatenpaare; die $(\Phi(n), \Phi(n))$-Correspondenz $F=0$ besitzt die Wertigkeit null, ihre Correspondenzcurven (s. oben Nr. 4) sind vom Grad $\frac{1}{4}\Phi(n)$ und schneiden nur in den correspondirenden Punkten (haben also keine „Ausnahmepunkte"). Dagegen ist im Falle $n=8k+1$ $F(\omega;\omega')$ eine gebrochene rationale Function der zwei Coordinatenpaare; die Correspondenz $(\Phi(n), \Phi(n))$ hat die negative Wertigkeit $-\frac{1}{4}\psi(n)$ (Bezeichnung s. oben Nr. 18 a. E.), und die Correspondenzcurven gehen durch feste „Ausnahmepunkte" (Nr. 2). Endlich für $n=8k+5$ ist F wieder im allgemeinen eine gebrochene Function, die, als Function von x, y aufgefasst, ausser in gewissen Ausnahmepunkten, wo sie teils positiv, teils negativ verschwindet (d. h. unendlich wird), in den correspondirenden Punkten ω' positiv und noch in einem mit ω beweglichen Punkte negativ verschwindet.

Wir haben es hier, kurz gesagt, mit teils gewöhnlichen, teils „zusammengesetzten" (s. oben Nr. 6) Correspondenzen (im letzteren Falle auch mit solchen von negativer Wertigkeit) zu thun; bis jetzt also mit völlig bekannten Fällen.

21. Aber **Hurwitz** gelangte zu neuen Correspondenzen, als er die angegebene Methode: die Correspondenzgleichung durch Nullsetzen eines Thetaquotienten zu bilden, auf höhere primzahlige Stufen anwendete (**Hurwitz**. (3)). Mit leichten Modificationen wesentlich zahlentheoretischer Natur lassen sich alle Bildungen, die wir für $q=8$ soeben dargelegt haben, auf diesen Fall übertragen. Nur weisen die Correspondenzgleichungen, die man, entsprechend den Fällen, dass der Transformationsgrad n quadratischer Rest oder Nichtrest der Stufe q ist, durch verschiedene Thetaquotienten darstellt, die Eigentümlichkeit auf, dass sie in algebraische Form nur gebracht werden können nach Multiplication mit gewissen anderen solchen Quotienten, welche Transformationsgraden entsprechen, die quadratische Reste von q sind. Die Anzahl dieser Hülfsfactoren hat **Hurwitz** erst später in (4) noch weiter reducirt. Die Anzahl der Coincidenzen, die man in den früher betrachteten Fällen durch einfache Anwendung der Correspondenzformel (Nr. 2) erhält, und die man hiernach zur Herstellung von Klassenrelationen wirklich benutzen kann, ist für den letzterwähnten Fall in expliciter Form nicht

Modular-correspondenzen für Primzahl-Stufen.

bekannt. — Hatte Hurwitz auf diesem Wege drei verschiedene Arten von algebraischen Correspondenzen gefunden, von denen die letzte überhaupt noch unbekannt war, so ergab sich nun die Frage, ob nicht noch andere existiren; oder aber die Aufgabe, nachzuweisen, dass die angegebenen alle möglichen sind. Die Thetaquotienten boten Hurwitz das Mittel zur Lösung dieser schönen Aufgabe.

Die allgemeine Correspondenzgleichung in transcendenter Gestalt.

22. Den Kernpunkt seiner Arbeit (4) bildet ein Thetaquotient, der, gleich Null gesetzt, die allgemeinste algebraische Correspondenz (α, β) auf einer Riemann'schen Fläche vom Geschlecht p (>0) definirt. Sind x und y zwei Stellen dieser Fläche, die sich vermöge einer Correspondenz so entsprechen, dass jeder Stelle x eine gewisse Anzahl α mit x beweglicher und im allgemeinen von x verschiedener Lagen $y', y'', \ldots, y^{(\alpha)}$ der Stelle y entsprechen, so folgt nach Hurwitz aus der Annahme einer analytischen Abhängigkeit zwischen x und y, dass die Zahl β der einer Stelle y entsprechenden Stellen x eine endliche sein muss. Zu x mögen die p unabhängigen Integrale $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_p(x)$ gehören, zu y die Integrale $u_1(y), u_2(y), \ldots, u_p(y)$, und die u_k seien so normirt, wie es Riemann für die Thetafunction verlangt, d. h. so, dass p^2 von den Perioden die Werte 0, bezw. 1 besitzen; die p^2 übrigen mögen durch a_{ik} $(= a_{ki})$ bezeichnet werden.

Alsdann lässt sich die allgemeinste algebraische Correspondenz (α, β) durch folgende transcendente Gleichung darstellen:

$$C(x; y) = \frac{\prod_r \Phi(y; y^{(r)})}{\prod_r \Phi(y^{(0)}; y^{(r)}) \prod_r \Phi(y; y_0^{(r)})} = 0,$$

wo

$$\Phi(y; y^{(r)}) = \Theta(u_i(y) - u_i(y^{(r)}) - c_i)$$

eine Thetafunction ist, von der hier nur ein Argument (das ite) angeschrieben ist, $c_1, c_2, \ldots, c_p$ Constanten sind, die Producte Π sich auf $r = 1, 2, \ldots, \alpha$ erstrecken, und $y^{(0)}$ irgend eine feste Stelle y bedeutet, $y_0^{(1)}, y_0^{(2)}, \ldots, (y_0^{(\alpha)})$ die Stellen y sind, welche irgend einer festen Stelle $x^{(0)}$ von x entsprechen. Die Function C von y verschwindet nämlich nur an den α Stellen $y^{(r)}$, die dem Punkte x entsprechen (und zwar je einfach), wird unendlich nur an den Stellen $y_0^{(r)}$ und verhält sich entsprechend, wenn man C als Function von x auffasst. Das Letztere schliesst man aus einem gewissen linearen Gleichungssystem zwischen den Integralen $u(y^{(r)})$ und $u(x)$, das dem in Nr. 20 erwähnten nachgebildet ist, und das man erhält, indem man den Punkt x über einen gewissen geschlossenen Weg auf der

Fläche führt:

$$1)\qquad \sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^{(r)}) = \sum_{l=1}^{l=p} \pi_{kl}\, u_l(x) + \pi_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p).$$

Die π_k sind irrelevante Constanten, dagegen die π_{kl} für die Correspondenz charakteristische Zahlen. Man berechnet sie mit Hülfe der folgenden linearen Gleichungen, die sich aus 1) ergeben, wenn wiederum die Stelle x gewisse geschlossene Wege auf der Fläche beschreibt:

$$2)\qquad \begin{cases} \pi_{kl} = h_{kl} + \sum\limits_i g_{il}\, a_{ki}, \\ \sum\limits_i \pi_{ki}\, a_{il} = H_{kl} + \sum\limits_i G_{il}\, a_{ki}, \end{cases} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, p)$$

wo die h, g, H, G ganze Zahlen sind, die von jener Wegführung abhängen. Diese Zahlen sind es, durch welche sich die in der Correspondenzgleichung $C(x; y) = 0$ unterbegriffenen verschiedenen Correspondenzarten von einander unterscheiden.

Anstatt die Zahlen h, g, …, π_{kl} direct zu bestimmen, untersucht man die möglichen ganzzahligen Lösungssysteme h, g, … der Gleichungen 2). Man erkennt leicht, dass für allgemeine Werte der Periodicitätsmoduln a_{ik} nur das eine Lösungssystem möglich ist:

$$G_{ii} = h_{ii} = 1, \quad \pi_{ii} = 1, \qquad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

während alle anderen Grössen h, g, … den Wert null haben. Wenn aber zwischen den a_{ik} gewisse Relationen bestehen — durch welche die sogenannten „singulären“ Riemann'schen Flächen definirt sind —, giebt es ausser diesem noch andere Lösungssyteme. Hurwitz zeigt (§ 13), dass alsdann sich alle aus einer gewissen Anzahl μ von ihnen linear zusammensetzen.

Bildet man für jedes von diesen μ Systemen wiederum den Quotienten $C(x; y)$, indem man in $C(x; y)$ überall das Argument $u_k(y^{(r)})$ durch die gleichwertige Summe ersetzt: $\sum \pi_{ki}^{\varepsilon}\, u_i(x) + \pi_k$ (für $\varepsilon = 1, 2, \ldots, \mu$), und ebenso $y_0^{(r)}$ durch die analoge Summe in x_0, und stellt das Product der so erhaltenen Quotienten C_ε, je erhoben auf eine gewisse Potenz λ_ε, her, so lässt sich von dem Quotienten:

$$3)\qquad \frac{C(x; y)}{C_1^{\lambda_1}(x; y)\, C_2^{\lambda_2}(x; y) \ldots C_\mu^{\lambda_\mu}(x; y)} = F(x; y)$$

die Eigenschaft nachweisen, dass er eine algebraische Function der Stellen x, y ist, und also $C(x; y) = 0$, die vorliegende Correspondenz, in der Form ausdrückbar ist:

$$C(x; y) = F(x; y) . C_1^{\lambda_1}\, C_2^{\lambda_2} \ldots C_\mu^{\lambda_\mu} = 0.$$

Diese Formel (mit den transcendenten Factoren $C_1, C_2, \ldots, C_\mu$) umfasst jede mögliche algebraische Correspondenz.

Die verschiedenen Arten von Correspondenzen und ihre algebraische Darstellung.

23. Jenen beiden Fällen allgemeiner und specieller Periodensysteme a_{ik} entsprechen nun zwei Hauptklassen aller möglichen durch $C = 0$ darstellbaren Correspondenzen. Hurwitz nennt die ersteren (im Anschluss an die gebräuchliche Bezeichnung) „Wertigkeits-", die letzteren „singuläre" Correspondenzen.

Für die ersteren ist die Zahl $\mu = 1$: die Grössen π_{ik} sind gleich null oder eins, je nachdem k von i verschieden oder gleich i ist. Setzt man noch $\lambda_1 = -\gamma$, so erhält man aus 3):

$$F(x; y) = C(x; y) . C_1^{\gamma}(x; y) = 0$$

als algebraische Form, auf welche man die Wertigkeitscorrespondenzen (mit γ als Wertigkeit) bringen kann. Je nachdem die Zahl γ positiv oder negativ ist, lässt sich die Gleichung $F(x; y) = 0$ auf die Form: eine ganze oder eine gebrochene rationale Function der durch homogene Gleichungen von der Form:

$$f(x_1 x_2 x_3) = 0, \text{ bezw. } f(y_1 y_2 y_3) = 0$$

mit einander verknüpften sechs Variabeln x, y bringen. Für den Fall positiver γ giebt Hurwitz eine Art von kanonischer Form für jene ganze Function $F(x; y)$ an:

$$\Psi(x_1 x_2 x_3; y_1 y_2 y_3) = \sum_{\nu=0}^{\nu=q} \Phi_\nu(x_1 x_2 x_3) . F_\nu(y_1 y_2 y_3) = 0,$$

wo Φ_i, F_i ganze homogene Functionen sind, und $q \geqq \gamma$ eine für die Correspondenz charakteristische Zahl, ihre „Dimension" ist. Die Bedeutung und der Zusammenhang der „Dimension" mit anderen die Correspondenz bezeichnenden Zahlen werden nicht erörtert. Für $q = \gamma$ erhält man die von Lindemann (17) betrachteten besonderen Berührungscorrespondenzen.

Die singulären Correspondenzen ($\mu > 1$) andererseits lassen sich auf folgende Weise durch zwei algebraische Gleichungen ersetzen: Man füge zu den α Punkten $y^{(r)}$, die vermöge der (α, β)-Correspondenz einem x entsprechen, noch p andere $y_1^{(r)}$ zu. Dann wird umgekehrt einem y ausser den β noch eine gewisse Anzahl von Punkten x zugehören, und man kann diese Anzahl noch auf verschiedene Weisen so bestimmen, dass x mit jenen $\alpha + p$ Punkten y, y_1 eine Wertigkeitscorrespondenz begründet ((4) § 12). Führt man dies auf zwei verschiedene Arten aus, so sind die gemeinsamen Lösungen der zwei Wertigkeitscorrespondenzen solche, welche zusammen die singuläre Correspondenz definiren.

Die Zahl der Coincidenzen.

24. Die Zahl der Coincidenzen bestimmt sich in jedem Falle dadurch, dass man in $C(x:y) = 0$ die Stellen x und y zusammenfallen lässt. Man kann ohne Schwierigkeit die Zahl der Nullstellen der algebraischen Function $F(x;x)$ berechnen und findet, wenn diese Zahlen für die Correspondenzen $C_1, C_2, \ldots C_\mu$ bezw. gleich $c_1, c_2, \ldots c_\mu$ sind, für die Gesamtzahl der Coincidenzen von $C(x;y)$ (§ 13):

$$\alpha + \beta + c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_\mu\lambda_\mu,$$

einen Ausdruck, der für die Wertigkeitscorrespondenz, also für $\mu = 1$, $\lambda_1 = -\gamma$ (wo dann $c_1 = -2p$ wird), in die bekannte Formel $\alpha + \beta + 2p\gamma$ übergeht. Für den Fall der singulären Correspondenzen hat Hurwitz über das Zahlensystem $c_1, c_2, c_3, \ldots$ keine näheren Angaben gemacht, und auch der andere Ausdruck, den Hurwitz für die Anzahl der Coincidenzen in diesem Falle angiebt (§ 10):

$$\alpha + \beta - (h_{11} + h_{22} + \cdots + h_{pp} + G_{11} + G_{22} + \cdots + G_{pp}),$$

wo die h, G die früher definirten Zahlen sind, scheint bis jetzt kaum mehr als formale Bedeutung zu besitzen, da seine Auswertung schon in einfachen Fällen auf umständliche Rechnungen führt. Man vergleiche Hurwitz (5), S. 99 (die dort berechnete Coincidenzzahl ergiebt sich übrigens auch aus der Zeuthen'schen Formel für mehrfach sich entsprechende Gebilde, Ref. VI Nr. 19).

Das Verhalten der Correspondenzcurven in „Ausnahmepunkten" (s. oben Nr. 4), welche auftreten, wenn die Correspondenzgleichung aus der transcendenten Form in die algebraische übergeführt wird (Nr. 23), indem man eine Gleichung der Klasse zu Grunde legt (Hurwitz (4) § 8), wird von Hurwitz nicht discutirt. Dagegen leitet er die in Nr. 4 erwähnte Formel für die Anzahl der simultanen Lösungen von zwei Correspondenzgleichungen ab, die übrigens auch schon Brill auf jene erste Coincidenzformel gegründet hatte (Math. Ann. VII, S. 615). Es wäre für die Vergleichung der Methoden von Interesse, zu wissen, ob das von Hurwitz hierfür benutzte Verfahren auch auf mehr als zwei simultane Correspondenzen, etwa n, jede mit n Punkten, ausdehnbar ist, damit so nicht nur diejenigen Formeln bestätigt würden, die Brill für diesen allgemeinen Fall (Math. Ann. 36, S. 346) aufgestellt hat, sondern auch die anschliessende Abzählung der Specialgruppen einer transcendenten Behandlung zugänglich würde.

Singuläre Riemann'sche Flächen mit Transformationen in sich.

25. Die singulären Riemann'schen Flächen, zwischen deren Perioden a_{ik} p^2 Gleichungen bestehen, die durch Elimination der π_{ik} aus dem System 2) (oben Nr. 22) hervorgehen, umfassen u. a. auch Träger einer (1, 1)-Correspondenz, also Flächen mit eindeutigen Transformationen

in sich (geometrisch etwa Curven mit Symmetrie-Axen, solche, die bei Drehungen um einen Punkt in sich übergehen u. s. w.). Von diesen Flächen beweist nämlich Hurwitz, dass sie, wenn sie nicht ein hyperelliptisches Gebilde definiren, notwendig singuläre sind. Er widmet diesem Sonderfalle — der im Zusammenhange mit der allgemeinen Transformationstheorie schon oben (Ref. VIII, Nr. 5) besprochen worden ist — zwei weitere Abhandlungen, von denen hier die erste (5) in Betracht kommt. Es wird gezeigt, dass im Falle einer (1, 1)-Correspondenz die Gleichungen 1) (Nr. 22) in die folgenden übergehen:

$$u_k(y) = \varepsilon_k u_k(x) + \pi_k, \quad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

wo ε_k eine Einheitswurzel ist. Ist $\varepsilon_k^n = 1$, so folgt sogleich, dass, wenn einer Stelle P eine Stelle $P^{(1)}$ entspricht, dieser weiterhin eine Stelle $P^{(2)}$ u. s. w., dann $P^{(n)}$ mit P identisch wird, und dass also das zugehörige algebraische Gebilde $f(sz) = 0$ vermöge der Transformation:

$$s' = e^{\frac{2i\pi}{n}} . s, \quad z' = z$$

in sich selbst übergeht. Jede eindeutige Transformation eines algebraischen Gebildes in sich ist also periodisch, und zwar lässt sich auch für die Periode n eine (von dem Geschlecht p abhängige) obere Grenze angeben.

Von der Anwendung der Coincidenzformel für singuläre Correspondenzen auf den vorliegenden Fall war oben (Nr. 24) die Rede. Die Anzahl der Coincidenzen drückt sich mit Hülfe des Geschlechts p_1 derjenigen Curve, die dem gegebenen Gebilde (1, n)-deutig entspricht, durch die Formel aus:

$$2 - 2p_1 + 2\,\frac{p - p_1}{n - 1}\,.$$

Dabei erhalten die überall endlichen Integrale jener Curve vom Geschlecht p_1 auch für das vorliegende Gebilde eine Bedeutung: sie stimmen genau mit denjenigen p_1 Integralen des letzteren überein, für welche die Einheitswurzel ε_k den Wert 1 annimmt.

Rückblick auf die Ergebnisse der transcendenten Auffassung.

26. Aus den belangreichen Untersuchungen von Hurwitz sind besonders hervorzuheben die orientirenden systematischen Ergebnisse. Der Begriff der „Correspondenz“ ist durch sie zunächst allgemein dahin festgestellt, dass einer Stelle P der Riemann'schen Fläche α (von einander verschiedene) Stellen P' derart entsprechen, dass sich diese α Stellen nur unter einander vertauschen, wenn P auf der Fläche einen geschlossenen Weg durchläuft. Den Uebergang zu der algebraischen Correspondenz bewirkt die weitere Forderung, dass die

Abhängigkeit der Stellen P′ von der Stelle P eine analytische ist. Man könnte die Punkte P′ auch auf einer anderen Riemann'schen Fläche gelegen annehmen, ohne dass diese Festsetzungen sich ändern. Hiermit aber wird nach einem klaren Einteilungsprincip der Ueberblick über alle möglichen Arten von Correspondenzen eröffnet. Für die Wertigkeits-Correspondenzen liefert die Theorie eine neue transcendente Formulirung, die auch für die vor Hurwitz nur aus Einzelfällen bekannten singulären Correspondenzen Angriffspunkte gewährt, welche rückwärts wiederum ihrer algebraischen Erforschung zu statten kommen werden.

Hinsichtlich der Abzählungen hat dagegen die transcendente Theorie gegenüber der algebraischen thatsächliche Ergebnisse bis jetzt nicht zu verzeichnen. Immerhin ist es bemerkenswert, dass die Methoden der Riemann'schen Abhandlung, die doch seitdem principielle Fortschritte nicht gemacht haben, sich auch solchen Aufgaben gewachsen zeigen, die bisher ausschliesslich der Domäne der Algebra zugerechnet worden sind.

Berichtigungen und Zusätze.

Seite 118, zum Titel von Nr. 6 hinzuzufügen: Das Newton'sche Parallelogramm.

„ 240, Z. 19 v. o.: Siehe auch Nr. 10 der Einleitung zu Abel's Précis. Cr. J. f. Math. IV. Werke ed. S. et L. Bd. 1. XXVIII.

„ 243, Z. 13 v. u.: statt S. 55 lies S. 339.

„ 256, Z. 2 v. o. hinzuzufügen: Der Grundgedanke des Dirichlet'schen Princips findet sich schon bei Green und W. Thomson; vergl. Pockel's in Tl. IV, § 2, S. 246 der auf S. 253 citirten Schrift.

„ 270, Columnentitel: statt VI lies IV.

„ 273, Z. 17 v. u.: statt VII lies VIII.

„ 299, Z. 8 v. u.: statt VII lies VIII.

„ 325, Z. 10 v. u.: statt F lies f.

„ 337, Z. 7 v. o.: statt f(x) lies F'(y).

„ 413, Z. 4 v. o.: statt a_μ lies a'_μ.

„ 423, Z. 5—3 v. u.: statt x, y lies x', y'.

„ 461, Schluss von Nr. 13: Für die Durchführung des Falles $\mu = 3$ nach der Dedekind-Weber'schen Theorie s. Baur, Math. Ann. Bd. 43.

„ 470, Zur allgemeinen Litteratur über Monodromie kommen noch Arbeiten in der Kronecker'schen Richtung von Kneser, Dissert. Berlin 1884 und Math. Ann. Bde. 28 und 29.

Sonderabdruck aus dem Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. III. (1893.)
Druck und Verlag von Georg Reimer, Berlin.







